

Wprowadzenie

Przez R^n oznaczać będziemy n -wymiarową przestrzeń Euklidesową. Iloczyn skalarny dla pary wektorów

$$x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$$

będziemy oznaczać przez

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n.$$

Ponadto

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}.$$

Jeśli dana jest rodzina V złożona z wektorów $v_1, \dots, v_s \in R^n$, to podprzestrzeń rozpiętą przez te wektory oznaczymy przez

$$\text{span}\{V\} = \left\{ \sum_{j=1}^s a_j v_j : a_j \in R, v_j \in V \right\}.$$

Dla danej macierzy \mathbf{A} przez \mathbf{A}^T oznaczymy macierz transponowaną. Macierz \mathbf{A} będziemy czasem utożsamiać z odwzorowaniem

$$A : R^n \mapsto R^n,$$

które każdemu wektorowi x przyporządkuje wektor Ax . Przez zapis Ax rozumiemy iloczyn macierzy A i macierzy kolumnowej $x = (x_1, \dots, x_n)^T$. Przez A^{-1} będziemy oznaczać macierz (odwzorowanie) odwrotną.

Kula o środku w punkcie $x \in R^n$ i promieniu r dana jest wzorem

$$K(x, r) = \{x \in R^n : \|x\| < r\}.$$

Każdą kulę $K(x, r)$ o dowolnym promieniu $r > 0$ nazywamy **otoczeniem** punktu x . Niech E będzie dowolnym niepustym podzbiorem R^n . Punkt a nazywamy **punktem skupienia** zbioru E , jeśli każde otoczenie punktu a zawiera punkty ze zbioru E , różne od punktu a . Zbiór E jest **domknięty**, gdy zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. Zbiór E jest **otwarty**, jeśli $R^n \setminus E$ jest domknięty. Zbiór E jest **ograniczony**, gdy jest zawarty w pewnej kuli $K(0, r)$. Zbiór E jest **zwarty**, jeżeli jest ograniczony i domknięty. Załóżmy, że zbiór $E \neq R^n$ i $E \neq \emptyset$, wówczas x jest **punktem brzegowym** zbioru E , jeśli w każdym otoczeniu punktu x są punkty zbiorów E i $R^n \setminus E$.

Jeżeli $x \in E$ nie jest punktem skupienia zbioru E , to jest on **punktem izolowanym**. **Brzegiem** zbioru E nazywamy zbiór wszystkich jego punktów brzegowych i oznaczamy przez

$$\partial E.$$

Domknięciem zbioru E nazywamy zbiór złożony z punktów zbioru E oraz ∂E . Wnętrzem zbioru E nazywamy zbiór

$$E \setminus \partial E.$$

Zbiór E jest **wypukły**, jeśli dowolne dwa punkty ze zbioru E można połączyć odcinkiem zawartym w zbiorze E . Translację zbioru E o wektor v oznaczamy przez

$$E + v = \{ u + v : u \in E \}.$$

Suma zbiorów E_1, E_2 dana jest następującym wzorem

$$E_1 + E_2 = \{ a + b : a \in E_1, b \in E_2 \}.$$

Hiperpłaszczyzną w R^n nazywamy zbiór punktów spełniający warunek

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} = 0,$$

gdzie $a_i \in R$ dla $i = 1, \dots, n$ i co najmniej jeden z parametrów jest różny od zera. **Wielościanem** nazywamy zbiór zwarty, ograniczony hiperpłaszczyznami. Przez $\#A$ oznaczać będziemy liczbę elementów zbioru A , o ile jest ona skończona.

Przez Z^n oznaczamy kratę całkowitą. Ponadto dla

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in Z^n, \quad \text{gdzie } \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Pochodne stopnia $|\alpha|$ oznaczamy przez

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, \dots, D_d^{\alpha_n},$$

gdzie

$$D_j^{\alpha_j} = \partial^{\alpha_j} / \partial x_j^{\alpha_j}.$$

Niech $\beta \leq \alpha$ oznacza, że

$$\beta_j \leq \alpha_j$$

dla wszystkich $j = 1, \dots, n$. Wielomian (jednomian) x^α stopnia $|\alpha|$ jest postaci

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Przestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej k oznaczamy przez Π_k . Wielomiany

$$\{x^\alpha : |\alpha| \leq k\}$$

stanowią **bazę** w Π_k , tzn. dowolny wielomian p stopnia k ma jednoznaczne przedstawienie

$$p(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha.$$

Stopień wielomianu p oznaczamy przez $\deg p$. Wielomian p jest **jednorodny** stopnia k , jeżeli dla dowolnego $t \in R$ oraz $x \in R^n$

$$p(tx) = t^k p(x).$$

Zbiór funkcji ciągłych w zbiorze otwartym Ω oznaczamy przez $C(\Omega)$. Zbiór funkcji k -krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły oznaczamy przez $C^k(\Omega)$, tzn. wszystkie pochodne cząstkowe do k -tego rzędu są ciągłe.

Bez zmniejszenia ogólności, możemy założyć, że **wszystkie występujące tutaj funkcje są lokalnie całkowalne w sensie Riemanna**, np. funkcje ograniczone, których nieciągłości leżą na skończonej liczbie powierzchni o objętości zero [F, tom 3]. Z elementarnych własności całki Riemanna [Ru1] wynika, że również funkcje $|f|^p$ dla $1 \leq p < \infty$ są lokalnie całkowalne w sensie Riemanna. Zatem możemy rozpatrywać całki niewłaściwe:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \left(\int_{R^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} := \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-N}^N \int_{-N}^N \cdots \int_{-N}^N |f(x_1, \dots, x_n)|^p dx_1 \dots dx_n \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Funkcję $f : R^n \mapsto R$ spełniającą warunek

$$\|f\|_p < \infty$$

nazywamy **p-całkowalną**, ($1 \leq p < \infty$), $f \in L^p(R^n)$. W przypadku $p = \infty$ będziemy rozważać funkcje ciągłe oraz stosować oznaczenia:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in R^n} |f(x)|,$$

$$\|f\|_\infty(\Omega) = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Zbiór $L^p(\mathbb{R}^n)$ utożsamiamy z przestrzenią klas równoważności zadaną przez następującą relację: dowolne dwie funkcje p-całkowalne f, g są w relacji, jeśli dla każdej funkcji F ciągłej o zwartym nośniku:

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)g(x) dx.$$

Właściwą definicję przestrzeni $L^p(\mathbb{R}^n)$ (funkcji p-całkowalnych w sensie Lebesgue'a) można znaleźć w książce [Ru2]. Jednakże nie tracimy przy powyższym założeniu na ogólności, gdyż nasza klasa funkcji jest dobrze reprezentowalna (gęsta) w przestrzeni funkcji całkowanych w sensie Lebesgue'a. Ponieważ zazwyczaj rozważane będą funkcje o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, stąd iloczyn skalarny (o ile istnieje) dwóch funkcji f, g definiujemy formułą

$$(f, g)_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx.$$

W pracy będziemy korzystać z **nierówności Höldera**, por. [Ru2].

Niech $1 \leq p \leq \infty$ oraz niech p i q będą za sobą sprzężone,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

wówczas dla $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ oraz $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ zachodzi następujące oszacowanie

$$(A I) \quad |(f, g)_{\mathbb{R}^n}| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Potrzebować będziemy również **nierówności Minkowskiego**.

Niech $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, wówczas

$$(A II) \quad \|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Dla ciągu liczb rzeczywistych $a = \{a_\alpha\}$ niech $l^p(\mathbb{Z}^n)$ oznacza zbiór tych ciągów liczbowych, dla których

$$\|a\|_{l^p} = \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |a_\alpha|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Będziemy korzystać również z dyskretnej wersji **nierówności Jensena**.

Niech

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |A_\alpha| = 1,$$

wówczas dla $1 \leq p \leq \infty$

$$(A III) \quad \left| \sum_{\alpha \in Z^n} a_\alpha A_\alpha \right|^p \leq \sum_{\alpha \in Z^n} |a_\alpha|^p |A_\alpha|.$$

Nośnikiem funkcji f nazywamy zbiór, który powstaje w wyniku domknięcia zbioru

$$\{f(x) \neq 0 : x \in R^n\}.$$

Oznaczamy ten zbiór przez

$$\text{supp} f.$$

Transformata Fouriera określona jest wzorem

$$\mathcal{F}f(x) = \hat{f}(x) = \int_{R^n} f(t) e^{-2\pi i t \cdot x} dt.$$

Odwrotna transformata Fouriera dana jest wzorem

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \int_{R^n} f(t) e^{2\pi i t \cdot x} dt.$$

Splotem dwóch funkcji f, g nazywamy funkcję

$$(f * g)(x) = \int_{R^n} f(y) g(x - y) dy.$$

Dalej będą potrzebne następujące lematy:

Lemat A 1

Załóżmy, że dane są dwie funkcje g_1 i g_2 określone na R^n tak, że:

- 1) nośniki obu funkcji są równe pewnemu wielościanowi Q ,
- 2) są ciągłe w zbiorze Q ,
- 3) dla każdej funkcji ciągłej f o zwartym nośniku

$$\int_{R^n} f(x)(g_1(x) - g_2(x)) dx = 0.$$

Wówczas

$$g_1(x) = g_2(x) \quad \text{dla każdego } x \in R^n.$$

Lemat A 2 (Wzór Poissona)

Załóżmy, że funkcje f, \hat{f} są ciągłe oraz dla pewnego $\delta > 0$

$$|f(x)| \leq c(1 + |x|)^{-n-\delta} \quad x \in R^n$$

i

$$|\widehat{f}(x)| \leq c(1 + |x|)^{-n-\delta} \quad x \in R^n.$$

Wówczas

$$\sum_{\alpha \in Z^n} f(x - \alpha) = \sum_{\alpha \in Z^n} \widehat{f}(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x}$$

dla każdego $x \in R^n$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy w wersji uproszczonej, czyli dla funkcji f o zwartym nośniku spełniającej kryterium Lipschitza, tj. takiej, dla której istnieje stała dodatnia L , że dla wszystkich $x, y \in R^n$

$$|f(x) - f(y)| < L\|x - y\|.$$

Założmy, że f spełnia warunek Lipschitza. Wówczas funkcja okresowa

$$\sum_{\alpha \in Z^n} f(x - \alpha)$$

również spełnia kryterium Lipschitza. Zatem jej szereg Fouriera jest zbieżny w każdym punkcie, por. [F, tom 3], czyli

$$\sum_{\alpha \in Z^n} f(x - \alpha) = \sum_{\beta \in Z^n} a(\beta) e^{2\pi i \beta \cdot x}.$$

Współczynniki rozwinięcia Fouriera są równe

$$a(\beta) = \int_{[0,1]^n} \left(\sum_{\alpha \in Z^n} f(x - \alpha) \right) e^{2\pi i \beta \cdot x} dx = \int_{R^n} f(x) e^{2\pi i \beta \cdot x} dx = \widehat{f}(\beta),$$

co kończy dowód.

◇

Udowodnimy również wersję wzoru Poissona (por. [JM]) dla funkcji

$$f = \widehat{\psi} \widehat{\phi}.$$

Lemat A 3

Założmy, że dane są dwie funkcje ϕ, ψ ograniczone i o zwartym nośniku. Wówczas

$$(**) \quad \sum_{\alpha \in Z^n} \widehat{\psi}(x + \alpha) \widehat{\phi}(x + \alpha) = \sum_{\alpha \in Z^n} (\phi * \psi)(\alpha) e^{-2\pi i \alpha \cdot x}$$

dla każdego $x \in R^n$.

Dowód. Ustalmy x . Ponieważ ψ oraz ϕ są funkcjami o zwartym nośniku, zatem wyrażenie po prawej stronie (**) jest wielomianem trygonometrycznym. Oznaczmy ten wielomian przez P . Zatem

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) \psi(\alpha - y) e^{-2\pi i x \cdot \alpha} dy = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} \phi(y + \beta) \psi(\alpha - y - \beta) e^{-2\pi i x \cdot \alpha} dy = \\
&= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} \phi(y + \beta) e^{-2\pi i x \cdot (y + \beta)} \psi(\alpha - y - \beta) e^{-2\pi i x \cdot (\alpha - y - \beta)} dy = \\
&= \int_{[0,1]^n} \phi_x(y) \overline{\psi_x(y)} dy,
\end{aligned}$$

gdzie

$$\psi_x(y) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \psi(\alpha - y) e^{2\pi i x \cdot (\alpha - y)}$$

oraz

$$\phi_x(y) = \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} \phi(\beta + y) e^{-2\pi i x \cdot (\beta + y)}.$$

Obie funkcje można rozwinąć w szereg Fouriera:

$$\phi_x(y) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_{(\phi_x)}(\alpha) e^{2\pi i y \cdot \alpha},$$

gdzie

$$\begin{aligned}
a_{(\phi_x)} &= \int_{[0,1]^n} \phi_x(y) e^{-2\pi i \alpha \cdot y} dy = \\
&= \int_{[0,1]^n} \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^n} \phi(\beta + y) e^{-2\pi i x \cdot (\beta + y)} e^{-2\pi i \alpha \cdot y} dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-2\pi i y \cdot (x + \alpha)} dy = \widehat{\phi}(x + \alpha).
\end{aligned}$$

Analogicznie dla funkcji ψ_x . Z tożsamości Parsevala dla szeregów trygonometrycznych otrzymujemy

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} a_{(\phi_x)}(\alpha) \overline{a_{(\psi_x)}(\alpha)},$$

co daje (**).

◇

Lemat A 4

Dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zachodzi następująca tożsamość: dla dowolnej funkcji ciągłej G o zwartym nośniku

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(x)((\mathcal{F}^{-1}\widehat{f})(x) - f(x)) dx = 0.$$

Ponadto, jeśli $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, to

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$$

oraz dla $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}(f(\cdot - \xi))(x) = \mathcal{F}(f)(x)e^{-2\pi i\xi \cdot x}$$

a także dla $t > 0$

$$\mathcal{F}(f(t\cdot))(x) = 1/t^n \mathcal{F}(f)(x/t).$$

Dla $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zachodzi tożsamość Parsewala

$$(f, g)_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{g}(y)} dy.$$

Zobacz [Ma], [S], [SW].

1. Pudełkowa funkcja gięta

Definicja 1.1

Macierz \mathbf{V} wymiaru $n \times s$ o współczynnikach całkowitych nazywamy **dopuszczalną**, jeśli rząd macierzy jest równy n ,

$$(1.2) \quad R(\mathbf{V}) = n$$

oraz żadna z kolumn tej macierzy nie zawiera samych zer.

Niech V oznacza rodzinę wektorów v_1, v_2, \dots, v_s utworzonych z kolumn macierzy \mathbf{V} . Wektory te są niezerowe oraz należą do kraty całkowitej Z^n . Warunek (1.2) jest równoważny ze stwierdzeniem, że wektory te rozpinają przestrzeń R^n ,

$$\text{span}\{V\} = R^n.$$

Rodzinę V o takich własnościach nazywamy **dopuszczalną**. Każda taka rodzina wyznacza nam macierz dopuszczalną \mathbf{V} .

Niech $\langle V \rangle$ oznacza domkniętą **powłokę wypukłą** zbioru wszystkich możliwych sum wektorów z V

$$\langle V \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^s t_j v_j : 0 \leq t_j \leq 1, j = 1, \dots, s \right\}.$$

Z postaci macierzy \mathbf{V} wynika, że

$$\langle V \rangle = \mathbf{V}([0; 1]^s).$$

Przykład 1.3

Macierz

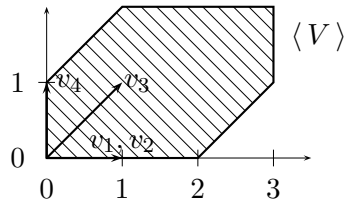
$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jest dopuszczalna. Rodzina V jest utworzona przez wektory:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zbiór

$$\langle V \rangle = \{(t_1 + t_2 + t_3, t_3 + t_4), 0 \leq t_j \leq 1, j = 1, 2, 3, 4\},$$



Powłoka wypukła

Niech funkcja $\chi_{\langle V \rangle}$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $\langle V \rangle$, tzn.

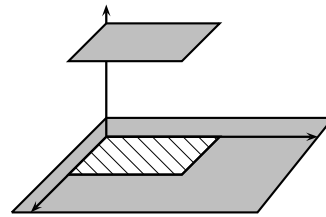
$$\chi_{\langle V \rangle}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \langle V \rangle \\ 0 & x \notin \langle V \rangle. \end{cases}$$

Przykład 1.4

Niech

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wówczas $\langle V \rangle = [0; 1]^2$, zaś $\chi_{\langle V \rangle}$ jest funkcją charakterystyczną kwadratu.



Funkcja charakterystyczna kwadratu

Podamy rekurencyjną definicję pudełkowej funkcji giętej.

Definicja 1.5

Pudełkową funkcją giętą określoną względem rodziny wektorów V nazywamy funkcję, którą oznaczają będziemy przez $B(\cdot|V)$ lub B_V , spełniającą następujący warunek

$$B(x|V) = \begin{cases} \frac{1}{\det \mathbf{V}} \chi_{\langle V \rangle}(x) & n = s \\ \int_0^1 B(x - tv_j|V \setminus v_j) dt & s > n, \end{cases}$$

gdzie wektor v_j jest tak dobrany, że rodzina V po usunięciu wektora v_j , tj. $V \setminus \{v_j\}$ jest dopuszczalna.

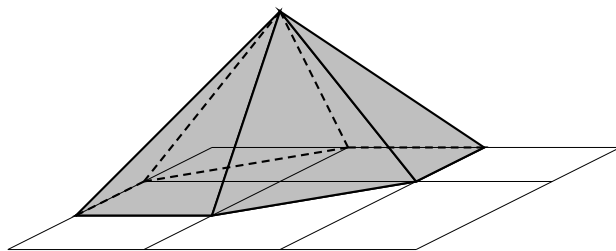
Proces uśredniania numerycznego odtwarzający pudełkową funkcję giętą według wzoru z definicji (1.5) zaprezentowany jest w rozdziale 6.

Przykład 1.6

Jeśli

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

to funkcja B_V jest w literaturze angielskiej określana jako *hat function*.

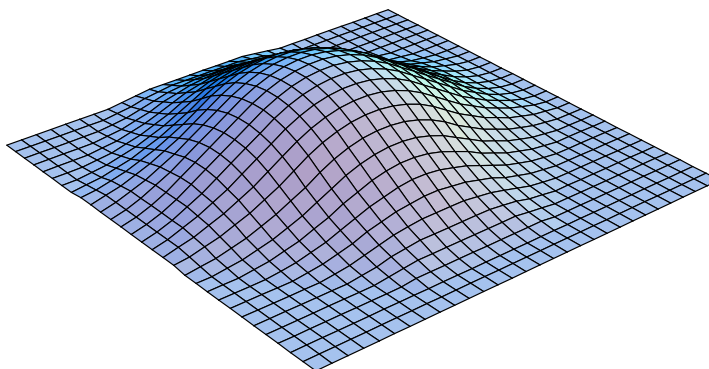


Funkcja kapelusz

Jeśli

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

to B_V jest w literaturze angielskiej określana jako *Zwart-Powell element*.



Funkcja Zwart-Powella

Z twierdzenia 1.7 wynika, że pudełkowa funkcja gięta nie zależy od kolejności, w jakiej dobieramy wektory.

Twierdzenie 1.7

Dla każdej funkcji ciągłej $f \in C(\mathbb{R}^n)$ zachodzi

$$(1.8) \quad \int_{\mathbb{R}^n} f(x) B_V(x) dx = \int_{[0;1]^s} f(\mathbf{V}u) du, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ u_s \end{pmatrix},$$

$du = du_1 \dots du_s$. Transformata Fouriera funkcji B_V dana jest wzorem

$$(1.9) \quad \widehat{B_V}(\xi) = \prod_{j=1}^s \frac{1 - e^{-2\pi i \xi \cdot v_j}}{2\pi i \xi \cdot v_j}.$$

Dowód. Dowód jest indukcyjny względem s . Dla $s = n$ macierz \mathbf{V} jest kwadratowa, zatem z definicji

$$\int_{R^n} f(x) B_V(x) dx = \int_{\langle V \rangle} f(x) \frac{\chi_{\langle V \rangle}(x)}{\det \mathbf{V}} dx.$$

Ponieważ $\mathbf{V}([0; 1]^n) = \langle V \rangle$, stąd z twierdzenia o zamianie zmiennych w całce

$$\int_{\langle V \rangle} f(x) \frac{\chi_{\langle V \rangle}(x)}{\det \mathbf{V}} dx = \int_{[0; 1]^n} f(\mathbf{V}u) du.$$

Założmy, że (1.8) jest prawdziwe dla $s \geq n$. Pokażemy, że jest prawdziwe dla $\#V = s + 1$. Ponieważ $s + 1 > n$, więc istnieje wektor v_j taki, że

$$\text{span}\{V \setminus \{v_j\}\} = R^n.$$

Wówczas z definicji oraz twierdzenia Fubniego

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f(x) B(x|V) dx &= \int_0^1 \int_{R^n} f(x) B(x - tv_j|V \setminus v_j) dx dt = \\ &= \int_0^1 \int_{R^n} f(x + tv_j) B(x|V \setminus v_j) dx dt. \end{aligned}$$

Niech \mathbf{V}_j oznacza macierz, która powstała z macierzy \mathbf{V} po usunięciu j -tej kolumny. Z założenia indukcyjnego otrzymamy, że

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f(x) B(x|V) dx &= \int_0^1 \int_{[0; 1]^s} f(\mathbf{V}_j u + tv_j) du dt = \\ &= \int_0^1 \int_{[0; 1]^s} f(u_1 v_1 + \dots + u_{j-1} v_{j-1} + u_j v_{j+1} + \dots + u_s v_{s+1} + tv_j) du dt = \\ &= \int_{[0; 1]^{s+1}} f(\mathbf{V}y) dy. \end{aligned}$$

Jeśli teraz dla każdego wektora $\xi \in R^n$ utworzymy funkcję eksponencjalną

$$f_\xi(x) = e^{-2\pi i \xi \cdot x},$$

to podstawiając do (1.8) otrzymamy

$$\begin{aligned}\widehat{B}_V(\xi) &= \int_{[0;1]^s} e^{-2\pi i \xi \cdot \mathbf{V}u} du = \int_{[0;1]^s} e^{-2\pi i \xi \cdot (u_1 v_1 + \dots + u_s v_s)} du = \\ &= \prod_{j=1}^s \int_{[0;1]} e^{-2\pi i \xi \cdot u_j v_j} du_j = \prod_{j=1}^s \frac{1 - e^{-2\pi i \xi \cdot v_j}}{2\pi i \xi \cdot v_j}.\end{aligned}$$

◇

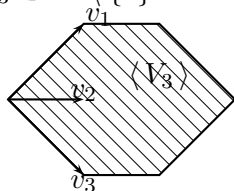
Lemat 1.10

Funkcja B_V jest nieciągła co najwyżej na brzegu zbioru $\langle V \rangle$, który jest jej nośnikiem.

Dowód. Indukcyjny szkic dowodu, względem liczby wektorów, przeprowadzimy dla wymiaru $n = 2$. Niech $V_2 = \{v_1, v_2\}$ będzie rodziną dopuszczalną w Z^2 . Tworzymy rodzinę

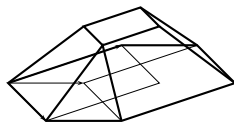
$$V_3 = \{v_1, v_2, v_3\},$$

gdzie $v_3 \in Z^2 \setminus \{0\}$. Możliwe są dwa przypadki.

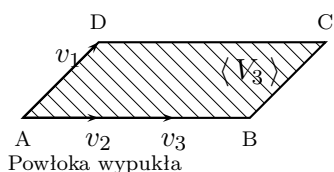


Powłoka wypukła

1) Wektor v_3 nie leży na żadnej z prostych wyznaczonych przez wektory v_1 i v_2 . Pudełkowa funkcja gięta $B(\cdot|V_3)$ jest funkcją ciągłą na całej płaszczyźnie R^2 . Nośnikiem funkcji jest sześciokąt $\langle V_3 \rangle$.



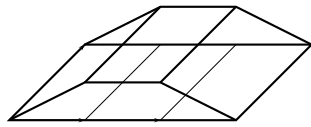
Pudełkowa funkcja gięta



Powłoka wypukła

2) Wektor v_3 leży na jednej z prostych wyznaczonych przez wektory v_1 i v_2 , np. na prostej wyznaczonej przez v_2 . Nośnikiem funkcji $B(\cdot|V_3)$ jest równoległobok

$$ABCD = \langle V_3 \rangle.$$



Pudełkowa funkcja gięta

Pudełkowa funkcja gięta $B(\cdot|V_3)$ jest nieciągła wzdłuż boków AB i CD równoległoboku.

Tworzymy rodzinę

$$V_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\},$$

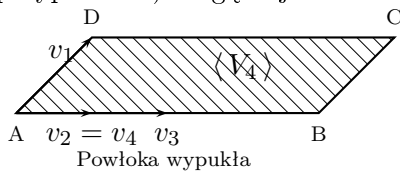
gdzie $v_4 \in Z^2 \setminus \{0\}$. W przypadku 1) dalszy proces uśredniania nie „psuje” ciągłości funkcji na R^2 , mianowicie z ciągłości i liniowości funkcji $B(\cdot|V_3)$, wynika że istnieje stała L taka, że

$$|B(x|V_3) - B(y|V_3)| \leq L\|x - y\|.$$

Zatem

$$|B(x|V_4) - B(y|V_4)| \leq \int_0^1 |B(x - tv_4|V_3) - B(y - tv_4|V_3)| dt \leq L\|x - y\|.$$

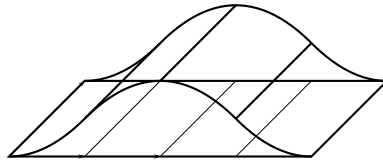
W przypadku 2) mogą zajść dwie możliwości:



– wektor v_4 leży na prostej wyznaczonej przez wektor v_2 . Nośnikiem funkcji $B(\cdot|V_4)$ jest równoległobok

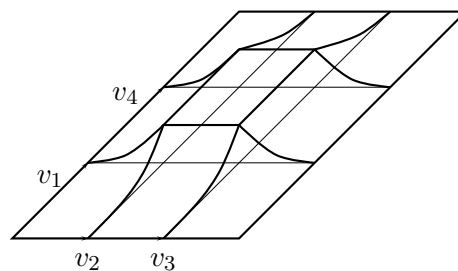
$$\langle V_4 \rangle = ABCD.$$

Pudełkowa funkcja gięta jest nieciągła wzdłuż jego boków AB i CD ;



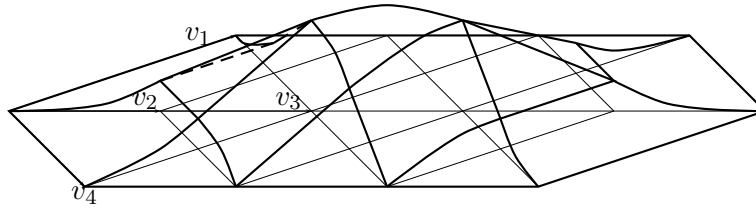
Pudełkowa funkcja gięta

– wektor v_4 nie leży na prostej wyznaczonej przez wektor v_2 . Na przykład



Pudełkowa funkcja gięta

lub



Pudełkowa funkcja gięta

Funkcja $B(\cdot|V_4)$ jest ciągła na całej płaszczyźnie.

Zakładamy, że $V_{n-1} = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ oraz:

- albo funkcja $B(\cdot|V_{n-1})$ jest ciągła na całej płaszczyźnie,
- albo wszystkie wektory

$$v_2, v_3, v_4, \dots, v_{n-1}$$

leżą na jednej prostej. Tworzymy rodzinę

$$V_n = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n\}.$$

W pierwszym przypadku uśrednianie w kierunku wektora v_n nie "psuje" ciągłości funkcji (por. wyżej), zatem funkcja $B(\cdot|V_n)$ jest ciągła w R^2 . W drugim przypadku są dwie możliwości:

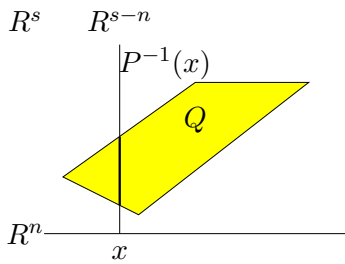
– wektor v_n leży na prostej wyznaczonej przez wektor v_2 . Wówczas nośnikiem funkcji $B(\cdot|V_n)$ jest równoległobok $\langle V_n \rangle$. Funkcja jest nieciągła wzdłuż jego dwóch boków;

– wektor v_n nie leży na tej prostej. Wówczas funkcja $B(\cdot|V_n)$ jest ciągła na całej płaszczyźnie.

◇

Interpretacja geometryczna

Zaprezentujemy interpretację geometryczną pudełkowej funkcji giętej. W tym celu podamy ogólniejszą konstrukcję funkcji giętych (będących kawałkami wielomianami), pochodzącą od C. de Boora oraz Micchelliego, por. [BH], którzy podali definicję wielościennych funkcji giętych. Wprowadzimy oznaczenia. Niech vol_k oznacza k -wymiarową objętość.



Konstrukcja wielościennnej funkcji giętej

Dla $n < s$, R^n będziemy traktować jako podprzestrzeń R^s taką, że

$$R^s = R^n \oplus R^{s-n}.$$

Przez P oznaczać będziemy rzut ortogonalny z R^s na R^n , tj.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_s) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Wówczas $P^{-1}(x)$ oznacza przeciwobraz punktu x , który jest hiperpłaszczyzną $s - n$ wymiarową w R^s .

Definicja 1.11

Niech $Q \subset R^s$ będzie wypukłym wielościaniem o niezerowej objętości. Wówczas **wielościenną funkcją giętą** odpowiadającą Q (Q-funkcją) nazywamy funkcję

$$B(x|Q) = \text{vol}_{s-n}(Q \cap P^{-1}(x)), \quad x \in R^n.$$

Twierdzenie 1.12

Dla dowolnej funkcji ciągłej f

$$(1.13) \quad \int_{R^n} B(x|Q)f(x) dx = \int_Q f(Pu) du,$$

gdzie du oznacza element objętości na Q .

Dowód. Niech f będzie dowolną funkcją ciągłą. Wówczas z tw. Fubinięgo o zamianie kolejności całkowania

$$\begin{aligned} \int_Q f(Pu) du &= \int_{P(Q)} f(x) \int_{Q \cap P^{-1}(x)} du_{n+1} \dots du_s dx_1 \dots dx_n = \\ &= \int_{P(Q)} f(x) \text{vol}_{s-n}(Q \cap P^{-1}(x)) dx = \int_{R^n} B(x|Q)f(x) dx. \end{aligned}$$

◇

Bez zmniejszenia ogólności założmy, że wektory rodziny V są tak uporządkowane, że

$$\text{span}\{v_1, \dots, v_n\} = R^n.$$

Rozszerzmy macierz \mathbf{V} do macierzy kwadratowej \mathbf{A} o wymiarze $s \times s$, dopisując macierz zerową oraz macierz skalarną λI o wymiarze $(s - n) \times (s - n)$, tzn.

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \dots & v_n & v_{n+1} & \dots & v_s \\ & & 0 & & & \lambda I \end{array} \right).$$

Parametr λ tak dobieramy, by $\det \mathbf{A} = 1$.

Twierdzenie 1.14

Niech wielościan $Q = \mathbf{A}([0; 1]^s)$. Wówczas

$$B(x|V) = B(x|Q) \quad x \in R^n.$$

Dowód. Weźmy dowolną funkcję ciągłą f . Stosując twierdzenie o zmiianie zmiennych w całce, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_Q f(Pu) du &= \int_{\mathbf{A}([0;1]^s)} f(Pu) du = \\ &= \int_{[0;1]^s} f(P\mathbf{A}u) du = \int_{[0;1]^s} f(\mathbf{V}u) du. \end{aligned}$$

Z (1.8) oraz (1.13) wynika, że dla dowolnej funkcji ciągłej f

$$\int_{R^n} f(x)[B(x|Q) - B(x|V)] dx = 0.$$

Obrazem kostki $[0; 1]^n$ w odwzorowaniu \mathbf{A} jest równoległoscian. Wartość funkcji $B(x|Q)$ jest równa objętości obszaru $s - n$ wymiarowego: przekroju hiperpłaszczyzny $P^{-1}(x)$ z równoległoscianem Q . Ciągłość tak zdefiniowanej funkcji w zbiorze $\langle V \rangle = P(Q)$ można uzasadnić stosując ten sam typ rozumowania co w lemacie 1.10. Z lematu A 1 wnosimy, że

$$B(x|Q) = B(x|V).$$

◇

Definicja 1.15

Niech $n > 1$. Siatką zbioru $\langle V \rangle$ nazywamy zbiór

$$G_V = \bigcup_{i_1 < \dots < i_{n-1}} \left(\langle v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-1}} \rangle + \sum_{j \neq i_1, \dots, i_{n-1}}^s \varepsilon_j v_j \right),$$

gdzie $\varepsilon_j = 1$ lub $\varepsilon_j = 0$.

Jeśli $n = 1$, to

$$G_V = \left\{ \sum_{j=1}^s \varepsilon_j v_j, \quad \varepsilon_j = 1 \quad \text{lub} \quad \varepsilon_j = 0 \right\}.$$

Interpretacja zbioru G_V jest następująca: jeśli

$$B(\cdot|V) = B(\cdot|Q),$$

to G_V jest rzutem $n - 1$ wymiarowych ścian wielościanu $Q \subset R^s$.

Przykład 1.16

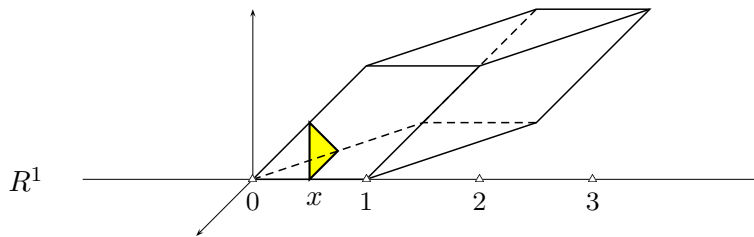
Dana jest macierz dopuszczalna

$$\mathbf{E}_3 = (1, 1, 1).$$

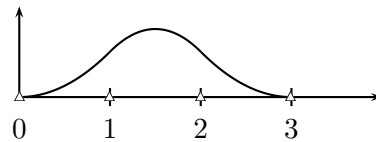
Wówczas $\langle E_3 \rangle = [0; 3]$,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rzut ortogonalny zbioru wierzchołków równoległoscianu $Q = A([0, 1]^3)$ składa się z czterech punktów $G_V = \{0, 1, 2, 3\}$.



Wartość wielościennej funkcji giętej jest równa polu trójkąta



Funkcja $B(\cdot|E_3)$

Przykład 1.17

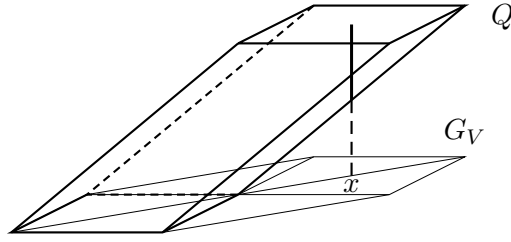
Niech

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wówczas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zbiór Q jest równoległościaniem, zaś G_V jest zbiorem rzutów krawędzi Q .



Wartość funkcji jest równa długości odcinka

Funkcja $B(\cdot|V)$ jest przedstawiona w przykładzie 1.6.

Przez P_1 oznaczajmy rzut ortogonalny z R^{n+1} na R^n ,

$$P_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Twierdzenie 1.18

Załóżmy, że dana jest rodzina dopuszczalna $W \subset Z^{n+1}$ taka, że dla dowolnego wektora w z W

$$P_1 w \neq 0.$$

Wówczas rodzina $V \subset Z^n$, powstała z wektorów $P_1 w$, $w \in W$, jest dopuszczalna. Ponadto

$$\int_R B((x, x_{n+1})|W) dx_{n+1} = B(x|V).$$

DOWÓD. Macierz \mathbf{V} powstaje z macierzy \mathbf{W} przez wykreślenie ostatniego wiersza, stąd jej rząd jest maksymalny. Z założenia nie zawiera ona kolumn zerowych, zatem jest dopuszczalna. Niech f będzie dowolną funkcją ciągłą określoną na R^n . Zdefiniujmy funkcję ciągłą na R^{n+1} wzorem:

$$\tilde{f}(y) = f(P_1 y) \quad y \in R^{n+1}.$$

Stąd

$$\int_{R^n} f(x) \int_R B((x, x_{n+1})|W) dx_{n+1} dx = \int_{R^{n+1}} \tilde{f}(y) B(y|W) dy.$$

Korzystając ze wzoru (1.8) otrzymujemy przy $N = \#W$

$$\int_{R^{n+1}} \tilde{f}(y) B(y|W) dy = \int_{[0,1]^N} f(P_1(\mathbf{W}u)) du =$$

$$= \int_{[0;1]^N} f(\mathbf{V}u) du = \int_{R^n} f(x)B(x|V) dx.$$

Ponieważ

$$\langle V \rangle = P_1(\langle W \rangle),$$

więc z lematu A 1 wynika już teza naszego twierdzenia.

◇

2. Własności pudełkowych funkcji giętych

Jeśli \mathbf{C} jest nieosobliwą macierzą kwadratową stopnia n o współczynnikach całkowitych, zaś \mathbf{V} macierzą dopuszczalną, to ich iloczyn, tj. \mathbf{CV} jest macierzą dopuszczalną. Odpowiadającą jej rodzinę oznaczamy przez \mathbf{CV} .

Twierdzenie 2.1

Niech \mathbf{C} będzie macierzą nieosobliwą stopnia n o współczynnikach całkowitych. Wówczas

$$(2.2) \quad B(x|\mathbf{CV}) = \frac{1}{\det \mathbf{C}} B(\mathbf{C}^{-1}x|V) \quad x \in R^n.$$

Dowód. Niech $f \in C(R^n)$. Korzystając dwukrotnie z (1.8) odpowiednio dla funkcji $f(x)$ i $f(\mathbf{C}x)$ oraz z twierdzenia o zamianie zmiennych w całce, otrzymamy

$$\begin{aligned} \int_{R^n} f(x)B(x|\mathbf{CV}) dx &= \int_{[0;1]^s} f(\mathbf{CV}u) du = \\ &= \int_{R^n} f(\mathbf{C}x)B(x|V) dx = \int_{R^n} f(x) \frac{B(\mathbf{C}^{-1}x|V)}{\det \mathbf{C}} dx. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\langle \mathbf{CV} \rangle = \mathbf{C}(\langle V \rangle),$$

więc z lematu A 1 otrzymujemy

$$B(x|\mathbf{CV}) = \frac{1}{\det \mathbf{C}} B(\mathbf{C}^{-1}x|V).$$

◇

Przez \mathbf{E}_k oznaczmy macierz dopuszczalną złożoną z k jedynek, tj.

$$(2.3) \quad \mathbf{E}_k = \left(\underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_k \right)$$

oraz

$$(2.4) \quad \mathbf{E}_{(k_1, k_2)} = \left(\underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_k \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_k \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0}_k \quad \underbrace{1 \quad 1 \quad \dots \quad 1}_k \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{k_1} & 0 \\ 0 & \mathbf{E}_{k_2} \end{pmatrix}.$$

k_1 k_2

Rozważmy teraz rodziny dopuszczalne V , dla których funkcja B_V jest iloczynem tensorowym jednowymiarowych funkcji giętych. Dla prostoty ograniczymy się do R^2 .

Twierdzenie 2.5

Obowiązuje równanie:

$$(2.6) \quad B((x_1, x_2)|E_{(k_1, k_2)}) = B(x_1|E_{k_1})B(x_2|E_{k_2}).$$

Dowód. Niech $f \in C(R^2)$. Niech $s = k_1 + k_2$. Wówczas z twierdzenia o zamianie całki wielokrotnej na iterowaną otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \int_{R^2} f((x_1, x_2))B((x_1, x_2)|E_{(k_1, k_2)}) dx_1 dx_2 = \int_{[0;1]^s} f(\mathbf{E}_{(k_1, k_2)}u) du = \\ & = \int_{[0;1]^{k_1}} \int_{[0;1]^{k_2}} f((u_1 + u_2 + \dots + u_{k_1}, u_{k_1+1} + \dots + u_s)) du_1 \dots du_s = \\ & = \int_{R^2} f((x_1, x_2))B(x_1|E_{k_1})B(x_2|E_{k_2}) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\langle E_{k_1, k_2} \rangle = \langle E_{k_1} \rangle \times \langle E_{k_2} \rangle = [0; k_1] \times [0; k_2],$$

więc z lematu A 1 otrzymujemy (2.6). ◇

Przykład 2.7

Powyższe dwa twierdzenia umożliwiają wyznaczenie pudełkowej funkcji giętej w sytuacji, gdy macierz dopuszczalna \mathbf{V} ma następującą postać:

$$\mathbf{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & a & \dots & a & c & c & \dots & c \\ b & b & \dots & b & d & d & \dots & d \end{pmatrix}}_{\substack{k_1 \\ k_2}}.$$

Niech

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Ponieważ \mathbf{V} jest dopuszczalna, więc $\det \mathbf{C} \neq 0$. Zatem

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{C}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{C}^{-1}\mathbf{V} = \mathbf{E}_{k_1, k_2}.$$

Stąd z (2.2) oraz (2.6) otrzymujemy

$$\begin{aligned} B(x|V) &= B(x|\mathbf{C}\mathbf{C}^{-1}V) = \\ &= (\det \mathbf{C}^{-1})^{-1} B(\mathbf{C}^{-1}x|\mathbf{C}^{-1}V) = (\det \mathbf{C}) B(\mathbf{C}^{-1}x|E_{k_1, k_2}) = \\ &= (\det \mathbf{C}) B\left(\frac{dx_1 - cx_2}{\det \mathbf{C}}|E_{k_1}\right) B\left(\frac{-bx_1 + ax_2}{\det \mathbf{C}}|E_{k_2}\right), \end{aligned}$$

gdzie $x = (x_1, x_2)$. Stąd wartość funkcji $B(x|V)$ wzdłuż prostych wyznaczonych przez wektor

$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

tj. dla $x = tv + w$ przy ustalonym $w = [w_1, w_2] \in R^2$ oraz dowolnym $t \in R$, jest równa:

$$(2.8) \quad B(tv + w|V) = \gamma B(t|E_{k_1}),$$

gdzie stała

$$\gamma = (\det \mathbf{C}) B\left(\frac{-bw_1 + aw_2}{\det \mathbf{C}}|E_{k_2}\right).$$

Zatem $B(tv + w|V)$ zależy jedynie od wartości funkcji $B(t|E_{k_1})$.

W szczególności, jeśli

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

to

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

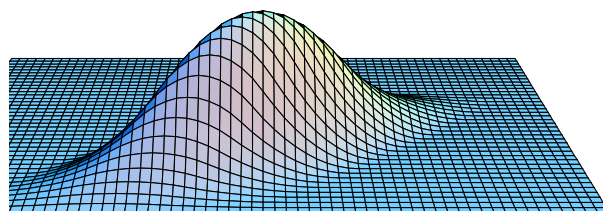
Zatem

$$B((x_1, x_2)|V) = B(x_1 - x_2|E_3)B(x_2|E_3),$$

gdzie

$$B(x|E_3) = \begin{cases} 0,5x^2 & x \in [0; 1] \\ 0,75 - (x - 1,5)^2 & x \in [1; 2] \\ 0,5(x - 3)^2 & x \in [2; 3]. \end{cases}$$

Stąd wynika kształt funkcji $B(\cdot|V)$:



Pudełkowa funkcja gięta

Przypomnijmy, że translację zbioru E o wektor v oznaczamy przez

$$E + v = \{u + v : u \in E\}.$$

Pochodną kierunkową oznaczamy jak zwykle $D_v f$. Jeśli funkcja $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, to

$$D_v f = \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Twierdzenie 2.9

(i) Jeśli

$$\text{span}\{V \setminus \{v_j\}\} = \mathbb{R}^n,$$

to

$$(2.10) \quad D_{v_j} B(x|V) = B(x|V \setminus v_j) - B(x - v_j|V \setminus v_j)$$

dla wszystkich x takich, że $B(\cdot|V \setminus v_j)$ jest ciągła w punktach x i $x - v_j$. W szczególności w zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus G_V$.

(ii) Jeśli

$$\text{span}\{V \setminus \{v_j\}\} \neq \mathbb{R}^n,$$

to

$$(2.11) \quad D_{v_j} B(x|V) = 0$$

dla

$$x \notin (\langle V \setminus v_j \rangle + \varepsilon v_j), \quad \text{gdzie } \varepsilon = 1, 0.$$

(iii) Pudełkowa funkcja gięta $B(\cdot|V)$ jest wielomianem stopnia $s - n$ w zbiorze $\mathbb{R}^n \setminus G_V$.

DOWÓD. Załóżmy, że $\text{span}\{V \setminus v_j\} = \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$\begin{aligned} & \frac{B(x + tv_j|V) - B(x|V)}{t} = \\ &= \frac{1}{t} \int_0^1 B(x - (r-t)v_j|V \setminus v_j) dr - \frac{1}{t} \int_0^1 B(x - rv_j|V \setminus v_j) dr = \\ &= \frac{1}{t} \int_{-t}^{1-t} B(x - rv_j|V \setminus v_j) dr - \frac{1}{t} \int_0^1 B(x - rv_j|V \setminus v_j) dr = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \int_{-t}^0 B(x - rv_j | V \setminus v_j) dr - \frac{1}{t} \int_{1-t}^1 B(x - rv_j | V \setminus v_j) dr = \\
&= \frac{1}{t} \int_0^t B(x + rv_j | V \setminus v_j) dr - \frac{1}{t} \int_0^t B(x + rv_j - v_j | V \setminus v_j) dr.
\end{aligned}$$

Przy $t \rightarrow 0$ lewa strona zmierza do pochodnej kierunkowej, prawa strona zaś, przy założeniu ciągłości funkcji podcałkowej – do prawej strony (2.10). Problem ciągłości funkcji $B(\cdot | V \setminus v_j)$ występuje jedynie na brzegu zbioru $\langle V \setminus v_j \rangle$. Wystarczy więc pokazać, że

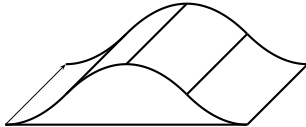
$$\partial \langle V \setminus v_j \rangle + \varepsilon v_j \subset G_V, \quad \varepsilon = 0, 1,$$

co zachodzi, gdyż

$$\partial \langle V \setminus v_j \rangle \subset G_{V \setminus v_j}$$

zaś z definicji

$$(G_{V \setminus v_j} + \varepsilon v_j) \subset G_V.$$



Funkcja jest stała wzdłuż prostych równoległych do wyróżnionego wektora

Dowód (2.11) dla prostoty przeprowadzimy w R^2 . Jeśli dany jest wektor v_j taki, że $\text{span}\{V \setminus \{v_j\}\} \neq R^2$, to pozostałe wektory leżą na pewnej prostej. Stosując metody opisane w przykładzie 2.7, funkcję B_V rozkładamy na dwie funkcje rzeczywiste. Z (2.8) wnioskujemy, że funkcja $B(x|V)$ wzdłuż prostej wyznaczonej przez wektor v_j za-

kawałkami stała, co daje (2.11) jedynie dla $B(1|V)$, zatem jest

Punkt (iii) wynika z punktu (i), (ii) oraz z lematu 2.12. ◇

Przez $\Pi_k(U)$ oznaczmy zbiór wielomianów stopnia co najwyżej k , określonych na zbiorze U .

Lemat 2.12

Niech U będzie zbiorem otwartym w R^n . Załóżmy, że rodzina wektorów V jest taka, że

$$\text{span}\{V\} = R^n, \quad \#V = n$$

oraz dla pewnej funkcji p i $k \in N$

$$\bigwedge_{v_j \in V} D_{v_j} p \in \Pi_k(U).$$

Wówczas $p \in \Pi_{k+1}(U)$.

Dowód. Ponieważ pochodne funkcji p są funkcjami ciągłymi w kierunkach, które rozpinają przestrzeń R^n , zatem $p \in C^1(U)$. Zauważmy, że gradient

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

można zapisać za pomocą pochodnych kierunkowych

$$\nabla = [D_{v_1}, \dots, D_{v_n}] \mathbf{V}^{-1}.$$

Jeśli

$$\phi(t, x) = p(tx) - p(0),$$

to

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) = (\nabla p(tx), x).$$

Stąd

$$\phi(1, x) = p(x) - p(0) = \int_0^1 (\nabla p(tx), x) dt \in \Pi_{k+1}.$$

◇

Wprowadzamy oznaczenie

$$(2.13) \quad \varrho_V = \max \left\{ r : \bigwedge_{X \subset V} \#X = r, \text{span}\{V \setminus X\} = R^n \right\}.$$

Twierdzenie 2.14

Jeśli $\varrho_V \geq 1$, to

$$B_V \in C^{\varrho_V - 1}(R^n) \setminus C^{\varrho_V}(R^n).$$

Dowód. Dowód indukcyjny względem ϱ_V przeprowadzimy dla wymiaru $n = 2$. Z dowodu lematu 1.10 wynika, że funkcja $B(\cdot|V)$ jest nieciągła na brzegu zbioru $\langle V \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy wektory rodziny V z wyjątkiem dokładnie jednego leżą na pewnej prostej, czyli $\varrho_V = 0$. Zatem jeśli $\varrho_V \geq 1$, to funkcja jest ciągła. Na podstawie wzoru (2.10) udowadniamy krok indukcyjny dla $\varrho_V > 1$.

◇

Twierdzenie 2.15

Niech $p \in \Pi_k$, gdzie $0 \leq k \leq \varrho_V$. Wówczas

$$(2.16) \quad \sum_{\alpha \in Z^n} p(\alpha) B_V(\cdot - \alpha) \in \Pi_k,$$

o ile $\varrho_V \geq 1$. Jeśli $\varrho_V = 0$, to co najwyżej zmieniając funkcję (2.16) w punktach nieciągłości przedłużyć ją można do wielomianu.

Dowód. Dowód jest indukcyjny względem s . Dla $s = n$ funkcja B_V jest funkcją charakterystyczną, co oczywiście pociąga (2.16). Weźmy $s > n$ oraz $p \in \Pi_k$. Jeśli $\text{span}\{V \setminus \{v_j\}\} = R^n$, to z (2.10) wynika:

$$\begin{aligned} D_{v_j} \left(\sum_{\alpha \in Z^n} p(\alpha) B_V(\cdot - \alpha) \right) &= \\ &= \sum_{\alpha \in Z^n} p(\alpha) (B(\cdot - \alpha|V \setminus v_j) - B(\cdot - \alpha - v_j|V \setminus v_j)) = \\ &= \sum_{\alpha \in Z^n} (p(\alpha) - p(\alpha - v_j)) B(\cdot - \alpha|V \setminus v_j), \end{aligned}$$

gdzie wielomian

$$p(\cdot) - p(\cdot - v_j) \in \Pi_{k-1}.$$

Zatem z założenia indukcyjnego wnioskujemy, że pochodna kierunkowa z tej funkcji daje się przedłużyć do wielomianu stopnia $k - 1$. Jeśli

$$\text{span}\{V \setminus \{v_j\}\} \neq R^n,$$

to z (2.11)

$$D_{v_j} \left(\sum_{\alpha \in Z^n} p(\alpha) B_V(\cdot - \alpha) \right) = 0.$$

Stąd, z lematu 2.12 oraz z założenia indukcyjnego wynika, że funkcja

$$f(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} p(\alpha) B_V(x - \alpha)$$

jest wielomianem poza punktami nieciągłości funkcji $B(\cdot - \alpha|V)$, $\alpha \in Z^n$. Zatem daje się przedłużyć do wielomianu. Ponieważ dla $\varrho_V \geq 1$ funkcja ta jest ciągła, jest więc wielomianem zmiennej x .

◇

Wniosek 2.17

Jeśli $\varrho_V \geq 1$, to

$$\sum_{\alpha \in Z^n} B_V(\cdot - \alpha) = 1,$$

stąd

$$\sum_{\alpha \in Z^n} B_V(\alpha) = 1.$$

Dowód. Z twierdzenia 2.15 wiadomo, że suma ta jest równa stałej. By pokazać, że jest równa jeden, posłużymy się wzorem Poissona. Ze wzoru 1.9 wynika, że dla $\alpha \in Z^n$

$$\hat{B}(\alpha|V) = \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Wzór Poissona pociąga tezę wniosku. ◇

Wprowadzemy oznaczenie

$$\sum V = \sum_{j=1}^s v_j.$$

Twierdzenie 2.18

Funkcja B_V jest symetryczna względem punktu

$$c_V = 1/2 \sum V,$$

tj.

$$(2.19) \quad B_V(x) = B_V(\sum V - x).$$

Dowód. Niech $f \in C(R^n)$. Wówczas z twierdzenia 1.7

$$\begin{aligned} \int f(x) B_V(\sum V - x) dx &= \int_{[0;1]^s} f(\sum V - \sum_{j=1}^s u_j v_j) du_1, \dots, du_s = \\ &= \int_{[0;1]^s} f(\sum_{j=1}^s (1 - u_j) v_j) du_1, \dots, du_s. \end{aligned}$$

Stosując zamianę zmiennych oraz lemat A 1, otrzymamy (2.19). ◇

Twierdzenie 2.20

Niech $x = \sum_{j=1}^s \lambda_j v_j$ oraz $s > n$. Poniższa formuła nie zachodzi co najwyżej w zbiorze punktów nieciągłości funkcji występujących w tym równaniu.

$$(2.21) \quad B(x|V) = \frac{1}{s-n} \sum_{j=1}^s [\lambda_j B(x|V \setminus v_j) + (1 - \lambda_j) B(x - v_j|V \setminus v_j)].$$

Suma \sum jest wzięta po wszystkich dopuszczalnych rodzinach $V \setminus v_j$.

Dowód. W dowodzie będziemy opuszczać symbol ∇ . Mnożąc obustronnie (2.10) przez λ_j i dodając po wszystkich dopuszczalnych j , otrzymamy

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s (\lambda_j B(x|V \setminus v_j) - \lambda_j B(x - v_j|V \setminus v_j)) = \\ & = \sum_{j=1}^s \lambda_j D_{v_j} B_V(x) = \sum_{j=1}^s \lambda_j (v_j, \nabla B_V(x)) = (x, \nabla B_V(x)), \end{aligned}$$

gdzie

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right).$$

Wystarczy więc pokazać, że dla $s > n$

$$(2.22) \quad B(x|V) = \frac{1}{s-n} \left((x, \nabla B_V(x)) + \sum_{j=1}^s B(x - v_j|V \setminus v_j) \right)$$

i równość zachodzi przynajmniej dla $x \in R^n \setminus G_V$. Udowodnimy (2.22) indukcyjnie względem s . Niech $s = n + 1$. Zilustrujemy tę sytuację w R^2 poniżej, w przykładzie 2.23.

Niech $s > n + 1$. Wówczas istnieje v_k taki, że

$$B(x|V) = \int_0^1 B(x - tv_k|V \setminus v_k) dt.$$

Z założenia indukcyjnego wynika

$$\begin{aligned} B(x|V) &= \frac{1}{s-1-n} \int_0^1 \left((x - tv_k, \nabla B(\cdot - tv_k|V \setminus v_k)(x)) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j \neq k} B(x - tv_k - v_j|V \setminus \{v_j, v_k\}) \right) dt = \\ &= \frac{1}{s-1-n} \left((x, \nabla \int_0^1 B(\cdot - tv_k|V \setminus v_k) dt(x)) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^1 t \frac{d}{dt} B(x - tv_k|V \setminus v_k) dt + \sum_{j \neq k} B(x - v_j|V \setminus v_j) \right). \end{aligned}$$

Całkując przez części drugie wyrażenie otrzymamy

$$(s-1-n)B(x|V) =$$

$$= (x, \nabla B_V(x)) + B(x - v_k | V \setminus v_k) - B(x | V) + \sum_{j \neq k} B(x - v_j | V \setminus v_j).$$

Przenosząc na drugą stronę B_V otrzymamy (2.22), co kończy dowód. \diamond

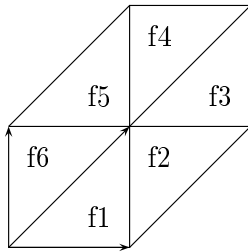
Przykład 2.23

Rozważmy przykład ilustrujący poprawność wzoru (2.22). Niech

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Nośnik funkcji

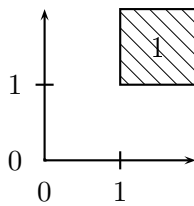
Pudełkowa funkcja gięta $B(\cdot | V)$ dana jest następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} f1 &= x_2 \\ f2 &= x_2 - x_1 + 1 \\ f3 &= 2 - x_1 \\ f4 &= 2 - x_2 \\ f5 &= x_1 - x_2 + 1 \\ f6 &= x_1 \end{aligned}$$

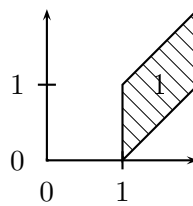
Zauważmy, że w naszym przypadku $s = n + 1$ oraz funkcje po obu stronach równania (2.22) są kawałkami liniowe. Ponadto są równe po zróżniczkowaniu, zatem z lematu 2.12 różnią się co najwyżej o stałą na każdym kawałku zbioru $R^2 \setminus G_V$. O stałej po prawej stronie (2.22) decyduje suma:

$$\sum_{j=1}^3 B(x - v_j | V \setminus v_j).$$

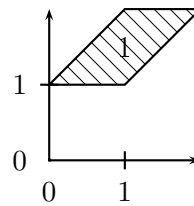
Z definicji są to funkcje charakterystyczne zbiorów $\langle V \setminus v_j \rangle$



$B(\cdot - v_3 | V \setminus v_3)$

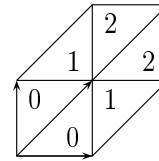


$B(\cdot - v_1 | V \setminus v_1)$



$B(\cdot - v_2 | V \setminus v_2)$

Dodając do siebie te funkcje, otrzymamy wyrazy stałe wielomianów f_1, f_2, \dots, f_6 .



Wyrazy stałe

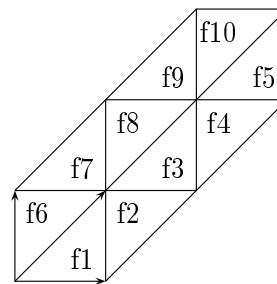
Przykład 2.24

Wzory (2.21) oraz (2.10) mają swoje odpowiedniki dla wielościennych funkcji giętych. Wzór (2.21) może służyć jako narzędzie do wyliczenia explicite pudełkowej funkcji giętej. Ilustruje to następujący przykład w R^2 . Niech

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pudełkowa funkcja gięta $B(\cdot|V)$ dana jest następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2} y^2 \\ f_2 &= \frac{1}{2} [y^2 - (1-x)^2] \\ f_5 &= \frac{1}{2} [(x-3)^2] \\ f_6 &= \frac{1}{2} x^2 \\ f_7 &= \frac{1}{2} [x^2 - (1-y)^2] \\ f_{10} &= \frac{1}{2} [(y-3)^2]. \end{aligned}$$



Nośnik funkcji

$$\begin{aligned}
f_3 &= \frac{1}{2} [-(x-1)^2 + (2-y)y + 2(y-1)] \\
f_4 &= \frac{1}{2} [(3-x)(1-x) + (2-y)y + 2(1-x+y)] \\
f_8 &= \frac{1}{2} [-(y-1)^2 + (2-x)x + 2(x-1)] \\
f_9 &= \frac{1}{2} [(3-y)(1-y) + (2-x)x + 2(1-y+x)]
\end{aligned}$$

Przykład 2.25

Pudełkowe funkcje gięte mogą służyć do zadawania krzywych w postaci parametrycznej. Danych jest w przestrzeni pięć punktów $a_0, \dots, a_4 \in R^2$. Krzywa łamana ma szczególnie prostą postać. Mianowicie

$$L_1(x) = \sum_{j=0}^4 a_j N(x-j|E2), \quad x \in [0, 4],$$

gdzie

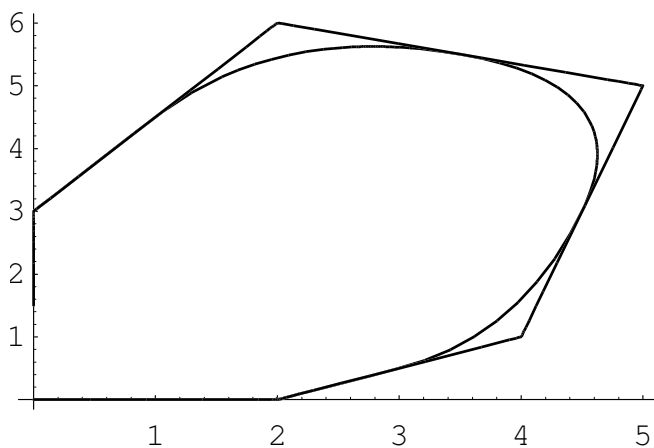
$$N(x|E2) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in [-1; 1] \\ 0 & \text{poza.} \end{cases}$$

Krzywą tę możemy wygładzić używając funkcji

$$N(x|E_3) = \begin{cases} 0,5(x+1,5)^2 & x \in [-1,5; -0,5] \\ 0,75 - x^2 & x \in [-0,5; 0,5] \\ 0,5(x-1,5)^2 & x \in [0,5; 1,5]. \end{cases}$$

Wówczas

$$L_2(x) = \sum_{j=0}^4 a_j N(x-j|E3) + a_0 N(x+1|E3) + a_4 N(x-5|E3), \quad x \in [-0,5, 4,5].$$



Krzywe parametryczne

3. Quasi interpolacja

Podejście zaprezentowane w tym rozdziale pochodzi od [CD]. Niech ψ będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku

$$\psi : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}.$$

Funkcję ψ **przeskalowaną** o wektor $1/h$ oznaczamy przez

$$\psi_h = \psi(\cdot/h).$$

Splot dyskretny funkcji ciągłej ψ o zwartym nośniku z ciągiem $a = \{a(\mu)\}_{\mu \in hZ^n}$ definiujemy przez

$$(3.1) \quad \psi *_h a = \sum_{\mu \in hZ^n} a(\mu) \psi(\cdot - \mu).$$

Splot dyskretny dwóch ciągów

$$a = \{a(\mu)\}_{\mu \in hZ^n} \quad \text{i} \quad b = \{b(\mu)\}_{\mu \in hZ^n}$$

definiujemy tym samym symbolem $a *_h b$

$$(3.2) \quad (a *_h b)(\mu) = \sum_{\nu \in hZ^n} a(\nu) b(\mu - \nu).$$

Jeśli dla funkcji ciągłej f przez $f|_{hZ^n}$ będziemy oznaczać obcięcie funkcji f do kraty hZ^n , to **quasi-splot** dwóch funkcji definiujemy przez

$$(3.3) \quad \psi *_h' f = \psi *_h f|_{hZ^n} = \sum_{\mu \in hZ^n} f(\mu) \psi(\cdot - \mu).$$

Przyjmijmy również, że $f|_1 = f|_{Z^n}$. Przestrzeń rozpiętą przez hZ^n translacje funkcji ψ_h oznaczamy przez

$$(3.4) \quad S(\psi_h) = \text{span}[\psi_h(\cdot - \mu) : \mu \in hZ^n].$$

Elementy przestrzeni $S(\psi_h)$ są oczywiście postaci $\psi_h *_h a$, gdzie a jest dowolnym ciągiem liczbowym. W przypadku gdy $h = 1$, będziemy opuszczać indeks h , i tak

$$a * b = a *_1 b, \quad \psi * a = \psi *_1 a, \quad \psi *' f = \psi *_1' f.$$

Oczywiście

$$S(B_V) = \text{span}[B_V(\cdot - \alpha) : \alpha \in Z^n].$$

W dalszym ciągu będziemy badać własności aproksymacyjne przestrzeni $S(\psi_h)$ zakładając, że ψ jest funkcją ciągłą o zwartym nośniku spełniającą warunek

$$\sum_{\alpha \in Z^n} \psi(\cdot - \alpha) = 1$$

oraz **odtworządzając wielomiany** dla pewnego ϱ_ψ , tzn. dla dowolnego $0 \leq k \leq \varrho_\psi$ oraz $p \in \Pi_k$

$$(3.5) \quad \psi *' p \in \Pi_k.$$

Okazuje się, że szybkość aproksymacji jest związana z własnością odtwarzania wielomianów (3.5) (i na odwrót), co ukazuje tw. 5.1.

Rozpocznijmy od zagadnienia interpolacji wielomianów ustalonego stopnia przez funkcję z przestrzeni $S(\psi)$. Funkcję ciągłą f możemy interpolować w Z^n , jeśli istnieje ciąg $a = \{a(\alpha)\}_{\alpha \in Z^n}$ taki, że

$$(3.6) \quad f|_I = \psi|_I * a.$$

Wprowadzmy ciąg

$$\delta = \{\delta_0(\alpha)\}_{\alpha \in Z^n},$$

gdzie δ_0 oznacza deltę Kroneckera

$$\delta_0(\alpha) = \delta_{0,\alpha} = \begin{cases} 1 & \alpha = 0 \\ 0 & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Ciąg $\psi|_I$ jako operator jest odwracalny, jeśli istnieje ciąg $(\psi|_I)^{-1}$ taki, że

$$\psi|_I * (\psi|_I)^{-1} = \delta.$$

Stąd wynika, że jeśli operator $\psi|_I$ jest odwracalny, to problem interpolacji (3.6) jest rozwiązany dla dowolnej funkcji ciągłej. Zdefiniujmy ciąg:

$$m = \delta - \psi|_I$$

oraz splot

$$m^k = \underbrace{m * \dots * m}_k.$$

Wówczas pisząc formalnie szereg Neumanna, otrzymamy

$$(\psi|_I)^{-1} = (\delta - m)^{-1} \sim \delta + m + m^2 + \dots + m^k + \dots$$

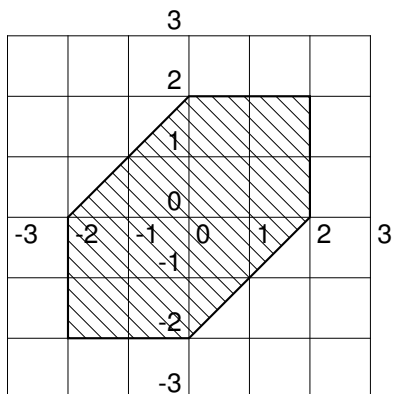
Zbieżnością tego szeregu zajmiemy się w rozdziale 9.

Przykład 3.7

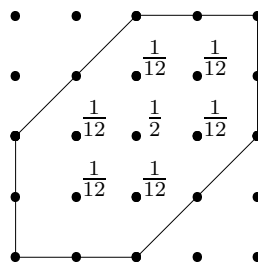
Niech

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

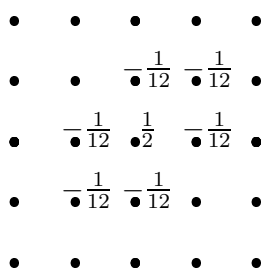
Funkcja $B(\cdot|V)$ jest symetryczna względem zera o następującym nośniku:



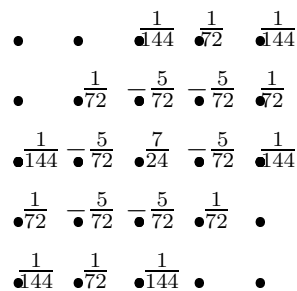
Nośnik funkcji



Wartości ciągu $B_{V|}$



Wartości ciągu $u_{m=\delta-B_{V|}}$



Wartości ciągu u_{m^2}

Przyjmijmy teraz następującą definicję:

Definicja 3.8

Niech $f \in C(R^n)$. Definiujemy ciąg

$$(3.9) \quad r^\ell = \delta + m + m^2 + \dots + m^\ell$$

oraz operator **quasi-interpolacji** $Q^\varrho = Q^{\psi, \varrho}$

$$Q^\varrho f(x) = \psi *' (f * r^\varrho) = \sum_{\alpha \in Z^n} (f * r^\varrho)(\alpha) \psi(x - \alpha) \quad x \in R^n.$$

Okazuje się, że przy tak przyjętej definicji operatora Q^ϱ zagadnienie interpolacji (3.6) ma rozwiązanie dla wielomianów stopnia nie większego niż ϱ_ψ , o ile $\varrho \geq \varrho_\psi$. Wzór (3.8) wyznacza nam jednocześnie algorytm na współczynniki rozwinięcia.

Twierdzenie 3.10 [Quasi-interpolacja]

Przy powyższych założeniach o funkcji ψ niech $\varrho \geq \varrho_1$, gdzie $\varrho_1 \leq \varrho_\psi$. Wówczas operator Q^ϱ jest operatorem identycznościowym dla wielomianów co najwyżej stopnia ϱ_1 , mianowicie

$$(3.11) \quad Q^\varrho p = p \quad \text{dla} \quad p \in \Pi_{\varrho_1}.$$

Jeśli ponadto funkcja ψ jest symetryczna, to (3.11) zachodzi dla

$$2\varrho \geq \varrho_1 - 1.$$

Dowód tego twierdzenia wynika z dwóch lematów.

Lemat 3.12

Przy założeniach twierdzenia 3.10 zachodzi:

$$Q^\varrho p|_1 = p|_1.$$

Dowód. Korzystając z elementarnych własności splotu pokazujemy, że

$$\begin{aligned} Q^\varrho p|_1 &= (\psi *' (p * r^\varrho))|_1 = \\ &= \psi|_1 * (p|_1 * (\delta + m + \dots + m^\varrho)) = \\ &= (\delta - m) * (\delta + m + \dots + m^\varrho) * p|_1 = \\ &= (\delta - m^{\varrho+1}) * p|_1 = p|_1 - m^{\varrho+1} * p|_1. \end{aligned}$$

Wystarczy udowodnić teraz, że

$$(3.13) \quad \deg(p * m) < \deg(p),$$

a w przypadku symetrycznym, że

$$(3.14) \quad \deg(p * m) < \deg(p) - 1.$$

Wówczas bowiem

$$m^{e+1} * p| = (p * m^{e+1})| = 0,$$

czyli

$$Q^e p| = p|.$$

Dla prostoty ograniczymy się do wymiaru $n = 1$. Niech $p(x) = x^k$. Wówczas

$$\begin{aligned} p * m(x) &= \sum_{j \in Z} m(j)p(x-j) = \sum_{j \in Z} m(j)(x-j)^k = \\ &= \sum_{j \in Z} m(j) \left(x^k + \binom{k}{1} x^{k-1}(-j) + \binom{k}{2} x^{k-2}(-j)^2 + \cdots + (-j)^k \right) = \\ &= x^k \sum_{j \in Z} m(j) + kx^{k-1} \sum_{j \in Z} m(j)(-j) + \binom{k}{2} x^{k-2} \sum_{j \in Z} m(j)(-j)^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + \sum_{j \in Z} m(j)(-j)^k. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\sum_{\alpha \in Z^n} m(\alpha) = \sum_{\alpha \in Z^n} \psi(\alpha) - 1 = 0,$$

więc nierówność (3.13) jest spełniona dla wielomianu typu $p(x) = x^k$. Stąd wynika ona dla dowolnego wielomianu p . Jednocześnie, jeśli ψ jest funkcją symetryczną, to $m(j) = m(-j)$. Stąd wynika, że suma przy x^{k-1} jest równa zero, czyli zachodzi (3.14). ◇

Lemat 3.15 [Własność przemienności][B]

Jeśli $f \in S(\psi)$, to

$$(3.16) \quad f *' \psi = \psi *' f.$$

DOWÓD. Ponieważ $f \in S(\psi)$, więc istnieje ciąg $a = \{a_\alpha\}_{\alpha \in Z^n}$ taki, że

$$f = \psi * a.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}(\psi * a) *' \psi &= (\psi * a) * \psi| = \\ &= \psi * (a * \psi|) = \psi *' f.\end{aligned}$$

◇

DOWÓD TWIERDZENIA. Z lematów wynika, że wystarczy udowodnić następującą implikację. Jeśli dwa dowolne wielomiany $p, q \in \Pi$ zgadzają się na kracie całkowitej, tj. $p| = q|$, to wówczas $p = q$, gdyż wówczas z lematu 3.15 $Q^e p$ jest wielomianem, zaś z lematu 3.12 $Q^e p| = p|$. Zatem

$$Q^e p = p.$$

Dowód powyższej implikacji wynika np. z twierdzenia Radona lub bezpośrednio z twierdzenia Bezouta. Dla prostoty ograniczymy się do dwóch wymiarów, $n = 2$.

Twierdzenie Bezout

Wielomian dwóch zmiennych $p(x, y)$ faktoryzuje się poprzez wielomian liniowy $Ax + By + C$, tzn.

$$p(x, y) = (Ax + By + C)w(x, y)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $p(x, y)$ zeruje się na prostej l określonej równaniem $Ax + By + C = 0$.

Klasyczne twierdzenie Bezouta dla wielomianów jednej zmiennej implikuje, że wielomian dwóch zmiennych $p(x, y)$ obcięty do prostej l zeruje się na tej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy p zeruje się w $\deg p + 1$ punktach prostej l . Zatem jeśli dwa dowolne wielomiany p, q są identyczne w zbiorze Z^n , to wielomian $p - q$ zeruje się na nieskończenie wielu prostych $x = k$, gdzie $k \in Z$. Wobec twierdzenia Bezouta to jest jedynie możliwe, jeśli $p - q = 0$.

◇

Na zakończenie tego rozdziału podamy jeszcze jeden interesujący fakt. Okazuje się bowiem, że quasi-splot i splot zgadzają się dla funkcji z przestrzeni $S(\psi) \cap \Pi$. Lemat pozostawimy bez dowodu. Odsyłamy do pracy [BR] oraz do szczególnie eleganckiego dowodu z pracy [RS].

Lemat 3.17

Zachodzi następująca równoważność

$$\psi *' p \in \Pi \Leftrightarrow \psi *' p = \psi * p.$$

4. Aproksymacja

Dla funkcji k -krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły i takich, że ich pochodne cząstkowe do rzędu k są p -całkowalne, wprowadzamy oznaczenie

$$|f|_{j,p} = \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}$$

oraz

$$\|f\|_{k,p} = \sum_{0 \leq j \leq k} |f|_{j,p}.$$

Zbiór takich funkcji oznaczmy przez W_p^k . Przestrzeń W_∞^k definiujemy analogicznie:

$$|f|_{j,\infty} = \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_\infty$$

oraz

$$\|f\|_{k,\infty} = \sum_{0 \leq j \leq k} |f|_{j,\infty}.$$

Uwaga. Zazwyczaj symbolem W_p^k oznaczamy **przestrzeń Sobolewa**. Czytelnika, który nie zna teorii dystrybucji, musi zadawać powyższą definicję, pomimo że np. (4.15) jest prawdziwe dla przestrzeni Sobolewa. Wprowadzenie do tych przestrzeni znajdzie czytelnik np. w [S], [SW], [M].

Założmy, że dana jest ciągła funkcja ψ o zwartym nośniku, spełniająca warunek:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \psi(\cdot - \alpha) = 1,$$

która odtwarza wielomiany dla pewnego ϱ_ψ .

Dla $h > 0$ oraz ustalonego $\varrho \geq \varrho_\psi$ definiujemy operator

$$(4.1) \quad Q_h = Q_h^{\psi,\varrho} f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (f_{1/h} * r^\varrho)(\alpha) \psi(\cdot/h - \alpha),$$

gdzie, przypomnijmy,

$$r^\varrho = \delta + m + \dots + m^\varrho$$

oraz $m = \delta - \psi_1$. Dla funkcji symetrycznej przyjmujemy:

$$\varrho \geq \frac{\varrho_\psi - 1}{2}.$$

Zauważmy, że do definicji operatora Q_h wystarczy nam znajomość wartości funkcji w punktach kratowych hZ^n . Ponadto, dla wielomianów co najwyżej stopnia ϱ_ψ operator Q_h jest identycznością, por. (3.11), gdyż

$$(4.2) \quad Q_h^{\psi, \varrho}(f)(x) = Q^{\psi, \varrho}(f_{1/h})(x/h).$$

Twierdzenie 4.3

Niech $0 \leq k \leq \varrho_\psi$ oraz $1 \leq p \leq \infty$.

Wówczas istnieje stała C zależna od funkcji ψ oraz wymiaru n taka, że dla $f \in W_p^{k+1}$,

$$\|f - Q_h f\|_p \leq C h^{k+1} |f|_{k+1, p}.$$

Dowód. Zaczniemy od przypadku $p = \infty$. Wszystkie stałe w dowodzie będziemy oznaczać przez C . Ustalmy funkcję f . Weźmy dowolny $x \in R^n$ oraz ze wzoru Taylora wielomian Taylora P_x stopnia k funkcji f :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} P_x(y) = & f(x) + \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha f(x)(x-y)^\alpha + \dots + \\ & + \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} D^\alpha f(x)(x-y)^\alpha. \end{aligned}$$

Oczywiście

$$f(x) = P_x(x).$$

Stąd oraz z własności quasi-interpolacji wynika, że

$$(4.5) \quad \begin{aligned} |f(x) - Q_h f(x)| &= |f(x) - P_x(x) - (Q_h f(x) - Q_h P_x(x))| = \\ &= |Q_h f(x) - Q_h P_x(x)| = |Q_h(f - P_x)(x)|. \end{aligned}$$

Ponieważ ψ jest funkcją o zwartym nośniku, więc istnieje stała N taka, że nośnik funkcji jest zawarty w kuli o promieniu N , tj.

$$(4.6) \quad \psi(x) = 0 \quad \text{dla } \|x\| > N.$$

Ponadto ψ jest ograniczona, więc

$$(4.7) \quad \|\psi\|_\infty \leq C.$$

Zatem z (4.1), (4.5), (4.6) oraz (4.7)

$$|f(x) - Q_h f(x)| = |Q_h(f - P_x)(x)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} |((f - P_x)_{1/h} * r^\varrho)(\alpha)| |\psi(x/h - \alpha)| \leq \\ &\leq C \sup_{\|h\alpha - x\| < hN} |((f - P_x)_{1/h} * r^\varrho)(\alpha)|, \end{aligned}$$

gdyż z (4.6) $\psi(x/h - \alpha) = 0$, o ile $\|x/h - \alpha\| > N$. Również z (4.6) oraz postaci ciągu r^ϱ wynika, że

$$r^\varrho(\beta) = 0 \quad \text{dla} \quad |\beta| \geq \varrho N.$$

Stąd dla $\|h\alpha - x\| < hN$

$$\begin{aligned} |((f - P_x)_{1/h} * r^\varrho)(\alpha)| &\leq \sum_{|\beta| < \varrho N} |(f - P_x)_{1/h}(\alpha - \beta) r^\varrho(\beta)| \leq \\ &\leq C \sum_{|\beta| < \varrho N} |(f - P_x)(h(\alpha - \beta))|. \end{aligned}$$

Jeśli $|\beta| < \varrho N$, to

$$\|h\alpha - h\beta - x\| \leq (\varrho + 1)hN,$$

zatem przyjmując $L = (\varrho + 1)hN$, ze wzoru Taylora otrzymamy:

$$|(f - P_x)(h(\alpha - \beta))| \leq Ch^{k+1} \sup_{|\beta|=k+1} \sup_{\|x-y\| < L} |D^\beta f(y)|,$$

czyli

$$|((f - P_x)_{1/h} * r^\varrho)(\alpha)| \leq Ch^{k+1} \sup_{|\beta|=k+1} \sup_{\|x-y\| < L} |D^\beta f(y)|.$$

Zatem

$$(4.8) \quad |f(x) - Q_h f(x)| \leq Ch^{k+1} \sup_{|\beta|=k+1} \sup_{\|x-y\| < L} |D^\beta f(y)|,$$

co kończy dowód dla $p = \infty$. W dowodzie dla $p < \infty$ wykorzystuje się pierwszą część dowodu. Czytelnika odsyłamy do pracy [DM2], por. [BD1].

◇

Zbadajmy to twierdzenie w przypadku pudełkowych funkcji giętych. Zdefiniujmy **symetryczną pudełkową funkcję giętą**

$$(4.9) \quad N_V(x) = N(x|V) = B(x + c_V|V)$$

oraz wprowadzimy operator przy $\varrho = 0$

$$(4.10) \quad Q_h^V f = \sum_{\mu \in h\mathbb{Z}^n} f(\mu) N_h(\cdot - \mu|V).$$

Przyjmijmy

$$\Omega_x = h \operatorname{supp} N_v + x.$$

Ze wzoru 4.8 wynika:

Wniosek 4.11

Jeśli $\varrho_V \geq 1$, to istnieje stała C taka, że dla dowolnej funkcji $f \in W_\infty^2$ oraz dowolnego punktu $x \in R^n$

$$(4.12) \quad |f - Q_h^V f(x)| \leq C h^2 \max_{|\alpha|=2} \max_{x \in \Omega_x} |D^\alpha f(x)|.$$

Zamiast wyliczać $(f_h * r^\varrho)(\alpha)$, która to wielkość zależy od wartości funkcji f na kracie hZ^n , można rozważać pewne operatory całkowe [K1-2]. Daje to możliwość zdefiniowania operatora aproksymacji dla szerszej klasy funkcji, np. z przestrzeni Sobolewa.

Rozpoczniemy od konstrukcji funkcji Γ o zadanej gładkości $C^l(R^n)$, o nośniku zwartym, która spełnia warunek,

$$(4.13) \quad \int_{R^n} x^\alpha \Gamma(x) dx = \delta_0(\alpha) \quad 0 \leq |\alpha| \leq k,$$

por. [BD1], czyli dla wielomianu $p \in \Pi_k$

$$(4.14) \quad \int_{R^n} p(x) \Gamma(x) dx = p(0).$$

W tym celu niech Ξ będzie rodziną dopuszczalną, dla której $\varrho_\Xi \geq l$. Zdefiniujmy iloczyn skalarny odpowiadający rodzinie dopuszczalnej Ξ : $p, q \in \Pi_k$,

$$\langle p, q \rangle_\Xi = \int_{R^n} p(x) q(x) B(x|\Xi) dx.$$

Szukamy wielomianu w , który jest postaci

$$w = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$$

oraz takiego, że

$$\langle w, x^\alpha \rangle_\Xi = 0 \quad \text{dla} \quad 0 < |\alpha| \leq k$$

oraz

$$\langle w, 1 \rangle_\Xi = 1.$$

By wyliczyć współczynniki a_α , musimy obliczyć następujące iloczyny skalarne: $\langle x^\alpha, x^\beta \rangle_\Xi$, np. z (1.5). Następnie rozwiązujemy układ równań

$$\delta_0(\beta) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha \langle x^\alpha, x^\beta \rangle_\Xi.$$

Układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie, gdyż wielomiany x^α , $|\alpha| \leq k$, są bazą w Π_k . Z konstrukcji funkcji w wynika, że funkcja

$$\Gamma(x) = w(x)B(x|\Xi)$$

spełnia warunek (4.13). Niech r_h będzie operatorem zwięzania [K1-2]:

$$r_h : W_p^m \rightarrow Z^n$$

danym wzorem:

$$r_h(f)(\alpha) = \frac{1}{h^n} (f * \Gamma_h)(h\alpha), \quad \alpha \in Z^n.$$

Jeśli $p \in \Pi_k$, to z (4.14)

$$\begin{aligned} r_h(p)(\alpha) &= \frac{1}{h^n} (p * \Gamma_h)(h\alpha) = \frac{1}{h^n} \int_{R^n} p(h\alpha - y) \Gamma(y/h) dy = \\ &= \int_{R^n} p(h\alpha - hy) \Gamma(y) dy = p(h\alpha), \end{aligned}$$

Zatem operator r_h zachowuje wartości wielomianów na kracie hZ^n . Stąd operator

$$K_h^{\psi, \varrho}(f)(x) = \sum_{\alpha} (r_h(f) * r^\varrho)(\alpha) \psi(x/h - \alpha),$$

jest operatorem quasiinterpolacyjnym.

Stąd przy założeniach twierdzenia 4.3 zachodzi

$$(4.15) \quad \|f - K_h^{\psi, \varrho}(f)\|_p \leq C h^{k+1} |f|_{k+1, p}.$$

Wprowadzimy teraz moduł gładkości. Będzie on zastępować prawą stronę nierówności (4.15) dla szerszej klasy funkcji. Jeśli $f \in L^p(R^n)$, to

$$\omega_{k, p}(f, h) = \sup\{\|\Delta^k(y)f\|_p : \|y\| \leq h\},$$

gdzie

$$\Delta^k(y)f(x) = \sum_{n=0}^k (-1)^{k-n} \binom{k}{n} f(x + ny), \quad x, y \in R^n.$$

Powyższe rozważania prowadzą do następującego twierdzenia umożliwiającego aproksymację w przestrzeniach L^p .

Twierdzenie 4.16

Niech $\varrho \geq \varrho_\psi$. Dla funkcji symetrycznej przyjmujemy:

$$\varrho \geq \frac{\varrho_\psi - 1}{2}.$$

Niech $0 \leq k \leq \varrho_\psi$ oraz $1 \leq p < \infty$. Istnieje stała C taka, że dla dowolnej funkcji $f \in L^p$

$$\|f - K_h^{\psi, \varrho}(f)\|_p \leq C \omega_{k+1, p}(f, h).$$

5. Twierdzenie Strangafixa

W rozdziale 3 i 4 pokazaliśmy, że funkcje odtwarzające wielomiany (3.5) mają dobre własności aproksymacyjne. Okazuje się, że zachodzi twierdzenie odwrotne.

Twierdzenie 5.1

Niech ψ będzie funkcją ciągłą o zwartym nośniku. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(i) Transformata Fouriera funkcji ψ nie znika w zerze; $\widehat{\psi}(0) \neq 0$ oraz dla $|\alpha| \leq \rho - 1$

$$D^\alpha \widehat{\psi}(\beta) = 0, \quad \beta \in Z^n \setminus 0.$$

(ii) Dla każdego wielomianu $q \in \Pi_{\rho-1}$ istnieje stała $c \neq 0$ oraz wielomian w stopnia mniejszego niż wielomian q taki, że

$$\psi *' q = cq + w.$$

(iii) Dla każdego $1 \leq p \leq \infty$ istnieje stała C taka, że dla każdej funkcji $f \in W_p^\rho$, istnieje ciąg $a_h = \{a(\mu)\}_{\mu \in hZ^n}$ taki, że

$$(5.2) \quad \|f - \psi_h *'_h a_h\|_p \leq Ch^\rho \|f\|_{\rho,p}$$

oraz

$$(5.3) \quad \sum_{\mu \in hZ^n} |a(\mu)|^p \leq Ch^{-n} \|f\|_p^p.$$

Dla $p = \infty$ warunek ten przyjmuje postać

$$(5.4) \quad \sup_{\mu \in hZ^n} |a(\mu)| \leq C \|f\|_\infty.$$

Równoważność warunków (i) oraz (ii) udowadnia się stosując wzór Poissona, por. lemat A 2.

Implikację (ii) \Rightarrow (iii) pokazaliśmy w tw. 4.2. Zauważmy, że mamy algorytm na te współczynniki.

Implikację (iii) \Rightarrow (i) udowadnia się biorąc $p = 2$ oraz konkretną funkcję f . Czytelnik może zapoznać się ze szczegółami w pracach [SF]. W pracy A. Rona pokazano, że można osłabić warunki występujące w punkcie (iii).

Mianowicie, wystarczy założyć (5.2) dla $p = \infty$ nie zakładając o zachowaniu współczynników. Ponieważ praca jest opublikowana w czasopiśmie *Studia Mathematica* wydawanym w Polsce, czytelników odsyłamy do źródła. Ostatnio R.Q. Jia uogólnił ten rezultat. Pokazał on, że jeśli dla ustalonego $1 \leq p \leq \infty$ zachodzi warunek (5.2), to funkcja ta musi spełniać warunki z punktu (i) nazywane w literaturze warunkami Strangafixa.

Uwaga. Z twierdzenia wynika, że przestrzenie rozpięte przez translacje jednej przeskalowanej funkcji ψ mają dobre własności aproksymacyjne wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja ψ odtwarza wielomiany. Przestrzenie takie konstruuje się w teorii falek oraz w metodzie elementów skończonych.

Dobrych przykładów funkcji o powyższych własnościach dostarczają pudełkowe funkcje gięte.

6. Algorytm rozdrobnienia

Algorytm rozdrobnienia (ang. *subdivision algorithm*), zob. [DDL], służy między innymi do graficznego przedstawienia pudełkowych funkcji giętych. Oparty jest on na tym, iż pudełkowa funkcja gięta B_V jest samoodtwarzalna. Mianowicie, funkcję B_V można odtworzyć za pomocą kombinacji liniowej przeskalowanej funkcji B_V oraz jej translacji po kracie

$$\{B_h(\cdot - \mu|V) : \mu \in hZ^n\}, \quad h = 1/k.$$

Twierdzenie 6.1

Załóżmy, że dana jest funkcja

$$G(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a^1(\alpha) B(x - \alpha|V)$$

dla pewnej rodziny dopuszczalnej V . Wówczas dla dowolnego $k \in N \setminus \{0\}$ oraz $h = 1/k$ istnieje ciąg współczynników $a^k = \{a^k(\mu)\}_{\mu \in hZ^n}$ taki, że

$$(6.2) \quad G(x) = B_h(\cdot|V) *_h a^k.$$

Przy czym jeśli $\rho_V \geq 1$, to (6.2) zachodzi dla każdego $x \in R^n$. Jeśli $\rho_V = 0$, to (6.2) nie zachodzi jedynie w zbiorze nieciągłości funkcji występujących w tym równaniu.

Uwaga. Sposób wyliczania ciągu współczynników a^k nazywamy algorytmem rozdrobnienia. Współczynniki tego ciągu dążą przy $k \rightarrow \infty$ do punktów powierzchni $G(x)$. Stąd nazywamy je **maską**.

Założymy, że pierwsze n -wektory z V są bazą standardową w R^n ,

$$(6.3) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wprowadzimy operator dyskretnego „całkowania” w kierunku wektora $y \in Z^n$, określony na ciągach

$$b = \{b(\mu)\}_{\mu \in \frac{1}{k}Z^n}$$

z krokiem $1/k$ o wartościach w przestrzeni ciągów:

$$(6.4) \quad (I_k(y)b)(\mu) = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} b(\mu - \frac{j}{k}y), \quad \mu \in \frac{1}{k}Z^n.$$

Algorytm rozdrobnienia

Krok 1

Ustalmy k . Dla dowolnego $\mu \in \frac{1}{k}Z^n$ istnieje dokładnie jeden wektor $\alpha \in Z^n$ taki, że

$$0 \leq \mu_i - \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiujemy ciąg $c^1 = \{c^1(\mu)\}_{\mu \in \frac{1}{k}Z^n}$, przyjmując

$$c^1(\mu) = a^1(\alpha).$$

Krok rekurencyjny

Dla $2 \leq l \leq s - n + 1$ definiujemy ciąg $c^l = \{c^l(\mu)\}_{\mu \in \frac{1}{k}Z^n}$ wzorem

$$(6.5) \quad c^l(\mu) = (I_k(v_{l+n-1})c^{l-1})(\mu), \quad \mu \in \frac{1}{k}Z^n.$$

Twierdzenie 6.1 wynika z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 6.6

Przy założeniach tw. 6.1 oraz oznaczeniach algorytmu rozdrobnienia zachodzi

$$a^k = c^{s-n+1}.$$

Dowód. Indukcja względem s . Bez straty ogólności możemy założyć, że

$$G(\cdot) = B_V(\cdot).$$

Dla $s = n$ oraz przy założeniu (6.3) B_V jest funkcją charakterystyczną kostki $[0, 1]^n$. Wykonujemy krok 1 algorytmu i otrzymujemy (6.2). Niech $s > n$.

Wówczas

$$B_V(x) = \int_0^1 B(x - tv_s | V \setminus v_s) dt.$$

Z założenia indukcyjnego wynika, że dla ciągu

$$c^{s-n} = \{c^{s-n}(\mu)\}_{\mu \in \frac{1}{k}Z^n},$$

otrzymanego poprzez algorytm rozdrobnienia dla rodziny $V \setminus v_s$ i funkcji $B(\cdot | V \setminus v_s)$, zachodzi

$$B(\cdot | V \setminus v_s) = \sum_{\mu \in \frac{1}{k}Z^n} c^{s-n}(\mu) B(k(x - \mu) | V \setminus v_s).$$

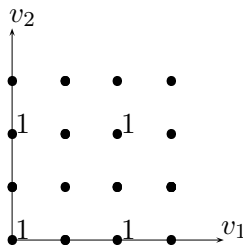
Szukane współczynniki

Jak znaleźć maskę dla dowolnej funkcji $B(\cdot|V)$? W przykładzie 6.8 pokażemy, jak zdefiniować krok pierwszy algorytmu rozdrobnienia, jeśli rodzina V nie spełnia założenia (6.3). Ogólnie ciąg c^1 tak dobieramy, żeby dla podrodziny dopuszczalnej $W \subset V$ zachodziła:

$$B(x|W) = \sum_{\mu \in \frac{1}{k}Z^n} c^1(\mu) B(k(x - \mu)|W).$$

Formuła ta nie jest jednoznaczna.

Przykład 6.8



Szukane współczynniki

Zauważmy, że

Niech

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

oraz $k = 2$. Wówczas $B(\cdot|W)$ jest funkcją charakterystyczną kwadratu

$$[0, 2] \times [0, 2].$$

Szukamy współczynników

$$c^1(\mu) : \mu \in \frac{1}{2}Z^2.$$

$$B(x|W) = \sum_{\mu \in \frac{1}{2}Z^2} c^1(\mu) B(2(x - \mu)|W) =$$

$$= B(2x|W) + B(2x - (2, 0)|W) + B(2x - (2, 2)|W) + B(2x - (0, 2)|W).$$

Przykład 6.9

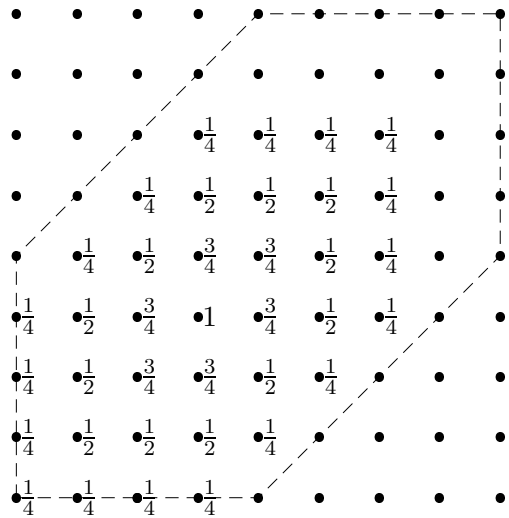
Przyjmijmy $k = 4$ oraz

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ciąg $a^4 = \{a^4(\mu)\}_{\mu \in \frac{1}{4}Z^2}$,

$$B(x|V) = \sum_{\mu \in \frac{1}{4}Z^2} a^4(\mu) B(4(x - \mu)|V)$$

ma następujące przedstawienie:



Maska

Zauważmy, że najbliższe dwie wartości ciągu a^4 różnią się nie więcej niż o $\frac{1}{4}$. Wprowadzemy oznaczenie dla $\mu, \nu \in \frac{1}{k}Z^n$

$$|\mu - \nu|_1 = \max_{j=1,2} |\mu_j - \nu_j|.$$

Okazuje się, co pokażemy, że dla dowolnego k oraz $|\mu - \nu|_1 \leq \frac{1}{k}$

$$(6.10) \quad |a^k(\mu) - a^k(\nu)| \leq \frac{1}{k}.$$

Ponieważ

$$B(\alpha|V) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \alpha = (1, 1) \\ 0 & \text{dla pozostałych } \alpha, \end{cases}$$

więc dla $\nu \in \frac{1}{k}Z^2$

$$B(\nu|V) = \sum_{\mu \in \frac{1}{k}Z^2} a^k(\mu) B(k(\nu - \mu)|V) = a^k(\nu + (1/k, 1/k)).$$

Stąd

$$|a^k(\mu) - a^k(\nu)| = |B(\mu - (1/k, 1/k)|V) - B(\nu - (1/k, 1/k)|V)|.$$

Funkcja $B(x|V)$ jest ciągła i kawałkami liniowa, por. przykład 2.23. Ponieważ jej pochodne cząstkowe są ograniczone przez jeden, zatem dla $|\mu - \nu|_1 \leq \frac{1}{k}$ z twierdzenia Lagrange'a:

$$|a^k(\mu) - a^k(\nu)| \leq |\mu - \nu|_1 = \frac{1}{k}.$$

Lemat 6.11

Dla dowolnej rodziny W , zawierającej rodzinę V z przykładu 6.9 oraz funkcji

$$G(x) = \sum_{\alpha \in Z^2} a(\alpha) B(x - \alpha | W),$$

zachodzi:

$$(6.12) \quad |a^k(\mu) - a^k(\nu)| \leq \frac{1}{k} \max\{|a(\alpha) - a(\beta)| : |\alpha - \beta|_1 \leq 1\},$$

gdzie $|\mu - \nu|_1 \leq \frac{1}{k}$.

Dowód. Z (6.10) nierówność (6.12) zachodzi dla rodziny $W = V$. Wystarczy teraz pokazać, że schemat algorytmu rozdrobnienia „nie psuje” oszacowania z tezy lematu. Zatem założymy, że

$$|c^{l-1}(\mu) - c^{l-1}(\nu)| \leq \frac{1}{k} \max\{|a(\alpha) - a(\beta)| : |\alpha - \beta|_1 \leq 1\},$$

dla $|\mu - \nu|_1 \leq \frac{1}{k}$ oraz $l > 2$. Wówczas

$$\begin{aligned} |c^l(\mu) - c^l(\nu)| &= |I_k(v_{l+1})(c^{l-1})(\mu) - I_k(v_{l+1})(c^{l-1})(\nu)| \leq \\ &\leq \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} |c^{l-1}(\mu - \frac{j}{k}v_{l+1}) - c^{l-1}(\nu - \frac{j}{k}v_{l+1})|. \end{aligned}$$

Stosując założenie indukcyjne, otrzymujemy tezę lematu. ◇

Następne twierdzenie podaje nam szybkość zbieżności współczynników algorytmu rozdrobnienia.

Twierdzenie 6.13

Niech $\rho_V \geq 1$ oraz $\mathbf{V}Z^s = Z^n$. Wówczas dla powierzchni

$$G(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) B(x - \alpha | V)$$

istnieje stała C zależna od V taka, że dla ciągu $a^k = \{a^k(\mu)\}_{\mu \in 1/kZ^n}$ otrzymanego poprzez algorytm rozdrobnienia

$$(6.14) \quad |a^k(\mu) - G(\mu + \frac{1}{k}c_V)| \leq C \left(\frac{1}{k}\right) \max\{|a(\alpha) - a(\beta)| : |\alpha - \beta|_1 \leq 1\}.$$

Dowód. Do dowodu nierówności (6.14) jest potrzebna nierówność typu (6.12) (o wygładzaniu współczynników poprzez algorytm rozdrobnienia) dla dowolnej rodziny V . Załóżmy dla prostoty, że rodzina V zawiera rodzinę z przykładu 6.9. Wówczas:

$$\begin{aligned} |a^k(\mu) - G(\mu + \frac{1}{k}c_V)| &= |a^k(\mu) - B_h(\cdot|V) *_h a^k)(\mu + \frac{1}{k}c_V)| \leq \\ &\leq \sum_{\nu \in \frac{1}{k}Z^n} |a^k(\mu) - a^k(\nu)| B(k(\mu - \nu) + c_V|V). \end{aligned}$$

Ponieważ nośnik funkcji $B(\cdot + c_V|V)$ jest ograniczony, zatem w ostatnim wyrażeniu sumujemy po ν takich, że

$$|\mu - \nu|_1 < \frac{L}{k},$$

gdzie stała L jest równa połowie długości średnicy zbioru $\langle V \rangle$. Stąd oraz z (6.12) otrzymujemy (6.14). ◇

Podamy teraz proste zastosowanie algorytmu rozdrobnienia. Ustalmy rodzinę

$$V = \{v_1, v_1, v_2, v_2, v_0\},$$

gdzie

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naszym celem jest narysowanie funkcji $B(\cdot|V)$. Podamy algorytm w języku Mathematica oraz zaprezentujemy rysunki otrzymane w tym algorytmie. Macierz $C1$ opowiadać będzie wartościom funkcji $B(\cdot|\{v_1, v_2\})$, odpowiednio:

- $C2 - B(\cdot|\{v_1, v_2, v_0\})$
- $C3 - B(\cdot|\{v_1, v_1, v_2, v_0\})$
- $C4 - B(\cdot|\{v_1, v_1, v_2, v_2, v_0\})$.

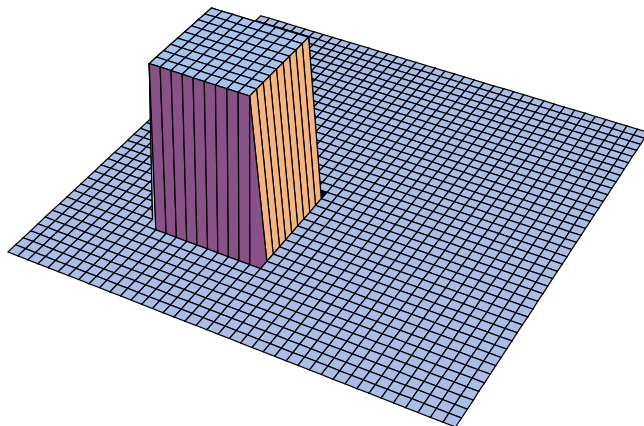
Algorytm wyliczający wartości kolejnych funkcji i zapisujący je w macierzy 40×40 wygląda następująco:

```
C1=Table[0, {k,0,40}{n,0,40}]; C4=C3=C2=C1;
```

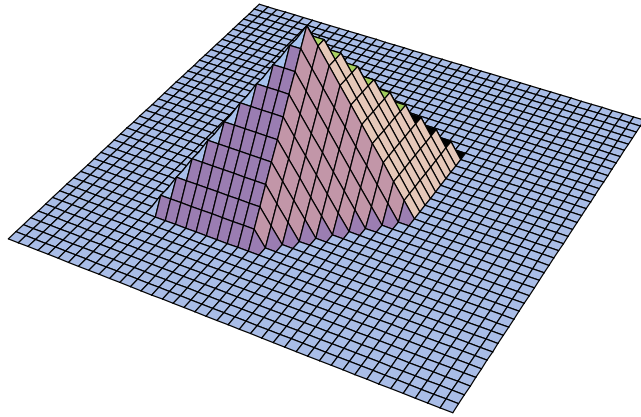
```

Do[
  Do[C1[[k,n]]=1,{k,10,19},{n,10,19}]
Do[
  Do[
    Do[C2[[k,n]]=C2[[k,n]]+0.1C1[[k-j,n-j]],
      {j,0,9}],
    {k,10,30}],
  {n,10,30}]
Do[
  Do[
    Do[C3[[k,n]]=C3[[k,n]]+0.1C2[[k-j,n]],
      {j,0,9}],
    {k,10,40}],
  {n,10,40}]
Do[
  Do[
    Do[C4[[k,n]]=C4[[k,n]]+0.1C3[[k,n-j]],
      {j,0,9}],
    {k,10,40}],
  {n,10,40}]
ListPlot3D[C1, PlotRange->{0,1}]

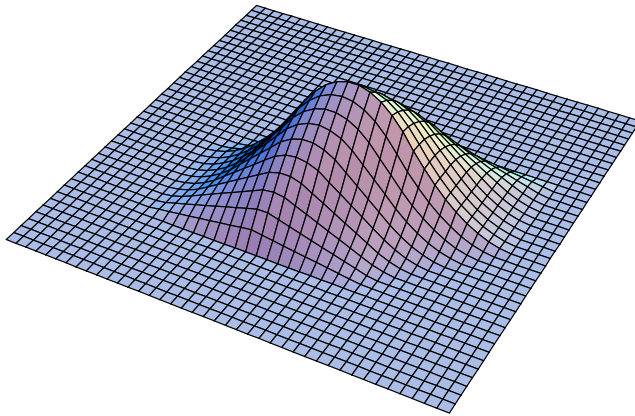
```



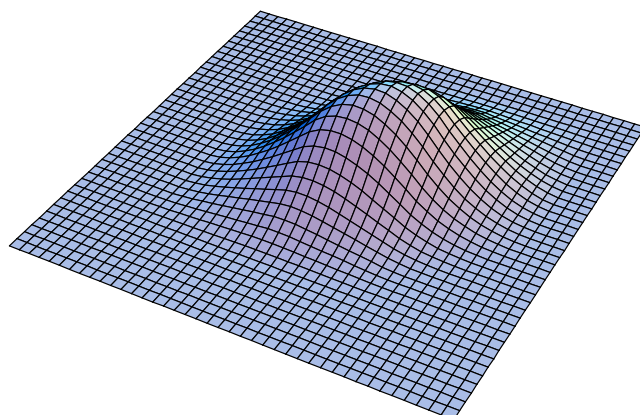
Funkcja $B(\cdot)$ ($\{v_1, v_2\}$)



Funkcja $B(\cdot|\{v_1, v_2, v_0\})$



Funkcja $B(\cdot|\{v_1, v_1, v_2, v_0\})$



Funkcja $B(\cdot|\{v_1, v_2, v_0\})$

7. Liniowa niezależność

W tym rozdziale przedstawimy jedynie główne rezultaty zawarte w pracy [DM1]. Dowody tych twierdzeń są pracochłonne, aczkolwiek elementarne. Niech

$$D_W = \prod_{v \in W} D_v$$

będzie operatorem różniczkowym związanym z rodziną W . Najzgrabniej jądro operatora różniczkowego $\text{Ker}D_W$ definiuje się na przestrzeni dystrybucji. Bez straty ogólności możemy określić je na przestrzeni funkcji m -krotnie różniczkowalnych w sposób ciągły, gdzie $m = \#W$,

$$\text{Ker}D_W = \{F \in C^m(R^n) : D_W F = 0\}.$$

Niech

$$\Lambda = \{W \subset V : \text{span}\{V \setminus W\} \neq R^n\}.$$

Podamy teraz twierdzenie będące rozszerzeniem twierdzenia 2.15. Zgodnie z (3.4) przez $S(B_V)$ oznaczamy przestrzeń rozpiętą przez kombinacje liniowe całkowitych translacji funkcji B_V .

Twierdzenie 7.1

Niech V będzie rodziną dopuszczalną. Jeśli Π oznacza przestrzeń wielomianów, to

$$(7.2) \quad \Pi \cap S(B_V) = \bigcap_{W \in \Lambda} \text{Ker}D_W.$$

Twierdzenie to pozostawimy bez dowodu. W równaniu (7.2) zawieranie w jedną stronę

$$\Pi \cap S(B_V) \subset \bigcap_{W \in \Lambda} \text{Ker}D_W.$$

wynika z twierdzenia 2.9. Zawieranie w drugą stronę udowadnia się indukcyjnie względem ilości wektorów, porównaj [DM1], [H],[BHR]. Wykorzystuje się fakt, że

$$\bigcap_{W \in \Lambda} \text{Ker}D_W \subset \Pi.$$

Maksymalną przestrzeń wielomianów zawartą w $S(B_V)$ będziemy oznaczać przez $D(V)$;

$$(7.3) \quad D(V) = \Pi \cap S(B_V).$$

Okazuje się, że można skonstruować bazę wielomianów przestrzeni $D(V)$, co pozwala wyliczyć jej wymiar.

Definicja 7.4

Całkowite translacje $\{B(\cdot - \alpha|V) : \alpha \in Z^n\}$ są **liniowo niezależne**; jeśli dla każdego zbioru otwartego $\Omega \subset R^n$

$$\sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha)B_V(x - \alpha) = 0 \quad \text{dla } x \in \Omega,$$

to

$$a(\alpha) = 0 \quad \text{dla } \alpha \in \{\alpha \in Z^n : \Omega \cap \text{supp}B_V(\cdot - \alpha) \neq \emptyset\}.$$

Definicja 7.5

Rodzinę wektorów $V \subset Z^n \setminus 0$ nazywamy **unimodularną**, jeśli jest dopuszczalna oraz

$$\bigwedge_{X \subset V} \#X = n \Rightarrow |\det X| \leq 1.$$

Powyższe rozważania prowadzą do poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 7.6

Następujące warunki są równoważne:

(7.7) V jest unimodularna,

(7.8) całkowite translacje $\{B(\cdot - \alpha|V)\} : \alpha \in Z^n$ są liniowo niezależne,

(7.9) istnieje funkcja ograniczona λ o nośniku zawartym w dowolnie małej kuli taka, że

$$(\lambda, B(\cdot - \alpha|V))_{R^n} = \delta_{0,\alpha}.$$

Dowód równoważności (7.7) i (7.8) czytelnik znajdzie w [DM1], [BHR]. Oparty jest on na wyliczeniu wymiaru przestrzeni $D(V)$, co można uzyskać przez wskazanie bazy. Równoważność warunków (7.8) i (7.9) jest natychmiastowa.

8. Funkcja fundamentalna

Skonstruujemy funkcję fundamentalną.

Lemat 8.1

Następujące warunki są równoważne:

(8.2) V jest unimodularny,

(8.3) nie istnieje $x \in R^n$ taki, że transformata Fouriera funkcji B_V znika w punktach $x - \alpha$ dla wszystkich $\alpha \in Z^n$;

$$\{x \in R^n : \bigwedge_{\alpha \in Z^n} \widehat{B_V}(x - \alpha) = 0\} = \emptyset.$$

Dowód. (8.2) \Rightarrow (8.3). Załóżmy, że istnieje $x \in R^n$ taki, że

$$(8.4) \quad \widehat{B_V}(x) = 0.$$

Pokażemy, że istnieje $\alpha \in Z^n$ taki, że

$$(8.5) \quad \widehat{B_V}(x - \alpha) \neq 0.$$

Ponieważ zachodzi (8.4) z postaci transformaty Fouriera (1.9), wnosimy, że istnieje wektor v_j taki, że

$$v_j \cdot x = k_j, \quad \text{gdzie } k_j \in Z \setminus 0.$$

Wyberzmy z rodziny V maksymalny układ wektorów v_{i_1}, \dots, v_{i_r} takich, że

$$(8.6) \quad v_{i_s} \cdot x = k_s \in Z \quad s = 1, \dots, r,$$

(Układ maksymalny oznacza, że jeśli $v \in V$ i $v \cdot x \in Z$, to istnieją współczynniki a_s takie, że

$$v = \sum_{s=1}^r a_s v_{i_s}.$$

Ponadto, wektory te są liniowo niezależne.)

Jeśli teraz liczba wektorów $r = n$, to (8.6) tworzy układ liniowy Cramera, $\mathbf{A}x = b$. Ponieważ V jest unimodularne, więc $|\det \mathbf{A}| = 1$. Ze wzorów Cramera wynika, że $x \in Z^n$. Stąd dla $\alpha = x \in Z^n$ spełniony jest warunek (8.5), gdyż

$$\widehat{B_V}(0) \neq 0.$$

Jeśli $r < n$, to układ v_{i_1}, \dots, v_{i_r} uzupełniamy do bazy w R^n wektorami $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}} \in V$. Utwórzmy układ n -równań (α niewiadoma)

$$\begin{cases} v_{i_s} \cdot \alpha = k_s & s = 1, \dots, r \\ v_l \cdot \alpha = 0 & l = i_1, \dots, i_{n-r}. \end{cases}$$

Układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie α . Ponadto, z unimodularności V wynika, że moduł wyznacznika macierzy głównej powyższego układu równań jest równy jeden. Stąd macierz odwrotna ma współczynniki całkowite. Zatem rozwiązanie układu $\alpha \in Z^n$ oraz

$$v \cdot (x - \alpha) \notin Z \setminus \{0\} \quad \text{dla } v \in V.$$

Z postaci transformaty Fouriera wynika, że

$$\widehat{B}_V(x - \alpha) \neq 0.$$

(8.3) \Rightarrow (8.2). Dowód nie wprost. Załóżmy, że istnieje $Y \subset V$ taki, że $\#Y = n$ oraz $|\det \mathbf{Y}| > 1$. Wówczas istnieje

$$\beta \in Z^n \setminus \mathbf{Y}^T(Z^n),$$

\mathbf{Y}^T oznacza macierz transponowaną. Przyjmijmy $x = (\mathbf{Y}^T)^{-1}\beta$. Wówczas: dla dowolnego $\alpha \in Z^n$:

$$\mathbf{Y}^T(x - \alpha) = \beta - \mathbf{Y}^T\alpha \in Z^n \setminus \{0\}.$$

Zatem dla każdego α istnieje $v \in Y$ taki, że

$$v \cdot (x - \alpha) \in Z \setminus \{0\}.$$

Stąd

$$\bigwedge_{\alpha \in Z^n} \widehat{B}_V(x - \alpha) = 0.$$

◇

Lemat 8.7

Założmy, że rodziny V, W są dopuszczalne. Wówczas

$$(8.8) \quad (B(\cdot|V) * B(\cdot|W))(x) = B(x|V, W),$$

gdzie rodzina V, W składa się z wektorów V i W .

Dowód. Korzystając z twierdzenia Fubinięgo o zamianie kolejności całkowania oraz ze wzoru (1.8), można pokazać, że dla funkcji ciągłej f :

$$\int_{R^n} f(x)(B(\cdot|V) * B(\cdot|W))(x) dx = \int_{R^n} f(x)B(x|V, W) dx.$$

Ponieważ

$$\text{supp}(B(\cdot|V) * B(\cdot|W)) = \text{supp}B(\cdot|V) + \text{supp}B(\cdot|W) = \text{supp}B(\cdot|V, W),$$

więc z lematu A 1 otrzymujemy (8.8). ◇

Sformułujemy jeszcze jeden prosty lemat, którego dowód wynika także z własności (1.8).

Lemat 8.9

Niech V będzie rodziną dopuszczalną. Wówczas

$$B(\cdot| - V) = B(- \cdot |V)$$

oraz

$$(B(\cdot| - V))^{\wedge} = \overline{(B(\cdot|V))^{\wedge}},$$

gdzie $-V$ oznacza rodzinę wektorów przeciwnych do V , zaś w drugim równaniu linia jest sprzężeniem liczby zespolonej.

Żałóźmy, że rodzina V jest dopuszczalna. Przyjmijmy

$$X = \{V, -V\}.$$

Zauważmy, że funkcja $B(\cdot|X)$ jest symetryczna względem zera.

Twierdzenie 8.10

Następujące warunki są równoważne:

(8.11) V jest unimodularny,

(8.12) wielomian trygonometryczny

$$P_X(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} B(\alpha|X)e^{2\pi i \alpha \cdot x} \neq 0$$

dla każdego $x \in R^n$.

Dowód. Zastosujmy lemat A 3 do funkcji

$$\phi(x) = B(x|V) \quad \text{oraz} \quad \psi(x) = B(x| - V).$$

Stąd

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha \in Z^n} B(\widehat{\cdot|V})(x - \alpha) B(\widehat{\cdot|-V})(x - \alpha) = \\ & = \sum_{\alpha \in Z^n} (B(\cdot|V) * B(\cdot|-V))(-\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x}. \end{aligned}$$

Z lematu 8.7

$$B(x|X) = (B(\cdot|V) * B(\cdot|-V))(x),$$

zaś z lematu 8.9

$$B(\widehat{\cdot|V})(x) B(\widehat{\cdot|-V})(x) = |B(\widehat{\cdot|V})|^2(x),$$

zatem

$$(8.13) \quad \sum_{\alpha \in Z^n} |B(\widehat{\cdot|V})|^2(x - \alpha) = \sum_{\alpha \in Z^n} B(\alpha|X) e^{2\pi i \alpha \cdot x}.$$

Porównując z lematem 8.1 otrzymamy żadaną równoważność. \diamond

Do końca rozdziału będziemy zakładać, że V jest unimodularna. Z (8.12) wielomian trygonometryczny P_X jest różny od zera dla każdego $x \in R^n$, zatem funkcja $\frac{1}{P_x}$ ma sens. Zauważmy, że jest ona okresowa (bo P_X jest okresowa), nieskończenie razy różniczkowalna. Zatem możemy ją rozwinąć w szereg Fouriera:

$$(8.14) \quad \frac{1}{P_X(x)} = \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x},$$

gdzie:

$$(8.15) \quad b_X(\alpha) = \int_{[0,1]^n} \frac{1}{P_X(x)} e^{-2\pi i \alpha \cdot x} dx.$$

Lemat 8.16

Niech V będzie rodziną unimodularną. Ciąg współczynników

$$b_X = \{b_X(\alpha)\}$$

rozwinęcia funkcji $1/P_X$ maleje eksponencjalnie, tzn. istnieją stałe $C > 0$ i $0 < q < 1$ takie, że

$$(8.17) \quad |b_X(\alpha)| \leq C q^{||\alpha||} \quad \alpha \in Z^n.$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla wymiaru $n = 1$. Wielomianowi trygonometrycznemu P_X przyporządkujemy wielomian zespolony

$$p_X(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} B(k|X)z^k, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Ponieważ $P_X(x) = p_X(e^{2\pi i x})$, więc z twierdzenia 8.10

$$p_X(z) \neq 0 \quad \text{dla } |z| = 1.$$

Z ciągłości funkcji p_X wynika, że istnieje pierścień, na którym funkcja nie znika, tj. istnieją $0 < q_1 < 1 < q_2$ takie, że

$$p_X(z) \neq 0, \quad q_1 < |z| < q_2.$$

Stąd $\frac{1}{p_X}$ jest funkcją holomorficzną w pierścieniu:

$$\{z \in \mathbb{C} : q_1 < |z| < q_2\}.$$

Z twierdzenia Laurenta [L] funkcja ta daje się przedstawić w postaci szeregu Laurenta:

$$\frac{1}{p_X(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_X(k)z^k \quad z \in \{z \in \mathbb{C} : R_1 \leq q_1 < |z| < q_2 \leq R_2\}.$$

Promienie zbieżności tego szeregu są równe:

$$R_1 = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_X(-k)|},$$

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|b_X(k)|}}.$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją stałe dodatnie C_1, C_2 takie, że

$$|b_X(-k)| \leq C_1 (R_1 + \varepsilon)^k, \quad k \geq 0,$$

oraz

$$|b_X(k)| \leq C_2 \left(\frac{1}{R_2} + \varepsilon \right)^k, \quad k \geq 0.$$

Przyjmując:

$$C = \max\{C_1, C_2\}$$

oraz

$$q = \max \left\{ R_1 + \varepsilon, \frac{1}{R_2} + \varepsilon \right\},$$

otrzymujemy nierówność (8.17). ◇

Definicja 8.18

Funkcją fundamentalną odpowiadającą rodzinie unimodularnej

$$X = \{V, -V\}$$

nazywamy funkcję giętą, daną wzorem

$$(8.19) \quad \Phi_X = \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) B(\cdot - \alpha | X).$$

Z kryterium Weierstrassa szereg ten jest zbieżny jednostajnie.

Pokażemy, że funkcja Φ_X przyjmuje wartość jeden w zerze, zaś w pozostałych punktach całkowitych wartość zero. Przypomnijmy w tym celu jeszcze jedną własność elementarną szeregów nieskończonych. Mianowicie, jeżeli dane są dwie funkcje:

$$f(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x}, \quad \text{gdzie} \quad \sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)| < \infty,$$

$$g(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} b(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x} \quad \text{gdzie} \quad \sum_{\alpha \in Z^n} |b(\alpha)| < \infty,$$

to ich iloczyn jest równy iloczynowi Cauchy'ego szeregów,

$$(8.20) \quad f(x)g(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} (a * b)(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x}.$$

Zatem

$$(8.21) \quad 1 = P_X(x) \cdot \frac{1}{P_X(x)} = \sum_{\alpha \in Z^n} (b_X * B(\cdot | X))(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x}.$$

Z jednoznaczności przedstawienia wynika, że

$$(8.22) \quad (b_X * B(\cdot | X))(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \alpha \neq 0 \\ 1 & \text{dla } \alpha = 0, \end{cases}$$

czyli

$$\Phi_X(\beta) = (b_X * B(\cdot | X))(\beta) = \delta_0(\beta).$$

Lemat 8.23

Funkcja Φ_X maleje eksponencjalnie; czyli istnieją stałe $C > 0$ i $0 < q < 1$ takie, że

$$(8.24) \quad |\Phi_X(x)| \leq Cq^{\|x\|} \quad \text{dla } x \in R^n.$$

Dowód. Przez C oznaczamy różne stałe występujące w dowodzie. Z (8.17) otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$|\Phi(x)| \leq C \sum_{\alpha \in Z^n} q^{|\alpha|} B(x - \alpha|X).$$

Jeśli L oznacza średnicę nośnika funkcji $B(\cdot|X)$, to w sumie występują tylko te wskaźniki α , dla których

$$\|x\| - L \leq \|\alpha\| \leq \|x\| + L.$$

Ponieważ $0 < q < 1$, więc z wniosku 2.17 otrzymujemy

$$|\Phi_X(x)| \leq Cq^{-L}q^{\|x\|} \sum_{\alpha \in Z^n} B(x - \alpha|X) = Cq^{\|x\|}.$$

Przykład 8.25

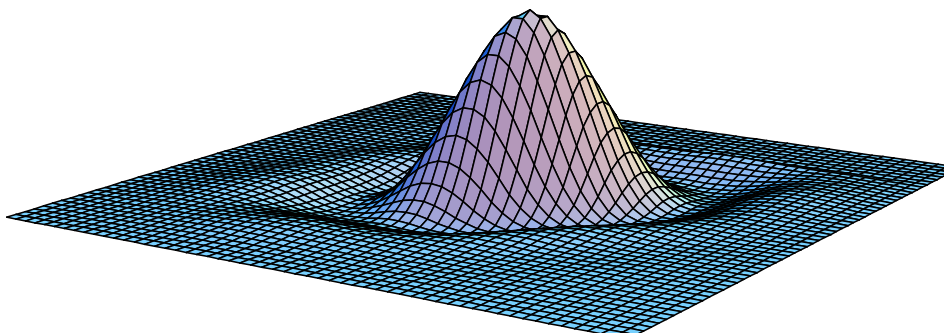
Poniżej prezentujemy funkcję fundamentalną odpowiadającą rodzinie X złożonej z wektorów

$$v_1, -v_1, v_2, -v_2, v_0, -v_0,$$

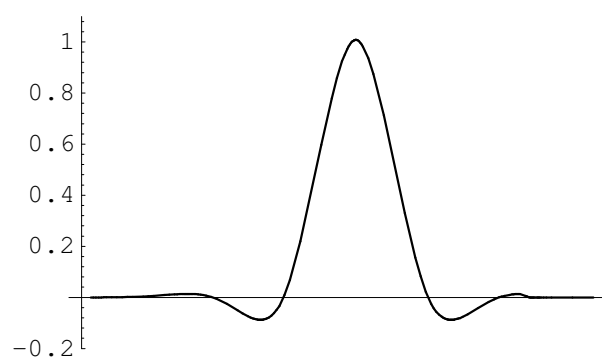
gdzie

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (0, 1), \quad v_0 = (1, 1).$$

Ciąg współczynników b_X z (8.17) został oszacowany na podstawie wzoru (9.10). Korzystając z algorytmu rozdrobnienia, otrzymano wykres funkcji fundamentalnej.



Funkcja fundamentalna



Przekrój funkcji fundamentalnej wzdłuż prostej $y=x$

9. Interpolacja

Zbadamy teraz własności aproksymacyjne operatora interpolacji. Będziemy zakładać, że V jest unimodularna oraz

$$X = \{V, -V\}.$$

Własności funkcji fundamentalnej Φ_X umożliwiają zdefiniowanie **operatora interpolacji** na kracie Z^n dla ograniczonych funkcji ciągłych

$$(9.1) \quad I(g) = I^X(g) = \sum_{\alpha \in Z^n} g(\alpha) \Phi_X(\cdot - \alpha).$$

Stosując (8.19) oraz przyjmując $g| = \{g(\alpha)\}_{\alpha \in Z^n}$, otrzymamy

$$(9.2) \quad \begin{aligned} I(g) &= \Phi_X *' g = (B_X * b_X) * g| = \\ &= B_X * (b_X * g|) = \sum_{\alpha \in Z^n} (g * b_X)(\alpha) B(\cdot - \alpha|X). \end{aligned}$$

Zauważmy, że również dla dowolnego wielomianu p definicja (9.1) ma sens. Dowód przeprowadzimy dla wymiaru $n = 1$. Jeśli $p(x) = x^k$, to korzystając z oszacowania (8.24) otrzymamy

$$|I(p)(x)| \leq \sum_{j \in Z} |j|^k q^{|x-j|}.$$

Z reguły de l'Hospitala wynika, że przy ustalonym $x \in R$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^k}{(\sqrt{q})^{-|x-y|}} = \frac{1}{(\sqrt{q})^x} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^k}{(\sqrt{q})^{-y}} = 0.$$

Stąd istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdego $j > 0$

$$j^k (\sqrt{q})^{|x-j|} < C.$$

Zatem

$$\sum_{j \in Z} |j|^k q^{|x-j|} \leq C \sum_{j \in Z} \sqrt{q}^{|x-j|} < \infty.$$

Stąd (9.1) ma więc sens dla dowolnego wielomianu p . Analogicznie również (9.2) ma sens dla dowolnego wielomianu p . Ponadto $p * b_X$ jest wielomianem, którego stopień jest nie większy niż stopień wielomianu p .

Przeskalowując funkcję fundamentalną o h możemy zdefiniować operator interpolacji na kracie zawężonej hZ^n :

$$(9.3) \quad \begin{aligned} I_h(g)(x) &= \sum_{\mu \in hZ^n} g(\mu) \Phi_X \left(\frac{x - \mu}{h} \right) = \\ &= \sum_{\alpha \in Z^n} g(h\alpha) \Phi_X(x/h - \alpha) = I(g_{\frac{1}{h}})(x/h). \end{aligned}$$

By zaznaczyć, że operator ten jest związany z rodziną X , będziemy go oznaczać również poprzez I_h^X .

Lemat 9.4

Zachodzi formuła odwrotna do (8.19). Mianowicie

$$(9.5) \quad B(\cdot|X) = \sum_{\alpha \in Z^n} B(\alpha|X) \Phi_X(\cdot - \alpha).$$

Ponadto dla każdego wielomianu $p \in \Pi_{\varrho_X}$ $I(p) = p$.

DOWÓD. Biorąc obustronnie transformatę Fouriera w równaniu (8.19), otrzymamy

$$(9.6) \quad \widehat{\Phi_X}(\xi) = \widehat{B_X}(\xi) \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot \xi}.$$

Z (8.14) i (9.6) wynika, że

$$\widehat{\Phi_X}(\xi) \sum_{\alpha \in Z^n} B(\alpha|X) e^{2\pi i \alpha \cdot \xi} = \widehat{B_X}(\xi).$$

Biorąc odwrotną transformatę Fouriera, por. lemat A 4 (por. Wprowadzenie), otrzymujemy dla dowolnej funkcji ciągłej G o zwartym nośniku

$$\int_{R^n} G(x) \left(B(x|X) - \sum_{\alpha \in Z^n} B(\alpha|X) \Phi_X(x - \alpha) \right) dx = 0.$$

Funkcje po obu stronach (9.5) są ciągłe. Lemat A 1 pociąga (9.5).

Ponieważ

$$I(p)(\alpha) = p(\alpha) \quad \text{dla każdego } \alpha \in Z^n,$$

więc wystarczy pokazać, że $I(p)$ jest wielomianem. Ponieważ $p \in \Pi_{\varrho_X}$, więc $p * b_X \in \Pi_{\varrho_X}$. Stąd z (2.15)

$$I(p)(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} (p * b_X)(\alpha) B(x - \alpha|X) \in \Pi_{\varrho_X}.$$

◇

Twierdzenie 9.7

Istnieje stała C taka, że dla każdej funkcji $f \in W_\infty^{2\varrho_V+1}$

$$(9.8) \quad \|I_h(f) - f\|_\infty \leq Ch^{2\varrho_V+1} \|f\|_{2\varrho_V+1, \infty}.$$

Dowód. Niech funkcja f spełnia założenia twierdzenia. Ustalmy $x \in \mathbb{R}^s$. Niech P_x oznacza wielomian Taylora funkcji f stopnia $k - 1$. Ponieważ $P_x(x) = f(x)$, zatem

$$|(I_h f - f)(x)| = |(I_h f - P_x)(x)|.$$

Z lematu 9.4 wynika, że $I_h(P_x) = P_x$. Stąd

$$|(I_h f - f)(x)| = |(I_h(f - P_x))(x)|.$$

Ponieważ

$$|f(y) - P_x(y)| \leq C \|f\|_{k, \infty} \|x - y\|^k,$$

więc

$$\begin{aligned} |(I_h f - f)(x)| &\leq \sum_{\alpha \in hZ^n} |f(\alpha) - P_x(\alpha)| |(\Phi_X)_h(x - \alpha)| \leq \\ &\leq C \|f\|_{k, \infty} \sum_{\alpha \in hZ^n} \|\alpha - x\|^k |\Phi_X\left(\frac{x - \alpha}{h}\right)| \leq \\ &\leq C \|f\|_{k, \infty} \sum_{\alpha \in Z^n} h^k \|\alpha - x/h\|^k |\Phi_X(x/h - \alpha)|. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja Φ_X maleje eksponencjalnie (8.24), więc

$$\begin{aligned} |(I_h f - f)(x)| &\leq C \|f\|_{k, \infty} \sum_{\alpha \in Z^n} h^k \|\alpha - x/h\|^k q^{|\alpha - x/h|} \leq \\ &\leq C \|f\|_{k, \infty} h^k \sum_{\alpha \in Z^n} \|\alpha - x/h\|^k q^{|\alpha - x/h|}. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja okresowa

$$g(y) = \sum_{\alpha \in Z^n} \|\alpha - y\|^k q^{|\alpha - y|}$$

jest skończona, więc otrzymujemy tezę twierdzenia.

◇

Przypomnijmy oznaczenia z rozdziału trzeciego.

$$m = \delta - B_X|,$$

gdzie $B_X| = \{B(\alpha|X)\}$.

Lemat 9.9

Ciąg współczynników b_X ma następujące rozwinięcie Neumanna:

$$(9.10) \quad b_X = \delta + m + m^2 + m^3 + \dots$$

Ponadto, m^j spełnia nierówność

$$(9.11) \quad |m^j(\alpha)| \leq \left(1 - \min_{\xi} P_X(\xi)\right)^j,$$

gdzie

$$(9.12) \quad 0 < \min_{\xi} P_X(\xi) \leq 1.$$

Dowód. Niech

$$\tilde{m}(\xi) = \sum_{\alpha \in Z^n} m(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot \xi} = 1 - P_X(\xi).$$

Zauważmy, że

$$(\tilde{m}(\xi))^2 = \tilde{m}(\xi) \tilde{m}(\xi) = \sum_{\alpha \in Z^n} (m * m)(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot \xi} = (\widetilde{m^2})(\xi),$$

czyli

$$(\tilde{m}(\xi))^j = (\widetilde{m^j})(\xi).$$

Stąd współczynniki Fouriera funkcji \tilde{m}^j są równe:

$$\begin{aligned} |m^j(\alpha)| &= \left| \int_{[0,1]^n} (\widetilde{m^j})(x) e^{-2\pi i \alpha \cdot x} dx \right| = \left| \int_{[0,1]^n} (\tilde{m}(x))^j e^{-2\pi i \alpha \cdot x} dx \right| \leq \\ &\leq \int_{[0,1]^n} (1 - P_X(x))^j e^{-2\pi i \alpha \cdot x} dx \leq \int_{[0,1]^n} |1 - P_X(x)|^j dx. \end{aligned}$$

Z (8.13) i twierdzenia 8.10 wynika, że P_X jest funkcją rzeczywistą dodatnią, zaś z wniosku 2.17 otrzymujemy dla funkcji P_X oszacowanie górne, czyli (9.12), co daje nierówność (9.11). By pokazać (9.10), zauważmy, że

$$(\delta - m) * \sum_{j=0}^k m^j = \delta - m^{k+1}.$$

Przy $k \rightarrow \infty$ nierówność (9.11) implikuje, że suma nieskończona w wyrażeniu (9.10) dla każdego α jest skończona, zatem

$$(\delta - m) * \sum_{j=0}^{\infty} m^j = B_{X|} * \sum_{j=0}^{\infty} m^j = \delta.$$

Wobec (8.21) i (8.22) otrzymujemy (9.9). ◇

Inny dowód twierdzenia 9.7 jest zawarty w pracy [CDR]. W pracy [CJW] sformułowano analogiczne twierdzenie z tym, że dla funkcji z przestrzeni $W_2^{2\varrho_V+1}$.

10. Rzuty ortogonalne i stabilność

Niech V będzie unimodularną rodziną wektorów. Zachowując oznaczenia z poprzedniego rozdziału definiujemy **funkcję biortogonalną** B_V^*

$$(10.1) \quad B_V^*(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) B(x - \alpha|V), \quad x \in R^n,$$

gdzie ciąg b_X jest zdefiniowany w (8.17). Z kryterium Weierstrassa szereg jest zbieżny jednostajnie. Następujący lemat uzasadnia użycie terminu funkcja biortogonalna.

Lemat 10.2

Dla każdego $\beta \in Z^n$

$$(B_V^*, B(\cdot - \beta|V))_{R^n} = \delta_{0,\beta}.$$

Ponadto funkcja B_V^ maleje eksponencjalnie, tzn. istnieją stałe c oraz $0 < q < 1$ takie, że*

$$|B_V^*(x)| \leq cq^{\|x\|} \quad x \in R^n.$$

Dowód. Ponieważ w poniższym iloczynie skalarnym całkujemy po zbiorze zwartym, więc w szeregu funkcyjnym określającym funkcję biortogonalną występuje tylko skończona ilość czynników. Zatem uzasadniona jest zamiana całkowania z sumowaniem.

$$\begin{aligned} & (B_V^*, B(\cdot - \beta|V))_{R^n} = \\ & = \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) (B(\cdot - (\alpha - \beta)|V), B(\cdot|V))_{R^n}. \end{aligned}$$

Ponieważ

$$B(\cdot|V) = B(-\cdot| -V),$$

więc jednocześnie stosując zamianę zmiennych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} & (B_V^*, B(\cdot - \beta|V))_{R^n} = \\ & = \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) (B((\beta - \alpha) - \cdot|V), B(\cdot| -V))_{R^n}. \end{aligned}$$

Z własności splotu pudełkowych funkcji giętych oraz z własności ciągu b otrzymujemy, por. (8.22):

$$\begin{aligned} (B_V^*, B(\cdot - \beta|V))_{R^n} &= \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) B(\beta - \alpha|V, -V) = \\ &= (b_X * B(\cdot|X)_1)(\beta) = \delta_0(\beta). \end{aligned}$$

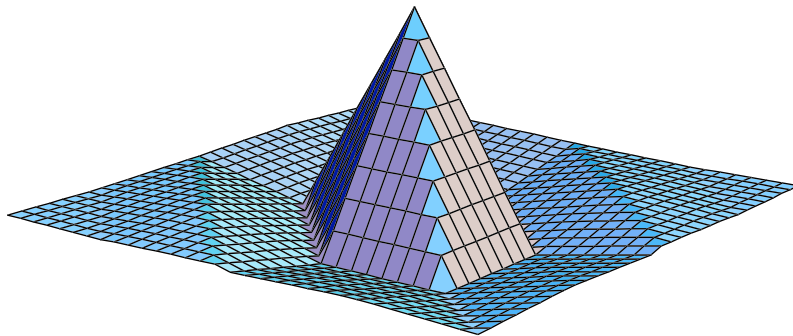
Dowód nierówności jest analogiczny do dowodu nierówności (8.24). ◇

Przykład 10.3

Niech

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ciąg współczynników b_X , gdzie $X = \{V, -V\}$, został oszacowany w przykładzie 8.25.



Funkcja biortogonalna

Funkcja biortogonalna umożliwia nam podanie funkcji fundamentalnej.

Lemat 10.4

Funkcja fundamentalna wyraża się wzorem

$$(10.5) \quad \Phi_X(x) = \int_{R^n} B(x + t|V) B_V^*(t) dt.$$

Dowód. Dowód polega na rozpisaniu prawej strony:

$$\begin{aligned} &\int_{R^n} B(x + t|V) B_V^*(t) dt = \\ &= \sum_{\alpha \in Z^n} b_X(\alpha) \int_{R^n} B(x + t|V) B(t - \alpha|V) dt = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} b_X(\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} B(x+t|V)B(-t+\alpha|-V) dt.$$

Korzystając z zamiany zmiennych oraz własności splotu dla pudełkowych funkcji giętych i parzystości współczynników b_X , otrzymamy:

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} b_X(\alpha) \int_{\mathbb{R}^n} B(x-t|V)B(t+\alpha|-V) dt = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} b_X(\alpha)B(x-\alpha|V, -V) = \Phi_X(x). \end{aligned}$$

◇

Zdefiniujmy rodzinę **rzutów ortogonalnych** na przestrzeń rozpiętą przez całkowite translacje przeskalowanych pudełkowych funkcji giętych:

$$(10.6) \quad P(f)(x) = P^V(f)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (f, B_V^*(\cdot - \alpha))_{\mathbb{R}^n} B(x - \alpha|V).$$

Dla $h > 0$

$$(10.7) \quad P_h(f)(x) = P(f_{1/h})(x/h),$$

czyli

$$P_h(f)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \left(\frac{1}{h}\right)^n (f, B_V^*(\cdot/h - \alpha))_{\mathbb{R}^n} B(x/h - \alpha|V).$$

By podkreślić związek rzutu P_h z rodziną V , będziemy go również oznaczać przez P_h^V .

Zazwyczaj rzuty ortogonalne mają sens tylko w przestrzeniach Hilberta (tutaj w $L^2(\mathbb{R}^n)$). Ponieważ funkcja B_V^* maleje eksponencjalnie, można rozszerzyć stosowalność rzutu ortogonalnego i zauważyć, że ma on sens również dla funkcji ograniczonych. Okazuje się, że wówczas rzuty ortogonalne mają ten sam maksymalny rząd zbieżności co rozpatrywane poprzednio operatory quasi-interpolacji i interpolacji. Mianowicie:

Twierdzenie 10.8

Istnieje stała C taka, że dla dowolnej funkcji $g \in W_\infty^{g_V+1}$

$$\|P_h g - g\|_\infty \leq C h^{g_V+1} |g|_{g_V+1, \infty}.$$

Dowód. Ponieważ dla dowolnej funkcji ograniczonej $G \in S(B_V(\cdot/h))$

$$P_h G = G,$$

więc

$$\|P_h g - g\|_\infty \leq \|P_h(g - G)\|_\infty + \|(g - G)\|_\infty.$$

Jeśli pokażemy, że istnieje stała $A > 0$ taka, że dla każdej funkcji ograniczonej F

$$(10.9) \quad \|P_h(F)\|_\infty \leq A \|F\|_\infty,$$

to

$$\|P_h g - g\|_\infty \leq (1 + A) \|(g - G)\|_\infty.$$

Zatem biorąc funkcję:

$$G = Q_h^{B(\cdot|V), \varrho_V} g,$$

otrzymamy z twierdzenia 4.3

$$\|P_h g - g\|_\infty \leq (1 + A) \|(g - Q_h^{B(\cdot|V), \varrho_V} g)\|_\infty \leq C h^{\varrho_V + 1} |g|_{\varrho_V + 1, \infty}.$$

Dowód (10.9) polega na wyliczeniu:

$$|P_h(F)(x)| \leq \sum_{\alpha \in Z^n} \left(\frac{1}{h}\right)^n |(F, B_V^*(\cdot/h - \alpha))_{R^n} B(x/h - \alpha|V)|.$$

Ponieważ B_V^* jest funkcją całkowalną, stąd

$$|P_h(F)(x)| \leq A \|F\|_\infty \sum_{\alpha \in Z^n} |B(kx - \alpha|V)| \leq A \|F\|_\infty,$$

gdzie

$$A = \int_{R^n} |B_V^*(x)| dx.$$

◇

Uwaga. Analogiczny rezultat dla funkcji $f \in L^2(R^n)$ odpowiada oszacowaniu, por. 4.16

$$\|P_h f - f\|_2 \leq C \omega_{\varrho_V + 1, 2}(f, h).$$

Dla funkcji rzeczywistej ϕ określonej na R^n zdefiniujmy funkcję okresową:

$$\overset{\circ}{\phi}(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} |\phi(x - \alpha)|$$

oraz stałą

$$C_p(\phi) = \left(\int_{[0,1]^n} (\overset{o}{\phi}(x))^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Twierdzenie 10.10

Następujące warunki są równoważne:

- (i) rodzina V jest unimodularna,
- (ii) dla każdego $1 \leq p \leq \infty$ istnieje stała C_q taka, że dla dowolnego ciągu $a \in l^p$

$$(10.11) \quad \frac{1}{C_q} \|a\|_{l^p} \leq \|B * a\|_p \leq \|a\|_{l^p},$$

gdzie q i p są sprzężone,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

W nierówności (10.11) można przyjąć:

$$C_q = C_q(B_V^*).$$

Uwaga. Całkowite translacje danej funkcji spełniające warunek (10.11) nazywamy stabilnymi. Mówimy też, że tworzą one bazę Riesz. W dalszym ciągu będziemy korzystać z własności (10.11) dla $p = 2$ przy założeniu unimodularności, dlatego przeprowadzimy dowód implikacji tylko z (i) do (ii). Implikację w drugą stronę można udowodnić stosując twierdzenie 8.10 oraz własności transformaty Fouriera.

Dowód. Ustalmy p . Załóżmy, że dla funkcji ograniczonej ϕ funkcja okresowa $\overset{o}{\phi}$ jest również ograniczona. Wówczas dla każdego

$$x \in \{x \in R^n : \phi(x) \neq 0\}$$

i dla każdego ciągu $a = \{a(\alpha)\} \in l^p(Z^n)$ z nierówności Jensena (A III) wynika, że

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) \phi(x - \alpha) \right|^p &= \left| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) \frac{\phi(x - \alpha)}{\overset{o}{\phi}(x)} \right|^p \left| \overset{o}{\phi}(x) \right|^p \leq \\ &\leq \sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p \left| \frac{\phi(x - \alpha)}{\overset{o}{\phi}(x)} \right|^p \left| \overset{o}{\phi}(x) \right|^p = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p |\phi(x - \alpha)| |\overset{\circ}{\phi}(x)|^{p-1}.$$

Całkując obustronnie po R^n i rozbijając R^n na nieskończoną sumę kostek $[0, 1)^n + \beta$, $\beta \in Z^n$ otrzymamy

$$\int_{R^n} \left| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) \phi(x - \alpha) \right|^p dx \leq \sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p \int_{[0,1)^n} |\overset{\circ}{\phi}(x)|^p dx.$$

Stąd

$$(10.12) \quad \left\| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) \phi(\cdot - \alpha) \right\|_p \leq C_p(\phi) \|a\|_{l^p}.$$

Korzystając z (10.12) dla pudełkowych funkcji giętych oraz wniosku (2.17) otrzymujemy natychmiast prawą stronę (10.11).

Z drugiej strony, jeśli V jest rodziną unimodularną, to istnieje funkcja biortogonalną B_V^* dana wzorem (10.1). Zatem dla dowolnego ciągu

$a = \{a(\alpha)\}$ o skończonej liczbie wyrazów niezerowych

$$\sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p = (B_V * a, B_V^* * d)_{R^n},$$

gdzie ciąg $d = \{d_\alpha\}$ jest zdefiniowany

$$d_\alpha = \begin{cases} \frac{|a(\alpha)|^p}{a(\alpha)} & a(\alpha) \neq 0 \\ 0 & a(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Z nierówności Höldera (A I) otrzymujemy

$$\sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p \leq \|B_V * a\|_p \|B_V^* * d\|_q.$$

Nierówność (10.12) zastosowana dla funkcji B_V^* prowadzi do oszacowania

$$\sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p \leq C_q(B_V^*) \|d\|_{l^q} \|B_V * a\|_p.$$

Ponieważ

$$\sum_{\alpha \in Z^n} |d_\alpha|^q = \sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p,$$

zatem dzieląc obustronnie przez wspólny czynnik, otrzymujemy lewą stronę (10.11) dla ciągów o skończonej liczbie wyrazów niezerowych.

Niech $a = \{a(\alpha)\}$ będzie dowolnym ciągiem z $l^p(Z^n)$. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $N > 0$ takie, że

$$(10.13) \quad \left(\sum_{|\alpha| > N} |a(\alpha)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

Wówczas korzystając z nierówności (10.11) dla ciągu o skończonej liczbie wyrazów niezerowych, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq N} |a(\alpha)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \varepsilon \leq \\ &\leq C_q(B_V^*) \left\| \sum_{|\alpha| \leq N} a(\alpha) B(\cdot - \alpha|V) \right\|_p + \varepsilon. \end{aligned}$$

Nierówność Minkowskiego, (A II), prawa strona nierówności (10.11) oraz (10.13) implikują, że

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{|\alpha| \leq N} a(\alpha) B(\cdot - \alpha|V) \right\|_p \leq \\ &\leq \left\| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) B(\cdot - \alpha|V) \right\|_p + \left\| \sum_{|\alpha| > N} a(\alpha) B(\cdot - \alpha|V) \right\|_p \leq \\ &\leq \left\| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) B(\cdot - \alpha|V) \right\|_p + \varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\left(\sum_{\alpha \in Z^n} |a(\alpha)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq (1 + C_q(B_V^*))\varepsilon + C_q(B_V^*) \left\| \sum_{\alpha \in Z^n} a(\alpha) B(\cdot - \alpha|V) \right\|_p.$$

Wobec dowolności ε dostajemy tezę. ◇

Uwaga. Jeśli przez W_0 oznaczymy przestrzeń domkniętą rozpiętą przez całkowite translacje funkcji B_V i zawartą w $L^2(R^n)$,

$$W_0 = \text{span}_{L^2(R^n)} \{B(\cdot - \alpha|V) : \alpha \in Z^n\},$$

to z tw. o stabilności wnioskujemy, że W_0 jest **izomorficzna** z $l^2(Z^n)$. Mi-anowicie, każdemu ciągowi a z l^2 odpowiada funkcja $B_V * a \in W_0$. Z drugiej strony, dowolnej funkcji $H \in W_0$ odpowiada pewien ciąg $a \in l^2$ taki, że

$$H = B_V * a.$$

Izomorficzność oznacza również, że przyporządkowanie to jest **ciągłe**, co jest równoważne właśnie warunkowi (10.11). Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt iż operator P_0 rzutuje funkcje z $L^2(R^n)$ do W_0 .

11. rednia Marcinkiewicza

W rozdziale tym podamy zależności pomiędzy rzutem ortogonalnym, interpolacją daną poprzez funkcję fundamentalną a operatorem splotu z funkcją fundamentalną. Zależności te możemy otrzymać stosując średnią Marcinkiewicza. Przez τ_t oznaczmy operator translacji funkcji f o wektor t , tj.

$$\tau_t f = f(\cdot - t).$$

Definicja 11.1

Operator $\mathcal{M}(R)$ jest **średnią Marcinkiewicza** operatora R , jeśli

$$[\mathcal{M}(R)](f)(x) = \int_{[0,1]^n} R(\tau_t f)(x + t) dt.$$

Średnią Marcinkiewicza będziemy stosować do rzutu ortogonalnego P_h^V , por. (10.7), oraz do operatora interpolacji I_h^X , por. (9.2), dla $h = \frac{1}{k}$, gdzie k jest liczbą naturalną większą od zera, zaś V jest rodziną unimodularną oraz

$$X = \{V, -V\}.$$

Zachodzi wówczas następująca zgodność.

Twierdzenie 11.2

Operator splotu z funkcją fundamentalną $\Phi = \Phi_X$ jest średnią Marcinkiewicza zarówno rzutu ortogonalnego P_h^V , jak i operatora interpolacji I_h^X dla $h = \frac{1}{k}$. Mi-
anowicie,

$$(11.3) \quad \mathcal{M}(I_h^X)g = k^n \Phi_h * g$$

dla każdej funkcji ograniczonej g oraz

$$(11.4) \quad \mathcal{M}(P_h^V)f = k^n \Phi_h * f$$

dla każdej funkcji ograniczonej f .

Uwaga. Stosowalność powyższych formuł może być rozszerzona na inne klasy funkcji, również na dystrybucje.

Dowód. Rozpocniemy od dowodu (11.3)

$$\int_{[0,1]^n} I_h^X(\tau_t g)(x + t) dt =$$

$$= \sum_{\alpha \in Z^n} \int_{[0,1]^n} g(\alpha/k - t) \Phi(k(x+t) - \alpha) dt.$$

Stosując zamianę zmiennych oraz sumując do całej przestrzeni

$$R^n = \sum_{\alpha \in Z^n} [0, 1]^n + \alpha,$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} I_h^X(\tau_t g)(x+t) dt = \\ &= \sum_{\alpha \in Z^n} \int_{[0,1]^n} g(\alpha/k + t) \Phi(k(x - (\alpha/k + t))) dt = \\ &= k^n \int_{R^n} g(t) \Phi(k(x-t)) dt = k^n (\Phi_{\frac{1}{k}} * g)(x). \end{aligned}$$

Przejdemy do drugiej części dowodu. Z definicji P_h^V wynika:

$$\begin{aligned} & \int_{[0,1]^n} (P_h^V(\tau_t f))(x+t) dt = \\ &= \int_{[0,1]^n} \sum_{\alpha \in Z^n} (\tau_t f, k^n B_V^*(k \cdot - \alpha))_{R^n} B(k(x+t) - \alpha | V) dt = \\ &= \sum_{\alpha \in Z^n} \int_{[0,1]^n} (f, k^n B_V^*(k(\cdot + t - \alpha/k)))_{R^n} B(k(x+t - \alpha/k) | V) dt = \\ &= k^n \int_{R^n} (f, k^n B_V^*(k(\cdot + t)))_{R^n} B(k(x+t) | V) dt = \\ &= (k^n)^2 \int_{R^n} \int_{R^n} f(u) B_V^*(ku + kt) B(kx + kt) | V) dt du = \\ &= k^n \int_{R^n} f(u) \Phi(kx - ku) du = k^n (f * \Phi_h)(x). \end{aligned}$$

Zastosowaliśmy również wzór (10.5) oraz zamianę zmiennych.

◇

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 11.2 oraz twierdzenia 9.6 jest następujące oszacowanie operatora splotu:

Wniosek 11.5

Istnieje stała $C > 0$ taka, że dla każdej funkcji $f \in W_\infty^{2\varrho_V+1}$,

$$\|f - k^n \Phi_{\frac{1}{k}} * f\|_\infty \leq C \left(\frac{1}{k}\right)^{2\varrho_V+1} |f|_{2\varrho_V+1, \infty}.$$

Dowód. Z definicji 11.1 oraz z (11.3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 f(x) - k^n (\Phi_{\frac{1}{k}} * f)(x) &= \\
 &= f(x) - \int_{[0,1]^n} I_h^X(\tau_t f)(x+t) dt = \\
 &= \int_{[0,1]^n} (\tau_t f(x+t) - I_h^X(\tau_t f)(x+t)) dt,
 \end{aligned}$$

gdzie $h = 1/k$. Korzystając z twierdzenia 9.7 otrzymujemy

$$|f(x) - k^n (\Phi_{\frac{1}{k}} * f)(x)| \leq C \left(\frac{1}{k}\right)^{2\varrho_V+1} \int_{[0,1]^n} (|\tau_t f|_{2\varrho_V+1,\infty}) dt,$$

co kończy dowód.

◇

Po raz pierwszy średniej zdefiniowanej w 11.1 użył Marcinkiewicz [M]. Wykorzystanie jej w teorii funkcji giętych zostało zainicjowane w pracy [C1], por. [BD2].

12. Operator Ciesielskiego. Estymator gęstości

Rozdział ten może służyć jako wstęp do badania zachowania obciążonych estymatorów gęstości wielu zmiennych poprzez operator Ciesielskiego, zob. [C3–4]. W rozdziale tym pokażemy pewne własności tego operatora.

Dla rodzin dopuszczalnych V_1 i V_2 definiujemy

$$Y = \{V_1, -V_2\}$$

oraz funkcję giętą symetryczną, por. (4.9),

$$N_Y(x) = B(x + c_Y|Y),$$

gdzie c_Y jest środkiem funkcji $B(\cdot|Y)$, czyli $c_Y = \frac{1}{2} \sum_{v \in Y} v$.

Definicja 12.1

Operator Ciesielskiego określamy wzorem

$$Q^{(V_1, V_2)} f(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} (f, B(\cdot - \alpha - c_Y|V_2))_{R^n} B(x - \alpha|V_1)$$

oraz

$$Q_h^{(V_1, V_2)} f(x) = Q^{(V_1, V_2)}(f_{1/h})(x/h).$$

Lemat 12.2

$$(12.3) \quad Q_h^{(V_1, V_2)} f \geq 0 \quad \text{dla} \quad f \geq 0,$$

$$(12.4) \quad \int_{R^n} Q_h^{(V_1, V_2)} f = \int_{R^n} f$$

dla funkcji całkowalnej f .

DOWÓD. Operator Q^{V_1, V_2} jest nieujemny dla funkcji nieujemnych, gdyż funkcje gięte są nieujemne. Ponadto, ponieważ całka z funkcji giętej jest równa jeden, zatem z wniosku 2.17 wynika:

$$\int_{R^n} Q_h^{(V_1, V_2)} f(x) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha \in Z^n} (f_{1/h}, B(\cdot - \alpha - c_Y | V_2))_{R^n} \int_{R^n} B(x/h - \alpha | V_1) dx = \\
&= h^n \int_{R^n} f_{1/h}(y) \sum_{\alpha \in Z^n} B(y - \alpha - c_Y | V_2) dy = h^n \int_{R^n} f_{1/h} = \int_{R^n} f.
\end{aligned}$$

Jak zwykle w teorii aproksymacji przez $o(1)$ będziemy oznaczać wielkość, która dąży do zera przy $h \rightarrow 0^+$.

Twierdzenie 12.5

Załóżmy, że dane są rodziny dopuszczalne V_1 i V_2 . Ponadto, niech

$$\varrho_{V_1} \geq 2, \quad \varrho_{V_2} \geq 1.$$

Wówczas dla każdej funkcji $f \in W_p^2(R^n)$ oraz $1 \leq p \leq \infty$

$$(12.6) \quad \left\| \frac{Q_h^{(V_1, V_2)} f - f}{h^2} - \frac{1}{24} \sum_{v \in Y} D_v^2 f \right\|_p = o(1).$$

Dowód. Pokażemy słabszą wersję tego twierdzenia.

Jeśli funkcja $f \in C^2(R^n)$ ma zwarty nośnik, to dla każdego $x \in R^n$

$$(12.7) \quad \frac{Q_h^{(V_1, V_2)} f(x) - f(x)}{h^2} \rightarrow \frac{1}{24} \sum_{v \in Y} D_v^2 f(x)$$

przy $h \rightarrow 0^+$.

Przypomnijmy, por. 4.10, oznaczenie operatora quasi-interpolacji

$$Q^{N_Y, 0} f(x) = Q^Y f(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} f(\alpha) N_Y(x - \alpha).$$

Lemat 12.8

Operator $Q^{(V_1, V_2)}$ zgadza się z operatorem Q^Y na wielomianach $p \in \Pi_{\varrho_{V_1}}$, tj.

$$Q^{(V_1, V_2)} p = Q^Y p.$$

Dowód. Niech

$$M_{V_2}(-y - c_Y) = B(y | V_2).$$

Stąd

$$\int_{R^n} f(y) B(y - \alpha - c_Y | V_2) dy = \int_{R^n} f(y) M_{V_2}(\alpha - y) dy = f * M_{V_2}(\alpha).$$

Zatem

$$(12.9) \quad Q^{(V_1, V_2)} f = B_{V_1} *' (f * M_{V_2}).$$

Ponieważ

$$B(\cdot | V_2) = B(-\cdot | -V_2),$$

więc

$$(12.10) \quad \begin{aligned} M_{V_2} * B_{V_1}(x) &= \int_{R^n} (M_{V_2}(x-y) B_{V_1})(y) dy = \\ &= \int_{R^n} B_{-V_2}(c_y + x - y) B_{V_1}(y) dy = B_Y(x + c_Y) = N_Y(x). \end{aligned}$$

Zatem korzystając z (12.9), (12.10) oraz dwukrotnie z lematu 3.17 i przyjmując, że jeśli $p \in \Pi_{\varrho_{V_1}}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q^{(V_1, V_2)} p &= B_{V_1} *' (p * M_{V_2}) = B_{V_1} * p * M_{V_2} = \\ &= (B_{V_1} * M_{V_2}) * p = N_Y * p = N_Y *' p = Q^Y p. \end{aligned}$$

Korzystaliśmy jednocześnie z faktu, iż

$$p * M_{V_2} \in \Pi_{\varrho_{V_1}}$$

oraz

$$\Pi_{\varrho_{V_1}} \subset \Pi_{\varrho_Y}.$$

◇

Lemat 12.11

Dla wielomianów p stopnia dwa obowiązuje wzór:

$$(12.12) \quad Q^Y p = p - p * m,$$

gdzie analogicznie do oznaczeń rozdziału 3

$$(12.13) \quad m = \delta - N_{Y|}.$$

Ponadto, dla $|\gamma| = 2$ oraz wielomianu $p(x) = x^\gamma$,

$$(12.14) \quad p * m = \frac{1}{4\pi^2} D^\gamma \widehat{N_Y}(0).$$

Dowód. Z lematu 3.15

$$Q^Y p = N_Y *' p = p *' N_Y = p * (\delta - m) = p - p * m.$$

Ze wzoru (3.14) wynika, że funkcja $p * m$ jest stała. Obliczmy ją w punkcie zero. Ponieważ ciąg m jest symetryczny, więc

$$(p * m)(0) = \sum_{\alpha \in Z^n} m(\alpha)p(-\alpha) = \sum_{\alpha \in Z^n} m(\alpha)p(\alpha).$$

Korzystając z (12.13) otrzymamy:

$$(p * m)(0) = p(0) - \sum_{\alpha \in Z^n} N_Y(\alpha)p(\alpha).$$

Korzystając ze wzoru Poissona (lemat A 2) oraz wzoru (1.9), otrzymamy dla wielomianu x^γ

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in Z^n} N_Y(\alpha)p(\alpha) &= \sum_{\alpha \in Z^n} (p\widehat{N}_Y)(\alpha) = \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{\alpha \in Z^n} D^\gamma \widehat{N}_Y(\alpha) = -\frac{1}{4\pi^2} D^\gamma \widehat{N}_Y(0). \end{aligned}$$

◇

Dowód 12.7. Dowód przeprowadzimy dla wymiaru $n = 2$. Niech $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją o zwartym nośniku. Ustalmy $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Korzystając z rozwinięcia Taylora funkcji f w punkcie x , otrzymujemy

$$f(y) = P_x(y) + R_x(y),$$

gdzie P_x jest wielomianem Taylora:

$$P_x(y) = f(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}(y_1 - x_1) + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}(y_2 - x_2),$$

zaś R_x resztą Taylora:

$$\begin{aligned} R_x(y) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_1^2} (y_1 - x_1)^2 + \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_1 \partial x_2} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\theta)}{\partial x_2^2} (y_2 - x_2)^2, \end{aligned}$$

$y = (y_1, y_2)$, punkt θ leży na odcinku pomiędzy punktem x a y . Z twierdzenia 3.10 oraz lematu 12.8

$$Q^{(V_1, V_2)} P_x = Q^Y P_x = P_x.$$

Stąd

$$Q_h^{(V_1, V_2)} P_x(x) = Q^{(V_1, V_2)}(P_x)_{1/h}(x/h) = P_x(x) = f(x).$$

Zatem

$$(12.15) \quad Q_h^{(V_1, V_2)} f(x) - f(x) = Q_h^{(V_1, V_2)} R_x.$$

Z (12.15) wynika, iż aby udowodnić (12.7), wystarczy pokazać, że przy $h \rightarrow 0^+$

$$(12.16) \quad \frac{Q_h^{(V_1, V_2)} R_x(x)}{h^2} \rightarrow \frac{1}{24} \sum_{v \in Y} D_v^2 f(x).$$

Zdefiniujmy wielomian:

$$\begin{aligned} T_x(y) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} (y_1 - x_1)^2 + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} (y_1 - x_1)(y_2 - x_2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} (y_2 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Wielomian ten możemy rozbić na dwa wielomiany:

$$T_x = W + q,$$

gdzie wielomian

$$W(y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} y_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} y_2^2 \right)$$

oraz wielomian q co najwyżej stopnia pierwszego. Wówczas z (12.12) otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q_h^Y T_x(x) &= Q^Y (T_x)_{1/h}(x/h) = T_x(x) - (T_x)_{1/h} * m = \\ &= -(T_x)_{1/h} * m = -W_{1/h} * m - q_{1/h} * m. \end{aligned}$$

Ze wzoru (3.14) wynika, że $q_{1/h} * m = 0$, więc

$$(12.17) \quad Q_h^Y T_x(x) = -W_{1/h} * m.$$

Z (12.14)

$$\begin{aligned} &W_{1/h} * m = \\ &= \frac{h^2}{8\pi^2} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \widehat{N}_Y(0)}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 x_2} \frac{\partial^2 \widehat{N}_Y(0)}{\partial x_1 x_2} + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \widehat{N}_Y(0)}{\partial x_2^2} \right). \end{aligned}$$

Ze wzoru (1.9) wynika, że

$$\begin{aligned}\widehat{N}_Y(x) &= \prod_{v \in Y} \frac{1 - e^{-2\pi i x \cdot v}}{2\pi i x \cdot v} e^{2\pi i x \cdot c_Y} = \\ &= \prod_{v \in Y} \frac{e^{\pi i x \cdot v} - e^{-\pi i x \cdot v}}{2\pi i x \cdot v} = \prod_{v \in Y} \frac{\sin \pi x \cdot v}{\pi x \cdot v}.\end{aligned}$$

Niech

$$g(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Zatem

$$\widehat{N}_Y(x) = \prod_{v \in Y} g(\pi v \cdot x).$$

Ponieważ

$$g'(0) = 0,$$

zaś

$$g''(0) = -\frac{1}{3},$$

więc

$$W_{1/h} * m = -\frac{h^2}{24} \sum_{v \in Y} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} v_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} v_1 v_2 + \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} v_2^2 \right),$$

gdzie $v = (v_1, v_2)$. Stąd oraz z (12.17)

$$\frac{Q_h^{(V_1, V_2)} T_x(x)}{h^2} = -\frac{(W_{1/h} * m)(x)}{h^2} = \frac{1}{24} \sum_{v \in Y} D_v^2 f(x).$$

Wystarczy teraz pokazać, że przy $h \rightarrow 0^+$

$$(12.18) \quad \frac{Q_h^{(V_1, V_2)} (T_x - R_x)(x)}{h^2} \rightarrow 0.$$

Niech R_1 i R_2 oznaczają średnice okręgów, które zawierają nośniki funkcji odpowiednio B_{V_1} i $B_{V_2}(\cdot - c_Y)$. Wówczas z wniosku 2.17

$$\begin{aligned}& |Q_h^{(V_1, V_2)} (T_x - R_x)(x)| \leq \\ & \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} \left| \left((T_x - R_x)_{1/h}, B_{V_2}(\cdot - \alpha - c_Y) \right)_{\mathbb{R}^2} \right| B_{V_1}(x/h - \alpha) \leq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \max_{\alpha \in Z^2} \left\{ \left| \left((T_x - R_X)_{1/h}, B_{V_2}(\cdot - \alpha - c_Y) \right)_{R^2} \right| : \|x/h - \alpha\| \leq R_1 \right\} \leq \\ &\leq \max_{\alpha \in Z^2} \left\{ \int_{\|u-\alpha\| \leq R_2} |(T_x - R_X)(hu)| du : \|x/h - \alpha\| \leq R_1 \right\}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla każdego α takiego, że

$$\|x/h - \alpha\| \leq R_1,$$

jeśli $\|u - \alpha\| \leq R_2$, to

$$\|u - x/h\| \leq R_1 + R_2,$$

więc

$$\begin{aligned} |Q_h^{(V_1, V_2)}(T_x - R_x)(x)| &\leq \int_{\|u-x/h\| \leq R_1+R_2} |(T_x - R_X)(hu)| du \leq \\ &\leq \pi^2 h^2 (R_1 + R_2)^2 \max\{|(T_x - R_X)(hu)| : \|hu - x\| \leq h(R_1 + R_2)\}. \end{aligned}$$

Ponieważ $T_x(x) - R_x(x) = 0$, więc z ciągłości obu funkcji wynika, że maksimum ich różnicy w otoczeniu punktu x przy $h \rightarrow 0^+$ dąży do zera. Stąd otrzymujemy (12.18). ◇

Przykład 12.19

Dane są realizacje próby losowej

$$y_i = (a_i, b_i) \in R^2, \quad i = 1, \dots, n,$$

niezależnych dwuwymiarowych wektorów losowych o nieznannej gęstości f . Zakładamy, że gęstość f jest funkcją ciągłą. Skonstruujemy estymator gęstości. Niech

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wówczas $c_Y = 0$. Operator Ciesielskiego możemy zapisać używając jego jądra:

$$Q_h^{(V_1, V_2)} f = \int_{R^2} C_h(y, x) f(y) dy.$$

Jądro jest równe:

$$C_h(y, x) = \frac{1}{h^2} \sum_{\alpha \in Z^2} B_{V_2}(y/h - \alpha) B_{V_1}(x/h - \alpha).$$

Estymator gęstości zależny od n -elementowej próbki prostej jest równy:

$$f_{h,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_h(y_i, x)$$

lub równoważnie

$$f_{h,n}(x) = \sum_{\alpha \in Z^2} c(\alpha) B_{V_1}(x/h - \alpha),$$

gdzie

$$(12.20) \quad c(\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_{V_2}(y_i/h - \alpha).$$

Można pokazać, [Krz], [C3], że

$$Pr\{\|f - f_{h,n}\|_1 \rightarrow 0\} = 1,$$

jeśli $nh^2 \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0^+$, $n \rightarrow \infty$.

Dobór optymalnego parametru h , zwanego parametrem okna, w zależności od n jest ważki, por. [DG]. Załóżmy, że dane są zapisane w kwadratowej tablicy korelacyjnej

$$A_{m \times m} = [a(\alpha_1, \alpha_2)]_{m \times m},$$

co odpowiada użyciu powyższego estymatora dla rodzin

$$V_1 = V_2 = E_{1,1}.$$

W dodatku prezentujemy krótki program napisany w Pascalu, który umieszcza dane w taką macierz. Zapisanie danych w taką tablicę daje nam możliwość rozpatrywania zagadnienia przeskalowanego, w którym dane są otrzymane w kwadracie $[0, m)^2$. Wówczas przyjmujemy parametr okna $h = 1$, współczynnik (12.20):

$$c(\alpha_1, \alpha_2) = a(\alpha_1, \alpha_2) + a(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1) + \frac{a(\alpha_1 + 1, \alpha_2) + a(\alpha_1, \alpha_2 + 1)}{2}.$$

Do prezentacji graficznej estymatora gęstości możemy użyć algorytmu rozdrobienia, który wygładza dane.

13. Quasīrzuty

W tym rozdziale wprowadzimy quasīrzuty, które są uogólnieniem operatora Ciesielskiego. W granicy operatory te dążą do rzutu ortogonalnego.

Definicja 13.1

Niech V będzie rodziną dopuszczalną. **Quasīrzuty** definiujemy wzorem:

$$(13.2) \quad Q^{(V,V,\varrho)}(f) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n} (f, B(\cdot - \alpha|V) * r^\varrho)_{R^n} B(\cdot - \alpha|V),$$

gdzie ciąg:

$$r^\varrho = \delta + m + \dots + m^\varrho.$$

Ciąg $m = \delta - B_X|$, gdzie $X = \{V, -V\}$. Zauważmy, że z konstrukcji wynika, iż przy $\varrho \rightarrow \infty$, por. lemat 9.9,

$$r^\varrho \rightarrow b_X,$$

stąd oraz z definicji funkcji biortogonalnej (10.1)

$$B_V * r^\varrho \rightarrow B_V^*,$$

zatem

$$Q^{(V,V,\varrho)}(f) \rightarrow P^V(f).$$

Ponadto, dla $\varrho = 0$ quasīrzut odpowiada operatorowi Ciesielskiego postaci $Q^{(V,V)}$. Wprowadźmy operator przeskalowany

$$Q_h^{(V,V,\varrho)}(f)(x) = Q^{(V,V,\varrho)}(f_{1/h})(x/h) \quad \text{dla } x \in R^n.$$

Operatory te dziedziczą wiele własności operatora Ciesielskiego oraz quasīinterpolacji. Mianowicie

$$\int_{R^n} Q_h^{(V,V,\varrho)}(f) = \int_{R^n} f,$$

por. lemat 12.2.

Korzystając z lematu 3.23, można pokazać następującą zgodność operatorów quasīrzutów i quasīinterpolacji dla wielomianów, por.12.8:

Twierdzenie 13.3

Zachodzi następująca zgodność dla wielomianów $p \in S(B_V) \cap \Pi$

$$Q^{(V,V,\varrho)}(p) = Q^{B_X,\varrho}(p),$$

gdzie $X = \{V, -V\}$.

Z twierdzenia 13.3 oraz lematu 3.12 wynika:

$$Q_h^{(V,V,\varrho)} p = p$$

dla wielomianu p stopnia $k \leq \varrho_V$, gdzie ϱ_V jest maksymalnym stopniem reprodukowanych wielomianów, por. (2.13), o ile $\varrho \geq (k-1)/2$. Quasi-rzuty podobnie jak operatory quasi-interpolacji mają zbliżone własności aproksymacyjne. Ponieważ są operatorami całkowymi, można je nawet stosować dla szerszej klasy funkcji, również dla pewnych klas dystrybucji.

Związki pomiędzy zastosowanymi operatorami można przedstawić w postaci diagramu:

$$\begin{array}{ccc} Q^{(V,V,\rho)}(f) & \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} & P^V(f) \\ & & \searrow \mathcal{M} \\ & & \Phi_X * f, \\ Q^{B_X,\rho}(f) & \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} & I^X(f) \\ & & \nearrow \mathcal{M} \end{array}$$

gdzie f jest funkcją ciągłą o zwartym nośniku,

- $\Phi_X * f$ oznacza splot z funkcją fundamentalną,
- P^V - rzut ortogonalny, por. (10.6),
- I^X - operator interpolacji, por (9.1),
- \mathcal{M} oznacza średnią Marcinkiewicza, por. tw. 11.2.

W pracy [BD2] podano związki pomiędzy średnią Marcinkiewicza, wielopoziomową aproksymacją, quasi-rzutami a funkcją fundamentalną w przestrzeniach Hardiego.

Zdefiniujmy rodziny dopuszczalne kX , które są złożone z wektorów rodziny X o krotności k . Niech

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Można udowodnić również następujące twierdzenie, por. dowód (12.7).

Twierdzenie 13.4

Niech $2\varrho + 1 < \varrho_V$. Wówczas dla dowolnej funkcji $f \in C^{2\varrho+2}(R^n)$

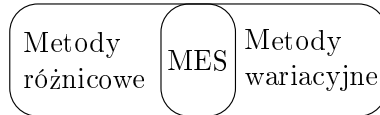
$$\frac{Q_h^{(V,V,\varrho)} f(x) - f(x)}{h^{2\varrho+2}} \rightarrow \sum_{|\alpha|=2\varrho+2} \frac{1}{\alpha!} A_\alpha D^\alpha f(x),$$

gdzie stałe A_α można wyliczyć ze wzoru

$$A_\alpha = -m^{\varrho+1} * x^\alpha = \frac{1}{(2\pi)^{2\varrho+2}} \sum_{k=1}^{\varrho+1} \binom{\varrho+1}{k} (-1)^{k+\varrho} D^\alpha (\widehat{B_{kX}})(0).$$

14. Metoda elementów skończonych

W rozdziale tym omówimy zastosowanie twierdzenia StrangaFixa do rozwiązywania równań eliptycznych (zob. H. Marcinkowska – Dystrybucje i przestrzenie Sobolewa) metodą elementów skończonych (MES). Metodę ilustruje diagram



Rozpatrzmy zagadnienie Dirichleta jako standardowe w przypadku równań eliptycznych, por. przykład 1.6 [Ma, str.292]. Będziemy rozpatrywać to zagadnienie w wymiarze $n = 2$, co ma istotne znaczenie ze względu na twierdzenie Sobolewa o zanurzeniu, [Ma, str. 232].

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem ograniczonym i otwartym. Niech Δ oznacza Laplasjan

$$(14.1) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Będziemy poszukiwać rozwiązania numerycznego zagadnienia Dirichleta

$$(14.2) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

gdzie funkcja f jest 2-całkowalna w zbiorze Ω . Ponieważ istnienie rozwiązania zagadnienia (14.2) zależy od gładkości brzegu, więc założymy, że obszar Ω jest lipschitzowski [Ma, str.198], co oznacza m.in., że brzeg zbioru Ω jest wykresem funkcji klasy Lipschitza.

Przy takim założeniu istnieje rozwiązanie zagadnienia (14.2), które jest dystrybucją. Warunek brzegowy rozumie się wówczas w szerszym sensie. Aby uzyskać rozwiązanie, które jest funkcją, musimy zrobić jedno z założeń (14.5–14.7). Dlatego w przykładzie 14.12 ograniczymy nasze rozważania do wielościanu. Niestety i tak pochodne cząstkowe rozwiązania (14.2) trzeba rozumieć w sensie dystrybucyjnym. Dlatego czytelnik, który nie poznał teorii dystrybucji, może rozumieć występujące poniżej symbole, definicje i uzasadnienia jako odnoszące się do funkcji. Proponujemy, by traktować poniższy fragment jako matematyczne usprawiedliwienie poszukiwania rozwiązania

numerycznego w postaci (14.8) spełniającego (14.9). Dla praktyka bowiem rozwiązanie rozpoczyna się od tego momentu.

Niech $H^m(\Omega) = W_2^m(\Omega)$ oznacza **przestrzeń Sobolewa** dystrybucji takich, że (różniczkowanie w sensie dystrybucyjnym, całkowanie w sensie Lebesgue'a)

$$\|f\|_{m,2}(\Omega) = \left(\sum_{k=1}^m |f|_{k,2}^2(\Omega) \right)^{1/2} < \infty,$$

$$|f|_{k,2}(\Omega) = \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_2^2(\Omega) \right)^{1/2} < \infty.$$

Wprowadzamy iloczyn skalarny w $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$

$$(f, g)_\Omega = \int_\Omega f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Niech $C_0^\infty(\Omega)$ oznacza przestrzeń funkcji nieskończenie razy różniczkowalnych w sposób ciągły o zwartym nośniku zawartym w Ω . Przez

$$\mathring{H}^1(\Omega)$$

oznaczymy domknięcie podprzestrzeni $C_0^\infty(\Omega)$ w przestrzeni $H^1(\Omega)$. Ponadto, niech $\mathcal{A}_\Omega(u, v)$ będzie dwuliniową formą Dirichleta dla zagadnienia (14.2)

$$\mathcal{A}_\Omega(u, v) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_\Omega.$$

Zauważmy, że

$$\mathcal{A}_\Omega(u, u) = \|u\|_{1,2}^2.$$

Forma ta jest **koercytywna**, tj. istnieje stała c taka, że dla każdego $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$,

$$\mathcal{A}_\Omega(u, u) \geq c \|u\|_{1,2}^2,$$

por. [Ma, str.279, wniosek 1.1].

Korzystając z lematu Laxa-Milgrama, [Ma, str. 272] (w którym zakłada się koercytywność formy dwuliniowej), otrzymujemy, że dla dowolnej funkcji $f \in L^2(\Omega)$ istnieje w zbiorze $\mathring{H}^1(\Omega)$ rozwiązanie u zagadnienia

$$(14.3) \quad \bigwedge_{v \in \mathring{W}_2^1(\Omega)} \mathcal{A}_\Omega(u, v) = (f, v)_\Omega,$$

czyli rozwiązanie **zagadnienia wariacyjnego**.

Sformułujemy teraz twierdzenie wiążące rozwiązanie zagadnienia (14.2) z równaniem wariacyjnym (14.3). Dowód patrz [Ma, str. 263].

Twierdzenie 14.4

Niech funkcja $f \in L^2(\Omega)$.

Dystrybucja u jest rozwiązaniem równania wariacyjnego (14.3) wtedy i tylko wtedy, gdy u jest rozwiązaniem zagadnienia $-\Delta u = f$ oraz

$$u \in \mathring{H}^1(\Omega).$$

Co z warunkiem brzegowym zagadnienia (14.2)? Otóż przy założeniu, że Ω jest obszarem lipschitzowskim, jeśli $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, to $u|_{\partial\Omega} = 0$ (wartość brzegowa dystrybucji w sensie śladu), [Ma, str. 263].

Możemy pozbyć się rozważań o wartości brzegowych dla dystrybucji oraz poprawić gładkość rozwiązania (14.3), zakładając np.:

(14.5) większą gładkość brzegu zbioru Ω ,

(14.6) że zbiór Ω jest wypukły,

(14.7) że zbiór Ω jest wielościanem.

Szczegółowa analiza każdego z tych przypadków jest opisana w [G]. Przy powyższych założeniach z twierdzenia Sobolewa wynika, że rozwiązanie jest funkcją ciągłą. Rozwiązanie zagadnienia (14.3) spełnia warunki brzegowe zagadnienia (14.2) w zwykłym sensie, czyli $u(x) = 0$ dla $x \in \partial\Omega$. Ponadto, w dwóch pierwszych przypadkach $u \in H^2(\Omega)$, zaś w trzecim $u \in H^s(\Omega)$, gdzie $1 < s < 2$, co odpowiada funkcjom „różniczkowalnym” stopnia s . W rzeczywistości problem gładkości występuje tylko w „rogach”, w ogólności na brzegu por. [Ma, str.310, tw. 2.6].

Metoda Ritza-Galerkina sprowadza rozwiązanie zagadnienia wariacyjnego (14.3) do zagadnienia różnicowego. Mianowicie niech

$$\psi(x) = B(x|V),$$

gdzie rodzina V jest unimodularna oraz $\varrho_V \geq 1$. Niech

$$\mathring{S}(\psi_h)$$

oznacza funkcje z przestrzeni $S(\psi)$, których nośnik zawarty jest w zbiorze Ω . Rozwiązania numerycznego szukamy w postaci

$$(14.8) \quad u^h = \sum_{\mu \in hI(h)} a_\mu \psi_h(\cdot - \mu),$$

gdzie

$$I(h) = \{ \alpha \in Z^n : h \operatorname{supp} \psi \subset \Omega + h\alpha \},$$

tak by

$$(14.9) \quad \bigwedge_{v \in \overset{\circ}{S}(\psi_h)} \mathcal{A}_\Omega(u^h, v) = (f, v)_\Omega.$$

Wprowadzamy macierze

$$\Psi^h = [\mathcal{A}_\Omega(\psi_h(\cdot - \mu), \psi_h(\cdot - \nu))]_{\mu, \nu \in hI(h)}$$

oraz

$$G^h = [(f, \psi_h(\cdot - \mu))_\Omega]_{\mu \in hI(h)}.$$

Wówczas macierz współczynników A^h rozwiązania numerycznego ma postać

$$A^h = (\Psi^h)^{-1} G^h.$$

Ponieważ założyliśmy, że V jest rodziną unimodularną, więc z twierdzenia 7.6 wynika, że funkcje $\psi_h(\cdot - \mu)$, $\mu \in hZ^n$ są liniowo niezależne. Stąd (teoretycznie) macierz Ψ^h jest odwracalna. Zagadnienia odwracalności macierzy Ψ^h oraz sposobów jej obliczania można znaleźć w [FS]. Twierdzenie StrangaFixa [FS] pozwala oszacować szybkość zbieżności u^h do rozwiązania u zagadnienia (14.2). Mianowicie przy założeniu (14.5) lub (14.6) o zbiorze Ω można pokazać, że

$$(14.10) \quad \|u^h - u\|_{1,2}(\Omega) \leq Ch \|u\|_{2,2}(\Omega),$$

Przy założeniu (14.7) otrzymujemy

$$(14.11) \quad \|u^h - u\|_{1,2}(\Omega) \leq Ch^{s-1} \|u\|_{s,2}(\Omega),$$

Podamy szkic dowodu. Po pierwsze, ponieważ \mathcal{A}_Ω jest koercytywne, więc dla każdego $w \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$,

$$c \|w\|_{1,2}^2(\Omega) \leq \mathcal{A}_\Omega(w, w).$$

Ponieważ dla dowolnego $w^h \in \overset{\circ}{S}(\psi_h)$.

$$\mathcal{A}_\Omega(u^h - u, w^h) = (f, w^h)_\Omega - (f, w^h)_\Omega = 0,$$

więc

$$c \|u - u^h\|_{1,2}^2(\Omega) \leq \mathcal{A}_\Omega(u - u^h, u - u^h) =$$

$$= \mathcal{A}_\Omega(u - u^h, u - w^h) \leq C \|u - u^h\|_{1,2}(\Omega) \|u - w^h\|_{1,2}(\Omega)$$

dla dowolnego $w^h \in \mathring{S}(\psi_h)$. Zatem dzieląc przez wspólny czynnik, otrzymamy

$$\|u - u^h\|_{1,2}(\Omega) \leq C \|u - w^h\|_{1,2}(\Omega).$$

Ponieważ funkcja w^h jest dowolna, zatem korzystając z nieco zmienionej wersji twierdzenia o najlepszej aproksymacji (tw. 5.3), otrzymamy (14.10) lub odpowiednio (14.11).

Przykład 14.12

Niech

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poniżej prezentujemy program napisany w języku Mathematica, który wylicza rozwiązanie numeryczne zagadnienia Dirichleta w zbiorze $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

```

*deklarujemy wielkość rozdrobnienia
h = 1/(n+1) np. n=6 * n=?;
*macierz Psi^h*
A=Table[0, {j, 1, n^2}, {m, 1, n^2}];
For[j=1, j<=n^2, j++, A[[j, j]]=4]
For[j=1, j<=n^2-n, j++, A[[j, j+n]]=-1; A[[j+n, j]]=-1]
Do[
  If[Mod[j, n]!=0, A[[j, j+1]]=-1; A[[j+1, j]]=-1], {j, 1, n^2-1}]
*macierz odwrotna do Psi^h*
H=Inverse[A];
*deklarujemy funkcję f zagadnienia (14.2)
np. * f[x_, y_] := 2*(Pi)^2 *Cos[Pi x]*Sin[Pi y]
*obliczamy macierz G^h*
G=Table[0, {j, 1, n}, {i, 1, n}];
Do[
  Do[
    G[[j, i]]=
      N[Integrate[
        f[(x+z)/(n+1)+(j-1)/(n+1), (y+z)/(n+1)+(i-1)/(n+1)],
        {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, {z, 0, 1}
      ], 4], {j, 1, n}], {i, 1, n}]
Re[G];
B=Table[0, {j, 1, n^2}];
Do[

```

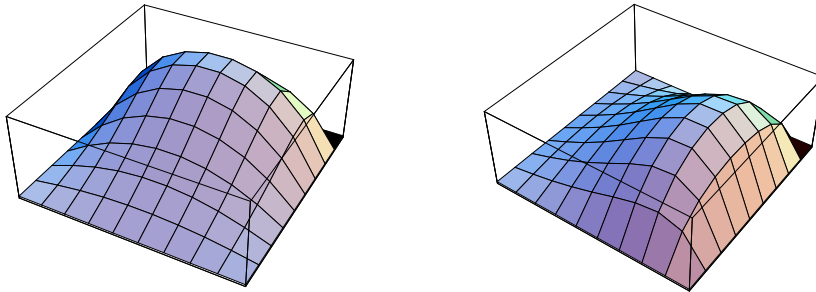
```

B[[j]]=Re[G[Mod[(j-1),n]+1,Quotient[(j-1),n]+1]],
{j,1,n^2}]
*znajdujemy macierz współczynników  $A^h$ *
W1=(n+1)^(-2)*H.B;
W2=Table[0,{j,1,n+2},{m,1,n+2}];
For[j=1,j<=n^2,j++,
W2[Mod[j-1,n]+2,Quotient[j-1,n]+2]=W1[[j]]]
*rysujemy rozwiązanie zagadnienia (14.2)*
ListPlot3D[W2]
Poniżej prezentujemy rozwiązanie numeryczne  $u_h$  zagadnienia:

```

$$-\Delta u = x^3,$$

gdzie $h = \frac{1}{9}$.



Rozwiązanie numeryczne

Współczesna literatura łączy MES z teorią falek: [BPX], [D], [DK].

15. Aproksymacja wielopoziomowa i falki

Ostatnie rozdziały są poświęcone teorii falek (pakietów falowych). Gwałtowny rozwój przeżywa ona z końcem lat 80. wraz z pojawieniem się konstrukcji falek o zwartym nośniku [Da]. Jedynym wcześniej znanym pakietem falowym o zwartym nośniku był układem Haara. Układ ten jest szczególnym przypadkiem badanego od lat 60. układu Ciesielskiego - Franklina - Stömberga (w skrócie CFS), który jest również przykładem pakietu falowego. Układ CFS okazał się już dawno doskonałym narzędziem w różnych działach analizy. Mianowicie, można pokazać, że tworzy on bazę bezwarunkową w przestrzeniach Hardiego [W] i [St]. Skonstruujemy tutaj falki, które uogólniają stosowany wcześniej układ CFS, zatem nie będą mieć zwartego nośnika, oczywiście z wyjątkiem bazy Haara, por. rozdział 16. Właściwym narzędziem do opisu tej teorii jest przestrzeń funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a. Przydatnym pojęciem jest tutaj **aproksymacja wielopoziomowa**.

Definicja 15.1.

Ciąg przestrzeni $(W_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ podprzestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$ tworzy **wielopoziomową aproksymację** (ang. *multiresolution approximation*) przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$, jeśli:

- (i) $W_j \subset W_{j+1}$ dla $j \in \mathbb{Z}$,
- (ii) $f \in W_j \implies f(\cdot - 2^{-j}\alpha) \in W_j$ dla $j \in \mathbb{Z}$ i $\alpha \in \mathbb{Z}^n$,
- (iii) $f \in W_j \iff f(2\cdot) \in W_{j+1}$,
- (iv) w przestrzeni W_0 istnieje funkcja ϕ taka, że rozpina ona przestrzeń W_0 oraz całkowite translacje funkcji ϕ są stabilne, por. uwaga 10.14,
- (v) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} W_j = 0$,
- (vi) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} W_j$ jest gęsty $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Własność (vi) oznacza, że dla każdej funkcji $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje funkcja

$$\varphi \in \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

taka, że

$$\|f - \varphi\|_2 \leq \varepsilon.$$

Przez pojęcie przestrzeni będziemy rozumieć przestrzeń liniową, tj. jeśli $f, g \in W$ oraz $\lambda \in R$, to

$$f + g \in W \quad \text{oraz} \quad \lambda f \in W.$$

Niech σ_{2^j} oznacza operator skalowania przez 2^j . Mianowicie

$$\sigma_{2^j} f(x) = f(2^j x), \quad j \in Z.$$

Zdefiniujemy ciąg przestrzeni. Przestrzeń W_0 definiujemy tak jak w rozdziale 10. Mianowicie, niech V będzie rodziną unimodularną. Wówczas całkowite translacje funkcji B_V są stabilne w $L^2(R^n)$, por. tw. 10.10, i określają podprzestrzeń

$$W_0 = \text{span}_{L^2(R^n)} \{B(\cdot - \alpha|V) : \alpha \in Z^n\}.$$

Niech

$$W_j = \sigma_{2^j} W_0.$$

Twierdzenie 15.2

Ciąg przestrzeni W_j tworzy wielopoziomą aproksymację w $L^2(R^n)$.

Dowód. Własność (i) wynika z algorytmu rozdrobienia. W szczególności w naszej sytuacji, gdy skalujemy funkcję B_V przez potęgi dwójki, sytuacja jest prostsza. Mianowicie, ze wzoru (1.9) wynika, że

$$\frac{\widehat{B_V}(2y)}{\widehat{B_V}(y)} = \prod_{v \in V} \frac{1 + e^{-2\pi i v \cdot y}}{2}.$$

Stosując proste własności transformaty Fouriera, por. lemat A 4, otrzymamy wzór

$$B_V(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a_\alpha B_V(2x - \alpha),$$

gdzie ciąg współczynników (tzw. maska) jest skończony, co pociąga (i). Własności (ii), (iii) oraz (iv) wynikają wprost z definicji. Własność (vi) otrzymamy z tw. 5.1. Niech P_{2^j} oznacza rzut ortogonalny

$$P_{2^j} : L^2(R^n) \rightarrow W_j.$$

Warunek (v) oznacza, iż dla dowolnej funkcji $f \in L^2(R^n)$

$$\|P_{2^j} f\|_2 \rightarrow 0, \quad j \rightarrow -\infty.$$

Warunek ten wystarczy sprawdzić dla funkcji o zwartym nośniku. Niech

$$\text{supp } f \subset [-R, R]^n.$$

Z wniosku 2.17

$$\sum_{\alpha \in Z^n} B_V(\cdot - \alpha) = 1,$$

więc z definicji rzutu P_{2^j} oraz z nierówności Jensena (A III)

$$\|P_{2^j} f\|_2^2 \leq \int_{R^n} \sum_{\alpha \in Z^n} |(f, 2^{jn} B_V^*(2^j \cdot - \alpha))_{R^n}|^2 B(2^j x - \alpha | V) dx.$$

Z twierdzenia 1.7

$$\int_{R^n} B(x | V) dx = 1,$$

zatem

$$\|P_{2^j} f\|_2^2 \leq \sum_{\alpha \in Z^n} 2^{jn} |(f, B_V^*(2^j \cdot - \alpha))_{R^n}|^2.$$

Z nierówności Höldera dla $j < \log_2(1/R)$

$$\begin{aligned} \|P_{2^j} f\|_2^2 &\leq \sum_{\alpha \in Z^n} 2^{jn} \|f\|_2^2 \int_{[-R, R]^n} |B_V^*(2^j \cdot - \alpha)|^2 \leq \\ &\leq \|f\|_2^2 \sum_{\alpha \in Z^n} \int_{[-2^j R, 2^j R]^n - \alpha} |B_V^*(\cdot)|^2 \leq \\ &\leq \|f\|_2^2 \int_{\bigcup_{\alpha} ([2^j R, -2^j R]^n - \alpha)} |B_V^*(\cdot)|^2. \end{aligned}$$

Jeśli $j \rightarrow -\infty$, to suma nieskończona całek zmierza do zera, więc

$$\|P_{2^j} f\|_2 \rightarrow 0,$$

co kończy dowód. ◇

Do wielopoziomowej aproksymacji będziemy stosować metody i definicje przestrzeni Hilberta.

Definicja 15.3

Ciąg $\{S_m\} \subset L^2(R^n)$ jest zbieżny do funkcji $f \in L^2(R^n)$ w $L^2(R^n)$, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie N , że dla $m > N$

$$\|f - S_m\|_2 < \varepsilon.$$

Definicja 15.4

Ciąg $\{f_m\}$ tworzy **bazę ortonormalną** w podprzestrzeni $W \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, jeśli

$$(f_k, f_m)_{\mathbb{R}^n} = \begin{cases} 1 & \text{dla } m = k \\ 0 & \text{dla } m \neq k \end{cases}$$

$$\{f_m\} \subset W$$

oraz każda funkcja f z W ma jednoznaczne przedstawienie

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, f_k)_{\mathbb{R}^n} f_k,$$

gdzie ciąg sum częściowych

$$S_m = \sum_{k=1}^m (f, f_k)_{\mathbb{R}^n} f_k$$

jest zbieżny do f w $L^2(\mathbb{R}^n)$.

(W teorii przestrzeni Hilberta zakładamy, że W jest domknięta, co wymaga użycia całkowania w sensie Lebesgue'a)

Ponieważ

$$W_j \subset W_{j+1} \quad \text{dla } j \in \mathbb{Z},$$

stąd istnieje przestrzeń W_j^\perp zdefiniowana wzorem

$$W_j^\perp = \{f \in W_{j+1} : \bigwedge_{g \in W_j} (f, g)_{\mathbb{R}^n} = 0\}$$

taka, że

$$W_j \cap W_j^\perp = \{0\}$$

oraz

$$W_{j+1} = W_j \oplus W_j^\perp.$$

Sumę \oplus rozumiemy w ten sposób, że każda funkcja $f \in W_{j+1}$ ma jednoznaczne przedstawienie

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{gdzie } f_1 \in W_j, f_2 \in W_j^\perp.$$

Ponieważ $\{W_j\}$ tworzy wielopoziomową aproksymację, otrzymujemy następujący rozkład

$$(15.5) \quad L^2(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{j=-\infty}^{j=\infty} W_j^\perp,$$

tzn. każda funkcja z $L^2(\mathbb{R}^n)$ ma jednoznaczne przedstawienie jako szereg funkcji z odpowiednich przestrzeni rozkładu (15.5), zbieżny w L^2 . Z (iii) wynika, że jeśli

$$(15.6) \quad f \in W_j^\perp \implies \sigma_k f \in W_{j+k}^\perp.$$

Niech Z_2^n oznacza podzbiór Z^n złożony z wektorów zerojedynkowych

$$Z_2^n = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_j = 0, 1 \quad j = 1, \dots, n\},$$

a

$$Z_{2,0}^n = Z_2^n \setminus \{0\},$$

gdzie 0 oznacza wektor zerowy.

Definicja 15.7

Pakiety falowe lub **falki** są zbiorem $2^n - 1$ funkcji K_ν , które są indeksowane wektorami z $Z_{2,0}^n$. Ponadto

$$\bigcup_{\nu \in Z_{2,0}^n} \{2^j K_\nu(2^j \cdot -\alpha) : \alpha \in Z^n, j \in Z\}$$

tworzy bazę ortonormalną w $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Jak się ta definicja ma do powyższej konstrukcji? Z własności (15.6) wnosimy, że do konstrukcji pakietów falowych wystarcza skonstruowanie dla ustalonego $j \in Z$, np. $j = 0$ funkcji K_ν , tak by

$$\bigcup_{\nu \in Z_{2,0}^n} \{K_\nu(\cdot - \alpha) : \alpha \in Z^n\}$$

tworzyła bazę ortonormalną w W_0^\perp . Okazuje się, że istotne jest znalezienie funkcji K_0 takiej, że jej całkowite translacje tworzą bazę ortonormalną w W_0 . Przypomnijmy definicję wielomianu P_X :

$$P_X(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} B(\alpha|X) e^{2\pi i \alpha \cdot x},$$

gdzie

$$X = \{V, -V\}.$$

Jeśli rodzina wektorów V jest unimodularna, to z twierdzenia 8.10 oraz wniosku 2.17, wielomian spełnia nierówność:

$$0 < P_X \leq 1.$$

Szukamy rozwinięcia Fouriera funkcji $\frac{1}{\sqrt{P_X}}$. Korzystamy ze wzoru

$$(1-x)^s = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{s}{j} x^j \quad -1 \leq x < 1,$$

gdzie $s > -1$, a uogólniony symbol Newtona

$$\binom{s}{j} = \frac{s(s-1)\cdots(s-(j-1))}{j!}, \quad \binom{s}{0} = 1.$$

Zatem przy $s = -1/2$ oraz funkcji

$$\tilde{m}(x) = 1 - P_X(x),$$

(por. dowód lematu 9.9)

$$P_X^{-1/2}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1)}{2^j j!} (\tilde{m}(x))^j.$$

Stąd wnioskujemy, że

$$P_X^{-1/2}(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a_P(\alpha) e^{2\pi i \alpha \cdot x}.$$

Ciąg $a_P = \{a_P(\alpha)\}$ maleje eksponencjalnie i jest zdefiniowany wzorem

$$a_P = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-1/2}{j} m^j,$$

gdzie ciąg

$$m = \delta - B_X|.$$

Funkcję K_0 definiujemy wówczas następująco

$$(15.8) \quad K_0(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a_P(\alpha) B(x + \alpha|V).$$

Zauważmy, że

$$(15.9) \quad \widehat{K}_0 = \frac{\widehat{B}_V}{\sqrt{P_X}}$$

oraz na podstawie (8.13)

$$(15.10) \quad \sum_{\alpha \in Z^n} |\widehat{K}_0(\cdot - \alpha)|^2 = 1.$$

Lemat 15.11

Całkowite translacje funkcji K_0 tworzą bazę ortonormalną w W_0 .
 Dowód. Z tożsamości Parsewala, por. lemat A 4

$$(K_0, K_0(\cdot - \beta))_{R^n} = \int_{R^n} \widehat{K}_0(y) \overline{\widehat{K}_0(y)} e^{-2\pi i \beta \cdot y} dy.$$

Z (8.13) oraz (15.9) otrzymamy

$$\begin{aligned} (K_0, K_0(\cdot - \beta))_{R^n} &= \int_{R^n} \frac{|\widehat{B}_V(y)|^2 e^{-2\pi i \beta \cdot y}}{\sum_{\alpha \in Z^n} |\widehat{B}(y - \alpha|V)|^2} dy = \\ &= \int_{[0,1)^n} e^{-2\pi i \beta \cdot y} dy = \delta_{\beta,0}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz udowodnić, że całkowite translacje rozpinają W_0 . Ze wzoru (15.9)

$$\sqrt{P_X} \widehat{K}_0 = \widehat{B}_V,$$

co prowadzi do formuły odwrotnej do (15.8) i kończy lemat. \diamond

Uwaga. Warto zauważyć, że rzut ortogonalny można przedstawić za pomocą formuły

$$P_{2^j} f(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} (f, 2^{jn} K_0(2^j \cdot - \alpha))_{R^n} K_0(2^j x - \alpha)$$

lub

$$P_{2^j} f = \sigma_{2^j} P_0(\sigma_{2^{-j}} f).$$

Funkcję K_0 również możemy odtworzyć z jej wersji przeskalowanej, tzn. istnieje maska a_K taka, że

$$(15.12) \quad K_0(\cdot/2)/2^n = K_0 * a_K.$$

Ciąg współczynników $a_K = \{a_K(\alpha)\}$ możemy otrzymać w sposób następujący. Niech

$$H(x) = \sum_{\alpha \in Z^n} a_K(\alpha) e^{-2\pi i \alpha \cdot x}.$$

Wówczas (15.12) jest równoważne

$$(15.13) \quad H(x) = \frac{\widehat{K}_0(2x)}{\widehat{K}_0(x)}.$$

Zatem (15.13) można traktować jako definicję funkcji H , tzn.

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{\widehat{B}_V(2x)}{\widehat{B}_V(x)} \sqrt{\frac{P_X(x)}{P_X(2x)}} = \\ &= \prod_{v \in V} \frac{1 + e^{-2\pi i \alpha \cdot v}}{2} \sqrt{\frac{P_X(x)}{P_X(2x)}}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z (15.13) wynika, że

$$|H(x)|^2 \sum_{\alpha \in Z^n} |\widehat{K}_0(x - \alpha)|^2 = \sum_{\alpha \in Z^n} |\widehat{K}_0(2x - 2\alpha)|^2,$$

czyli z (15.10)

$$|H(x)| = \sum_{\alpha \in Z^n} |\widehat{K}_0(2x - 2\alpha)|^2.$$

Zatem z (15.10)

$$(15.14) \quad \sum_{\kappa \in Z_2^n} |H(x - \frac{1}{2}\kappa)|^2 = 1.$$

Definicje falek przeprowadzimy dla wymiarów $n = 1, 2, 3$. Dla wymiarów $n > 3$ konstrukcja jest bardziej złożona. W tym celu wprowadzimy odwzorowanie

$$\eta : Z_2^n \rightarrow Z_2^n.$$

Mianowicie, dla $n = 1$

$$\eta(0) = 0 \quad \eta(1) = 1.$$

Dla $n = 2$

$$\begin{aligned} (0, 0) &\rightarrow (0, 0) & (0, 1) &\rightarrow (0, 1) \\ (1, 0) &\rightarrow (1, 1) & (1, 1) &\rightarrow (1, 0). \end{aligned}$$

Dla $n = 3$

$$\begin{aligned} (0, 0, 0) &\rightarrow (0, 0, 0) & (1, 0, 0) &\rightarrow (1, 1, 0) & (0, 1, 0) &\rightarrow (0, 1, 1) \\ (1, 1, 0) &\rightarrow (1, 0, 0) & (0, 0, 1) &\rightarrow (1, 0, 1) & (1, 0, 1) &\rightarrow (0, 0, 1) \\ (0, 1, 1) &\rightarrow (0, 1, 0) & (1, 1, 1) &\rightarrow (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Funkcja η spełnia warunki $\eta(0) = 0$ oraz

$$(\eta(\nu) + \eta(\mu)) \cdot (\nu + \mu)$$

jest liczbą nieparzystą o ile $\nu \neq \mu$. Niech

$$c_V = 1/2 \sum_{v \in V} v$$

oznacza środek nośnika funkcji B_V . Wprowadźmy jeszcze funkcje

$$H_\nu^*(x) = \begin{cases} H, & \text{jeli } 2\nu \cdot c_V \text{ jest parzysta} \\ \overline{H}, & \text{jeli } 2\nu \cdot c_V \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

oraz

$$(15.15) \quad H_\nu(x) = e^{2\pi i \eta(\nu) \cdot x} H_\nu^*(x + \frac{1}{2}\nu).$$

Falki definiujemy poprzez ich transformatę Fouriera

$$(15.16) \quad \widehat{K}_\nu(2x) = H_\nu(x) \widehat{K}_0(x), \quad \nu \in Z_2^n.$$

Sprawdzenie pozostawiamy czytelnikowi.

Dla funkcji f rozważmy sumę częściową

$$S_k(f, x) = P_{2^k} f(x),$$

czyli

$$S_k(f, x) = \sum_{j=-\infty}^k \sum_{\alpha \in Z^n} \sum_{\nu \in Z_{2,0}^n} (K_\nu(2^j \cdot -\alpha), f)_{R^n} K_\nu(2^j x - \alpha).$$

Funkcje K_ν są falkami, zatem dla dowolnej funkcji $f \in L^2(R^n)$

$$\|S_k(f, \cdot) - f\|_2 \rightarrow 0,$$

o ile $k \rightarrow \infty$. Z twierdzenia 10.8 otrzymujemy również zbieżność punktową, jeśli $f \in W_\infty^{q_V+1}$

$$\|S_k(f, \cdot) - f\|_\infty \leq C \left(\frac{1}{2^k} \right)^{q_V+1}.$$

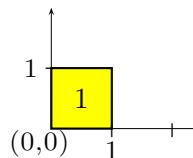
Ponadto, tak jak w przypadku szeregów Fouriera, zbieżność punktową otrzymujemy dla funkcji spełniających kryterium Lipschitza, por. rozdział 16 oraz pracę [KKR].

16. Baza Haara

W rozdziale tym wprowadzimy bazę Haara określoną na płaszczyźnie R^2 . Będziemy korzystać z wyników rozdziału 15. Jak zauważyliśmy, był to jedyny wcześniej znany, a więc przed pracą I. Daubechies (1988), przykład pakietu falowego o zwartym nośniku. Baza Haara określona w R^n pojawiła się w pracy Ciesielskiego [C2] i służy ona do konstrukcji białego szumu.

W R^2 weźmy rodzinę dopuszczalną V złożoną z dwóch wektorów $(1, 0)$ i $(0, 1)$. Zatem B_V jest funkcją charakterystyczną kwadratu $[0, 1]^2$,

$$B_V(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{poza.} \end{cases}$$

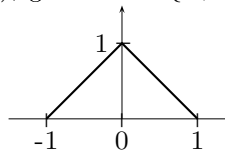


Funkcja charakterystyczna

Z definicji funkcji B_V wynika, że całkowite translacje funkcji B_V tworzą bazę ortonormalną w W_0 , zatem $K_0 = B_V$.

Rezultat ten otrzymamy również korzystając z wyników rozdziału 15. Po pierwsze musimy obliczyć wartości funkcji $B(\cdot|X)$, gdzie $X = \{V, -V\}$.

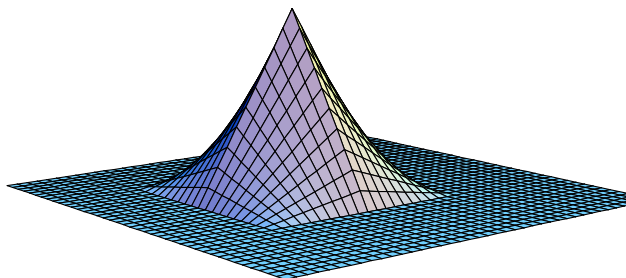
Nietrudno zauważyć, że funkcja ta jest produktem tensorowym (tw. 2.5) dwóch symetrycznych pudełkowych funkcji giętych,



Symetryczna pudełkowa funkcja gięta

$$B((x, y)|X) = N(x|E_2) \cdot N(y|E_2).$$

Funkcja $B(\cdot|X)$ wygląda następująco:



Pudełkowa funkcja gięta

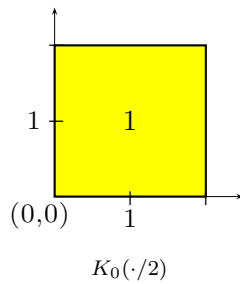
Zatem

$$B(\alpha|X) = \begin{cases} 1 & \alpha = (0,0) \\ 0 & \text{poza.} \end{cases}$$

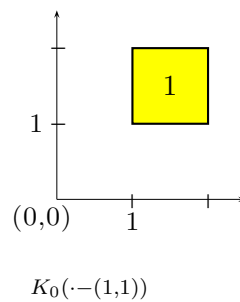
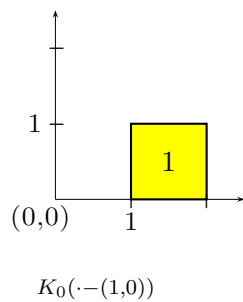
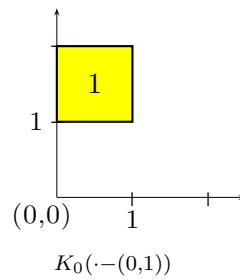
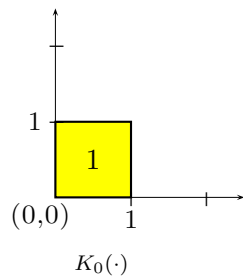
Wówczas ciąg $M = 0$, co pociąga $K_0 = B_V$. Następnie musimy wyliczyć maskę a_K dla funkcji K_0 ,

$$K_0(x/2) = 4 \sum_{\alpha \in Z^2} a_K(\alpha) K_0(x - \alpha).$$

Porównując funkcję $K_0(\cdot/2)$



z odpowiednimi funkcjami:



otrzymamy

$$a_K(\alpha) = \begin{cases} 0,25 & \alpha \in Z_2^2 \\ 0 & \text{poza.} \end{cases}$$

W rozpatrywanym przypadku wektor $c_V = (1/2, 1/2)$. Wprowadzając oznaczenie dla $\nu \in Z_2^2$

$$\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & (1,1) \cdot \nu \text{ parzyste} \\ -1 & (1,1) \cdot \nu \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

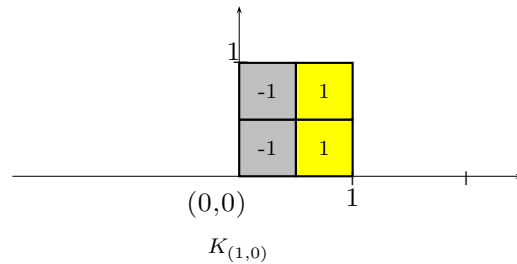
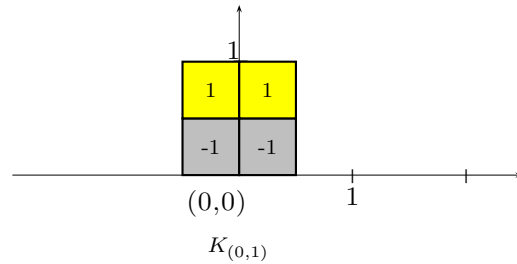
otrzymamy

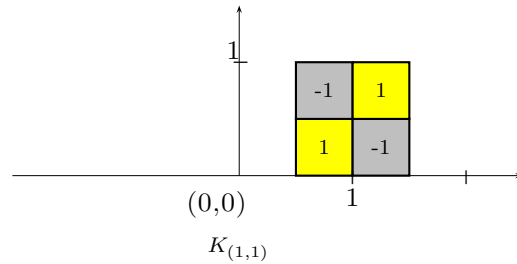
$$\begin{aligned} H_\nu(x) &= e^{2\pi i \eta(\nu) \cdot x} \sum_{\alpha \in Z_2^2} a_K(\alpha) e^{\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} 2\pi i \alpha \cdot (x+1/2\nu)} = \\ &= \sum_{\alpha \in Z_2^2} a_K(\alpha) e^{\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \pi i \alpha \cdot \nu} e^{2\pi i x \cdot (\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \alpha + \eta(\nu))}. \end{aligned}$$

Zatem dla $\nu \in Z_2^2$

$$K_\nu(x/2) = 4 \sum_{\alpha \in Z_2^2} a_K(\alpha) e^{\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \pi i \alpha \cdot \nu} K_0(x - (\begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \alpha - \eta(\nu))).$$

Pakiety falowe wyglądają w następujący sposób:





Wprowadzamy przestrzeń funkcji ciągłych spełniających warunek Lipschitza, $Lip(\alpha, L^p(\mathbb{R}^2))$, $0 < \alpha \leq 1$, $1 \leq p \leq \infty$, tj.

$$\|f - f(\cdot + h)\|_p = \mathcal{O}(\|h\|^\alpha), \quad h \rightarrow 0.$$

Zatem dla $f \in Lip(\alpha, L^p)$ niech

$$|f|_{Lip(\alpha, L^p)} = \sup_{h \in \mathbb{R}^2} \|h\|^{-\alpha} \|f - f(\cdot + h)\|_p.$$

Wielkość tę nazywa się **półnormą**. Przypomnijmy, że P_{2^k} oznacza operator rzutu na $S(K_0(2^k \cdot))$, czyli

$$P_{2^k} f(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{R}^2} (f, 2^{2k} K_0(2^k \cdot - \beta))_{\mathbb{R}^n} K_0(2^k x - \beta).$$

Ponieważ K_0 jest funkcją charakterystyczną kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$, więc wprowadzając oznaczenia: kostki diadycznej o długości krawędzi 2^{-k}

$$I_{\beta, k} = 2^{-k}([0, 1] \times [0, 1]) + 2^{-k} \beta$$

oraz pola kostki

$$|I_{\beta, k}| = 2^{-2k},$$

otrzymamy

$$P_{2^k} f(x) = \sum_{\beta \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{|I_{\beta, k}|} \left(\int_{I_{\beta, k}} f(y) dy \right) K_0(2^k x - \beta).$$

W teorii aproksymacji omawiając własności operatorów udowadnia się nierówności typu D. Jacksona i S. Bernsteina. Mianowicie:

$$(J) \quad \|f - P_{2^k} f\|_p \leq \pi \sqrt{8} \cdot 2^{-k\alpha} |f|_{Lip(\alpha, L^p)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

$$(B) \quad |H|_{Lip(\alpha, L^p)} \leq 6 \cdot 2^{k/p} \|H\|_p, \quad H \in S(K_0(2^k \cdot)), \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Udowodnimy nierówność (J) w przypadku $1 \leq p < \infty$. Ustalmy k . Wówczas dla każdego $x \in I_{\beta, k}$

$$\begin{aligned} |f(x) - P_{2^k} f(x)| &= \left| f(x) - \frac{1}{|I_{\beta, k}|} \int_{I_{\beta, k}} f(y) dy \right| = \\ &= \left| \frac{1}{|I_{\beta, k}|} \int_{I_{\beta, k}} (f(x) - f(y)) dy \right| \leq \frac{1}{|I_{\beta, k}|} \int_{I_{\beta, k}} |f(x) - f(y)| dy. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności Höldera otrzymamy

$$|f(x) - P_{2^k} f(x)| \leq \left(\frac{1}{|I_{\beta, k}|} \int_{I_{\beta, k}} |f(x) - f(y)|^p dy \right)^{1/p}.$$

Oznaczając przez $K(0, r)$ koło o środku w punkcie 0 i promieniu

$$r = \sqrt{2} 2^{-k},$$

otrzymamy

$$|f(x) - P_{2^k} f(x)| \leq \left(\frac{1}{|I_{\beta, k}|} \int_{K(0, r)} |f(x) - f(x+s)|^p ds \right)^{1/p}.$$

Biorąc obustronnie do p -tej potęgi, całkując po kostce diadycznej $I_{\beta, k}$ oraz sumując po wszystkich $\beta \in Z^2$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \|f - P_{2^k} f\|_p^p &\leq \sum_{\beta \in Z^2} \frac{1}{|I_{\beta, k}|} \int_{I_{\beta, k}} \int_{K(0, r)} |f(x) - f(x+s)|^p ds dx \leq \\ &\leq 2^{2k} \int_{K(0, r)} \int_{R^n} |f(x) - f(x+s)|^p dx ds \leq \\ &\leq 2^{2k} \int_{K(0, r)} \|s\|^{p\alpha} |f|_{Lip(\alpha, L^p)}^p ds. \end{aligned}$$

Stosując zamianę zmiennych na współrzędne biegunowe, otrzymamy

$$\|f - P_{2^k} f\|_p^p \leq \frac{2\pi}{2 + p\alpha} (\sqrt{2})^{2+p\alpha} 2^{-kp\alpha} |f|_{Lip(\alpha, L^p)}^p.$$

Stąd otrzymujemy nierówność (J).

Spis oznacze

V	str. 14	$f *' g$	str. 35	σ	str. 91
\mathbf{V}	str. 14	$\omega_{k,p}(f, h)$	str. 45	ψ_h	str. 35
\mathbf{E}_k	str. 24	$(\cdot, \cdot)_{R^n}$	str. 9	$S(\psi_h)$	str. 35
$\mathbf{E}_{(k_1, k_2)}$	str. 24	$\text{supp} f$	str. 10	$\psi * a$	str. 35
$\langle V \rangle$	str. 14	$\ f\ _p$	str. 9	$\psi_h *'_h a$	str. 35
c_V	str. 30	$\ f\ _\infty(\Omega)$	str. 9	δ	str. 36
$\sum V$	str. 30	$\ f\ _{k,p}$	str. 41	δ_0	str. 36
$\text{span}\{V\}$	str. 7	Π_k	str. 8	$a *'_h b$	str. 35
X	str. 59	C^k	str. 9	$a * b$	str. 35
b_X	str. 60	$L^p(R^n)$	str. 9	m^k	str. 36
$B_V, B(\cdot V)$	str. 15	$W_p^k(R^n), W_p^k$	str. 41	r^ϱ	str. 37
$N_V, N(\cdot V)$	str. 43	∇	str. 28	∂E	str. 7
$B(\cdot Q)$	str. 20	D_y	str. 27	$E_1 + E_2$	str. 8
B_V^*	str. 68	D^α	str. 8	$E_1 + v$	str. 8
ϱ_V	str. 29	$Q^\varrho, Q^{\psi, \varrho}$	str. 37	Z^n	str. 8
G_V	str. 21	$Q_h, Q_h^{\psi, \varrho}$	str. 41	Z_2^n	str. 94
$D(V)$	str. 55	Q_h^V	str. 43	$Z_{2,0}^n$	str. 94
$S(B_V)$	str. 35	$Q_h^{(V_1, V_2)}$	str. 77	$\#$	str. 8
Φ_X	str. 61	$Q_h^{(V, V, \varrho)}$	str. 84	$\ x\ $	str. 7
P_X	str. 59	P_h, P_h^V	str. 70	$ \alpha $	str. 8
\hat{f}	str. 10	I_h, I_h^X	str. 64	$\alpha!$	str. 8
$f _I$	str. 35	\mathcal{M}	str. 74	x^α	str. 8
$f * g$	str. 10	τ_t	str. 74	$\text{deg } p$	str. 8

Skorowidz terminów

– algorytm rozdrobienia 48 – baza ortonormalna 93
– brzeg zbioru 7 – ciąg malejąco eksponencjalnie 60
– gradient 28 – funkcja –
fundamentalna 61 – odtwarzająca
wielomiany 36 – p-całkowalna 9 –
biortogonalna 68 – Fouriera transformata 10 –
lematy A 1 do 4 str. 11–13 – liniowa niezależność 56 –
Marcinkiewicza średnia 74 – maska 47 – moduł
gładkości 45 – nierówność –
Höldera 10 – Jensena 10
– Minkowskiego 10 – nośnik
funkcji 10 – odwrotna transformata
Fouriera 10 – Parsewala tożsamość 13 – pochodna
kierunkowa 27 – Poissona wzór 11 –
powłoka wypukła 14 – pudełkowa funkcja gładka 15 –
quasi-interpolacja 37 – quasi-rzuty 84
– rodzina – dopuszczalna 14 –
unimodularna 56 – rzut ortogonalny 70 –
symetryczna pudełkowa funkcja gładka 43 – splot 10 –
twierdzenie Stranga–Fixa 46 – twierdzenie
Bezout 39 – unimodularność 56 –
wielopoziomowa aproksymacja 91 – wielościan 8 –
wielościenna funkcja gładka 20

References

- [1] de Boor C. (1987): *The polynomials in the linear span of integer translates of compactly supported function*. Const. Approx. 3, 199–209.
- [2] de Boor C., DeVore R., Ron A. (1993): *On the construction of multivariate (pre)wavelets*. Constr. Approximation 9, vol. 2-3, 123–166.
- [3] de Boor C., DeVore R., Ron A. (1994): *Approximation from shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$* . Tran of Amer. Math. Soc. vol. 341 no 2, 787–806.
- [4] Boehm W., Farin G., Kahmann J. (1984): *A survey of curve and surface methods in CAGD*. Computer Aided Geometric Design 1, 1–60.
- [5] de Boor C., Höllig K. (1982/3): *B-splines from parallepipies*. J. d'Anal. Math. 42, 99–115.
- [6] de Boor C., Höllig K., Riemenschneider S. (1993): *Box Splines*. Springer-Verlag.
- [7] Bramble J.H., Pasciak J.E., Xu J. (1990): *Parallel multilevel preconditioners*. Math. Comput. 55, 1–22.
- [8] de Boor C., Ron A. (1994): *The exponentials in the span of the integer translates of a compactly supported function: approximation order and quasi-interpolation*. J. London Math. Soc. (2).
- [9] Beška M., Dziedziul K. (1994): *Notes on Strang-Fix theorem*. Proceedings Open Problems in Approximation Theory, editor B. Bojanov, SCT Publishing, 16–24.
- [10] Beška M., Dziedziul K. (1997): *Multiresolution approximation and Hardy spaces*. J. Approx. Theory 88, no. 2, 154–167.
- [11] Chui C.K., Diamond H. (1987): *A natural formulation of quasi-interpolation by multivariate splines*. Proc. Amer. Math. Soc. 99, 643–646.
- [12] Chui C.K., Diamond H., Raphael L.A. (1987): *Interpolation by multivariate splines*. Math. Comp. 51, 203–218.
- [13] Chui C.K., Jetter K., Ward J.D. (1987): *Cardinal interpolation by multivariate splines*. Math. Comp. 48, 711–724.
- [14] Ciesielski Z. (1983): *Spline bases in spaces of analytic function*. Canadian Math. Soc. Conference Proceedings, vol 3: Approximation Theory, 81–111.
- [15] Ciesielski Z. (1985): *Haar orthogonal functions in analysis and probability*. Colloquia Math. Soc. Janos Bolyai 49, Alfred Haar Memorial Conference, Budapest (Hungary) 25–53.
- [16] Ciesielski Z. (1988): *Nonparametric polynomial density estimation*. Probab., Math. Statist. 9.2, 1–10.
- [17] Ciesielski Z. (1990): *Asymptotic nonparametric spline density estimation in several variables*. International Series of Num. Math., Vol. 94, Birkhäuser Verlag Basel.

- [18] Dahmen W. (1993): *Decomposition of refinable spaces and applications to operator equations*. Algorithms for Approximation III, M. G. Cox, J.C. Mason (eds.), Baltzer, Amsterdam.
- [19] Dahmen W., Dyn N., Levin D. (1985): *On the convergence rates of subdivision algorithms for box spline surfaces*. Constr. Approx. 1: 305–322.
- [20] DeVroye L., Györfi L. (1985): *Nonparametric Density Estimation The L_1 View*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics 1985. (Przekład rosyjski, 1988, Moskwa „Mir”)
- [21] Dahmen W., Kunoth A. (1992): *Multilevel preconditioning*. Numer. Math. vol. 63/3, 315–344.
- [22] DeVore R.A., Jawerth B., Popov V. (1992): *Compression of wavelet decompositions*. Amer. J. Math. 114, 737–785.
- [23] Dahmen W., Micchelli C.A. (1985): *Local linear independence of translates of a box spline*. Studia Math. 82, 243–262.
- [24] Dahmen W., Micchelli C.A. (1984): *On the optimal approximation rates for criss-cross finite element spaces*. J. Comput. Appl. Math. 10, 255–273.
- [25] Dahmen W., Micchelli C.A. (1988): *Convexity of multivariate Bernstein polynomials*. Studia Sci. Math. Hungar 23, 265–285.
- [26] Daubechies I. (1988): *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Comm. Pure and Appl. Math. 41, 158–160.
- [27] DeVore R.A., Jawerth B., Lucier B.J. (1993): *Surface compression*. Computer Aided Geometric Design 9, 219–239.
- [28] Dzielniak K. (1993): *Funkcja fundamentalna* Praca doktorska, PAN Instytut Matematyczny Warszawa.
- [29] Dzielniak K. (1996): *Cardinal Interpolation by splines*. Zeszyty Naukowe PG nr 535, 3–9.
- [30] Dzielniak K. (1996): *Quasi-projectors*. Praca przedłożona do Studia Hungarica.
- [31] Fichtenholtz G.M. (1975): *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 1–3, PWN, Warszawa.
- [32] Fix G., Strang G. (1970): *A Fourier analysis of the finite element variational method*. C.I.M.E. II, Ciclo Erice (1971), in *Constructive aspects of functional analysis* (ed. G. Geymonat), (Cremonese, Rome, 1973), 793–840.
- [33] Grisvard P. (1985): *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman Advanced Publishing Program.
- [34] Hakopian H., Saakyan A.A. (1988): *O sisteme differencial'nych urawnienij swjazannoj s polinomial'nym klassom sdwigow boks splajna* (po rosyjsku). Matematyckie Zamietki 44 no. 6, 705–724.
- [35] Höllig K. (1986): *Multivariate splines*. Approximation Theory, de Boor ed., Proc. Symp. Appl. Math. 36, Amer. Math. Soc., Providence RI, 103–127.
- [36] Jetter K. (1992): *Multivariate approximation: a view from cardinal interpolation*. in Approx. Theory VI, E.W. Cheney, C.K. Chui, L.L. Schumaker (eds.)
- [37] Jia R.Q. (1986): *A counterexample to a result concerning controlled approximation*. Proc. Amer. Math. Soc. 97, 647–654.

- [38] Jia R.Q. (1995): *The Toeplitz theorem and its applications to approximation theory and linear PDE's*. Tran. Amer. Math. Soc. 347 vol.7, 2585–2594.
- [39] Jia R.Q., Micchelli C.A. (1991): *Using the refinement equations for the construction of pre-wavelets II: power of two*. *Curves and Surfaces P.J.Laurent, A.Le Mhaut and L.L.Schumaker (eds.) New York: Academic Press, 209-246*.
- [40] Kelly S.E., Kon M.A., Raphael L.A.(1994): *Pointwise convergence of wavelet expansions*. Bulletin of The Amer. Math. Soc. vol 30 (1), 87–94.
- [41] Kowalski J.K. (1990): *Application of box splines to the approximation of Sobolev spaces*. J. Approx. Theory 61 (1), 53–73.
- [42] Kowalski J.K. (1990): *A method of approximation of Besov spaces*. Studia Math. 96 (2), 183–193.
- [43] Krzykowski G. (1992): *Equivalent conditions for the consistency of nonparametric spline density estimators*. Probab., Math. Statist. 13. 2, 269–276.
- [44] Leja F. (1979): *Funkcje zespolome*. Warszawa: PWN.
- [45] Marcinkiewicz J. (1964): *Collected Papers; Quelques remarques sur l'interpolation*. Warszawa: PWN.
- [46] Marcinkowska H. (1993): *Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe*. Warszawa: PWN.
- [47] Ron A. (1990): *A characterization of the approximation order of multivariate spline spaces*. Stud. Math. 98 (1), 73–90.
- [48] Ron A., Sivakumar N. (1993): *The approximation order of box spline spaces*. Proc. of Amer. Math. Soc. 117 (2) 473–482.
- [49] Rudin W. (1982): *Podstawy analizy matematycznej*. Warszawa: PWN.
- [50] Rudin W. (1986): *Analiza rzeczywista i zespolona*. Warszawa: PWN.
- [51] Stein E.M. (1970): *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton, N.J:Princeton Univ. Press.
- [52] Strömberg J.O. (1981): *A modified Franklin system and higher order spline system on R^n a unconditional basis of Hardy spaces*. Department of Mathematics, University of Stockholm.
- [53] Strömberg J.O. (1981): *A modified Franklin system and higher-order spline system on R^n as unconditional bases for Hardy spaces*. Conference on Harmonic Analysis in Honor of Antoni Zygmund, Vol II(W. Beckner et al.,eds.) Wadsworth Math. Ser. Wadsworth, Belmont, CA, 475–494.
- [54] Stein E.M., Weiss G. (1971): *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton, N.J:Princeton Univ. Press.
- [55] Wojtaszczyk P. (1984): *H_p spaces $p \leq 1$, and spline systems*. Studia Math. 77, 289–320.