

Sen i formuły asymptotyczne 75 LAT PROF. Z. CIESIELSKIEGO

Karol Dziędziul

09.10.2009

- Dlaczego teza twierdzeń o nasyceniu dla różnych operatorów z prac Z. Ciesielski oraz W. Dahmen, C.A. Micchelli jest identyczna.
- Sen, który wyjaśnił co trzeba robić dalej.
- Odpowiedzi na pytania których nie było.

Definicja

Rozpatrujemy operatory postaci

$$Qf(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^2} (f, F(\cdot - \alpha))_{R^2} G(x - \alpha), \quad (1)$$

G jest funkcją kawałkami wielomianową, o zwartym nośniku (box-spline),
 F funkcją kawałkami wielomianową o zwartym nośniku (może być dystrybucja),
funkcja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dostatecznie gładka i regularna.

Potrzebujemy następujących oznaczeń: jednomiany

$$\square^\beta(x) = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}, \quad x = (x_1, x_2), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{N}^2. \quad (2)$$

Zakładamy, że operator Q zachowuje wielomiany do stopnia $\varrho - 1$, czyli jeśli $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq \varrho - 1$, to

$$Q(\square^\beta) = \square^\beta. \quad (3)$$

(Z. Ciesielskiego, W. Dahmen i C.A. Micchelli operatory dodatnie $\varrho = 2$)

Twierdzenie o nasyceniu (typu Voronovskaya)

Definicja

Zdefiniujmy rodzinę operatorów Q_h for $h > 0$,

$$Q_h = \sigma_h \circ Q \circ \sigma_{1/h}, \quad (4)$$

gdzie

$$\sigma_h f(x) = f(x_1/h, x_2/h), \quad x = (x_1, x_2)$$

Twierdzenie

Jeśli operatory spełniają powyższe założenia, to dla $1 \leq p \leq \infty$ oraz funkcji f dostatecznie gładkiej i regularnej (jeśli F delta Diraca, to dodatkowo $p \cdot \varrho > d = 2$)

$$\|Q_h f - f\|_p \leq C_p h^\varrho |f|_{p,\varrho}.$$

Co można powiedzieć o zbieżności w normie L^p , $1 \leq p \leq \infty$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q_h f - f}{h^\varrho} = ???$$

Odpowiedź dlaczego różne operatory zbiegają do tej samej granicy

Twierdzenie

Jeśli dla $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq \varrho$ operator Q nieco zniekształca wielomiany stopnia ϱ

$$Q(\square^\beta) = \square^\beta + A_\beta,$$

gdzie istnieje przynajmniej jedna stała $A_\beta \neq 0$, to istnieje granica w normie L^p , $1 \leq p \leq \infty$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q_h f - f}{h^\varrho} = \sum_{|\beta|=\varrho} \frac{1}{\beta!} A_\beta D^\beta f,$$

$$D^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}}$$

CO ZROBIĆ, JEŚLI OPERATOR ZNIEKSZĄŁCA MOCNO WIELOMIANY??

SEN

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{Q_h f - f}{h^e} \right\|_p = \text{????},$$

zaś granica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q_h f - f}{h^e} =$$

istnieje dla słabej zbieżności w L^p , $1 \leq p < \infty$. (rachunki M. Beśka i KD $p = 2$)

Twierdzenie Fejera Orlicza Mazura

Dowód dla $p = 2$ metody transformaty Fouriera. Jak dla dowolnego p

Twierdzenie

Dla każdego $|\beta| = \varrho$ funkcja

$$h_\beta(x) = Q([\beta])(x) - [\beta](x)$$

jest Z^2 okresowa, czyli dla każdego $\alpha \in Z^2$

$$h_\beta(x - \alpha) = h_\beta(x).$$

Twierdzenie

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{Q_h f - f}{h^\varrho} \right\|_p^p = \int_{R^2} \left(\int_{[0,1]^2} \left| \sum_{|\beta|=\varrho} \frac{1}{\beta!} D^\beta f(t) h_\beta(x) \right|^p dx \right) dt,$$

Odpowiedzi na pytania których nie było

Twierdzenie

$$\left\| \left\| \frac{Q_h f - f}{h^e} \right\|_p^p - \int_{R^2} \left(\int_{[0,1]^2} \left| \sum_{|\beta|=e} \frac{1}{\beta!} D^\beta f(t) h_\beta(x) \right|^p dx \right) dt \right\| \leq Ch$$

Twierdzenie

$$\left\| \left\| \frac{Q_h Q_h^1 f - Q_h^1 f}{h^e} \right\|_p^p - \int_{R^2} \left(\int_{[0,1]^2} \left| \sum_{|\beta|=e} \frac{1}{\beta!} D^\beta f(t) h_\beta(x) \right|^p dx \right) dt \right\| \leq Ch$$

Twierdzenie to jest użyteczne w badaniach parametru okna w estymacji gęstości.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ