

Procesy stochastyczne

1 Co to jest proces stochastyczny

Będziemy zakładać w tej książce, że dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, \mathcal{F}, P) .

Definicja 1.1 *Procesem stochastycznym nazywamy zbiór zmiennych losowych $\{X_t\}_{t \in T}$, które przyjmują wartości w przestrzeni mierzalnej (Ξ, \mathcal{X}) i są indeksowane przez zbiór T .*

Definicja mówi nam, dla każdego $t \in T$ $X_t : \Omega \rightarrow \Xi$ jest \mathcal{F}/\mathcal{X} -mierzalna. Oznaczamy ją również przez $X(t)$.

Przykład 1.2 *Jeśli $T = \{0, 1, 2, \dots, n\}$ oraz $\Xi = \mathbb{R}$, to $\{X_t\}_{t \in T}$ jest wektorem losowym w \mathbb{R}^n .*

Przykład 1.3 *Jeśli $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ oraz $\Xi = \mathbb{R}^k$ lub $\Xi = \mathbb{C}^k$ lub Ξ jest zbiorem skończonym, to $\{X_t\}_{t \in T}$ jest ciągiem losowym np. łańcuch Markowa.*

Proces $X(t, \omega)$ jest funkcją dwóch zmiennych $t \in T$ zaś $\omega \in \Omega$. Dla ustalonego ω

$$X(\cdot, \omega) : T \rightarrow \Xi,$$

czyli każdemu ω przyporządkujemy funkcję element z przestrzeni Ξ^T . Interesuje nas wyposażenie tej przestrzeni w σ -ciało tak aby proces był odwzorowaniem mierzalnym.

Definicja 1.4 (Zbiory cylindryczne) *Załóżmy, że dana jest przestrzeń mierzalna (Ξ, \mathcal{X}) . Wówczas zbiorem cylindrycznym w przestrzeni Ξ^T nazywamy zbiór postaci*

$$\{x \in \Xi^T : (x_{t_1}, \dots, x_{t_n}) \in A\},$$

gdzie $A \in \mathcal{X}^n = \mathcal{X} \otimes \dots \otimes \mathcal{X}$.

Definicja 1.5 *Produktowym σ -ciałem \mathcal{X}^T w przestrzeni Ξ^T nazywamy najmniejsze σ -ciało generowane przez wszystkie zbiory cylindryczne.*

Definicja 1.6 *Funkcją losową nazywamy odwzorowanie $X : \Omega \rightarrow \Xi^T$, które jest $\mathcal{F}/\mathcal{X}^T$ mierzalne. Realizacje $X(\omega)$ nazywamy ścieżkami i oznaczamy x .*

Definicja 1.7 Niech (E, \mathcal{E}) oznacza przestrzeń mierzalną. Wówczas odwzorowanie mierzalne $f : \Xi^T \rightarrow E$, które jest $\mathcal{X}^T/\mathcal{E}$ mierzalne nazywamy funkcjonałem określonym na ścieżkach.

Przykładem funkcjonału jest operator rzutu $\pi_t : \Xi^T \rightarrow \Xi$ ewaluacji funkcji $f : T \rightarrow \Xi$ dany wzorem $\pi_t(f) = f(t)$. Jest on mierzalny, gdyż jednowymiarowe cylindry są dane następującą formułą:

$$\{f \in \Xi^T : f(t) \in A\} = \pi_t^{-1}(A),$$

gdzie zbiór $A \in \mathcal{X}$. Następujący lemat wyjaśnia kluczową rolę π_t .

Lemat 1.8 *Odwzorowanie*

$$X : \Omega \rightarrow \Xi^T$$

jest $\mathcal{F}/\mathcal{X}^T$ mierzane, czyli jest funkcją losową wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $t \in T$ złożenie $\pi_t X$ jest \mathcal{F}/\mathcal{X} mierzalne

DOWÓD: Implikacja w jedną stronę \Rightarrow jest oczywista bo $\pi_t X$ jest złożeniem dwóch funkcji mierzalnych. W drugą stronę \Leftarrow wystarczy pokazać, że przeciwobraz dowolnego cylindra jednowymiarowego $\pi_t^{-1}(A)$ jest \mathcal{F} mierzalny, czyli

$$X^{-1}(\pi_t^{-1}(A)) = (\pi_t X)^{-1}(A) \in \mathcal{F}$$

co kończy dowód.

•

Zauważmy, że z lematu wynika iż funkcja losowa X wyznacza proces stochastyczny $X_t = \pi_t X$. Z drugiej strony każdy proces stochastyczny X_t wyznacza funkcję losową X .

Ponieważ będziemy chcieli skonstruować procesy stochastyczny posiadające pewne własności wygodnie jest wskazać w zbiorze Ξ^T pewien podzbiór U . I tak w dalszym ciągu dla $T = [0, 1]$ zbiór U oznaczać będzie zbiór funkcji ciągłych rzeczywistych $\Xi = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, gdzie $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ oznacza σ -ciało zbiorów borelowskich; $U = C(T)$. Zauważmy, że zbiór U nie należy do \mathcal{X}^T . Inny dobór zbioru U jest w przykładzie 12. W U σ -ciało, które będziemy oznaczać przez $U \cap \mathcal{X}^T$ definiujemy w standardowy sposób:

$$U \cap \mathcal{X}^T = \{C \cap U : C \in \mathcal{X}^T\}.$$

Definicja 1.9 Funkcję losową w U nazywamy funkcję $X : \Omega \rightarrow U \subset \Xi^T$, która jest $\mathcal{F}/U \cap \mathcal{X}^T$ mierzalna.

Lemat 1.10 X jest funkcją losową w U wtedy i tylko wtedy gdy $\{X_t\}_{t \in T}$ jest procesem stochastycznym o trajektoriach w zbiorze U .

DOWÓD: Ponieważ $X(\omega) \in U$ zatem X jest $\mathcal{F}/U \cap \mathcal{X}^T$ mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy jest $\mathcal{F}/\mathcal{X}^T$ mierzalna. Dalej dowód wynika z Lematu 8.

•

Przykład 1.11 (Miary losowe) Niech zbiór T będzie oznaczać zbiory borelowskie w \mathbb{R}^d zaś $\Xi = \overline{\mathbb{R}^+} = [0, \infty]$. Wówczas funkcja losowa $X : \Omega \rightarrow U \subset \Xi^T$ oznacza miarę losową, jeśli za U weźmiemy miary przeliczanie addytywne.

Przykład 1.12 Jeśli X jest miarą losową i dla każdego zbioru borelowskiego B , $X(B)$ jest zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych, to X jest procesem punktowym. Jeśli X jest miarą losową i dla każdego $r \in \mathbb{R}$, $X(\{r\}) \leq 1$, to X jest procesem prostym. Proces Poissona jest procesem punktowym prostym.

Zadanie 1.13 Dla dowolnego zbioru przeliczalnego $S = \{t_1, t_2, \dots\}$ zawartego w T definiujemy σ -ciało w Ξ^T (ozn. $\mathcal{X}^S(\Xi^T)$), które jest generowane przez jednowymiarowe cylindry postaci $\pi_t^{-1}(A)$, gdzie $A \subset \Xi$ i $t \in S$. Udowodnić, że

$$\mathcal{X}^T = \bigcup_{S \subset T} \mathcal{X}^S(\Xi^T).$$

DOWÓD. Oznaczmy $D = \bigcup_{S \subset T} \mathcal{X}^S(\Xi^T)$. Oczywiście $D \subset \mathcal{X}^T$. W drugą stronę wystarczy pokazać, że D jest σ -ciałem.

•

W dalszym ciągu potrzebować będziemy następujące twierdzenie z teorii miary []:

Twierdzenie 1.14 (O zgodności dwóch miar) Załóżmy, że dane są dwie miary określone na (Ξ, \mathcal{X}) . Niech dana będzie rodzina \mathcal{G} zbiorów zamknięta ze względu na skończone przekroje i taka, że $\mu(E) = \nu(E)$ dla $E \in \mathcal{G}$. Zakładamy ponadto, że istnieją zbiory $E_i \in \mathcal{G}$ takie, że $\mu(E_i) = \nu(E_i) < \infty$ i $\Xi = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ (czyli zakładamy, że miary są σ -skończone). Wówczas miary μ i ν są zgodne na σ -ciele generowanym przez \mathcal{G} .

Definicja 1.15 Rozkładem funkcji losowej $X : \Omega \rightarrow \Xi^T$ nazywamy miarę probabilistyczną określoną na (Ξ^T, \mathcal{X}^T) wzorem

$$\mu(E) = P(\omega : X(\omega) \in E),$$

gdzie $E \in \mathcal{X}^T$. Na zbiorach cylindrycznych postaci

$$C = \bigcap_{j=1}^n \pi_{t_j}^{-1}(A_j),$$

gdzie $A_j \in \mathcal{X}$

$$\mu(C) = P\{\omega : X_{t_j}(\omega) \in A_j, j = 1, \dots, n\}.$$

Chcemy teraz zawęzić funkcję losową do zbioru Ξ^K , gdzie $K \subset T$. W tym celu wprowadźmy oznaczenie, przez $x(t)|_{t \in K}$ lub $\pi_K^T(x) = x|_K$ będziemy oznaczać obcięcie funkcji $x : T \rightarrow \Xi$ do zbioru K . Zauważmy, że operator obcięcia

$$\pi_K^T : \Xi^T \rightarrow \Xi^K$$

jest odwzorowaniem $\mathcal{X}^K/\mathcal{X}^T$ mierzalnym.

Wówczas jeśli X jest funkcją losową, to możemy wprowadzić funkcję losową X^K w następujący sposób. Niech $X(\omega)$ będzie realizacją funkcji losowej oznaczoną przez $x(t)$. Wówczas realizację funkcji losowej X^K możemy zdefiniować jako $\pi_K^T(x)$, czyli $X^K = \pi_K^T(X)$. Pozostaje sprawdzić, że definicja jest poprawna, czyli $X^K : \Omega \rightarrow \Xi^K$ jest $\mathcal{X}^K/\mathcal{F}$ mierzalna co wynika ze złożenia funkcji mierzalnych. Zatem możemy wprowadzić również rozkłady μ_K na (Ξ^K, \mathcal{X}^K) . Analogicznie możemy zdefiniować operatory π_K^J o ile $K \subset J \subset T$. Ponieważ rodzinę miar zdefiniowaliśmy używając operatora obcięcia, zatem jeśli $S = \{t_1, \dots, t_n\}$, to aby obliczyć $\mu_S(A_1 \times \dots \times A_n)$ porządkujemy zbiór S , $t_{i_1} < \dots < t_{i_n}$ (tutaj stosujemy identyfikację)

$$A_1 \times \dots \times A_n = \{x \in \Xi^S : x(t_{i_j}) \in A_j, j = 1, \dots, n\}$$

i wówczas

$$\begin{aligned} \mu_S(A_1 \times \dots \times A_n) &= P\{\omega : X^S(t_{i_j}, \omega) \in A_j, j = 1, \dots, n\} \\ &= P\{\omega : X(t_{i_j}, \omega) \in A_j, j = 1, \dots, n\} \\ &= \mu(\{x \in \Xi^T : x(t_{i_1}) \in A_1, \dots, x(t_{i_n}) \in A_n\}), \end{aligned}$$

co wyjaśnia (1.1) dla rodzin skończonych.

Twierdzenie 1.16 *Powyżej zdefiniowana rodzina spełnia warunek*

$$(1.1) \quad \mu_K = \mu \circ (\pi_K^T)^{-1}$$

i ogólnie

$$(1.2) \quad \mu_K = \mu_J \circ (\pi_K^J)^{-1}$$

DOWÓD. Aby udowodnić (1.1) zauważmy, że obie miary są zgodne na zbiorach cylindrycznych, która to rodzina jest zamknięta ze względu na skończone przekroje. Reszta wynika z twierdzenia 14. Do dowodu (1.2) zauważmy, że

$$\begin{aligned} \mu_K &= \mu \circ (\pi_K^T)^{-1} = \mu \circ (\pi_K^J \circ \pi_J^T)^{-1} \\ &= \mu \circ (\pi_J^T)^{-1} \circ (\pi_K^J)^{-1} = \mu_J \circ (\pi_K^J)^{-1}. \end{aligned}$$

•

Definicja 1.17 Rodzina miar μ_K na \mathcal{X}^K indeksowana zbiorami skończonymi spełniająca warunek (1.2) dla dowolnych zbiorów skończonych nazywa się **rodziną zgodną**

Z twierdzenia 16 wynika, że zgodność miar jest warunkiem koniecznym istnienia miary na Ξ^T . Twierdzenie Kołmogorowa pokaże, że jest też warunkiem wystarczającym.

Twierdzenie 1.18 Niech X i Y będą funkcjami losowymi w Ξ^T o ścieżkach w U . Wówczas rozkłady funkcji losowych X, Y oznaczone przez μ, ν są identyczne na $U \subset \Xi^T$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego zbioru skończonego $J \subset T$

$$\mu_J = \nu_J.$$

DOWÓD Dowód w jedną stronę \implies jest teraz oczywisty. Dowód w drugą stronę jest oparty o twierdzenie 14. Trzeba zauważyć tylko, że rodzina zbiorów cylindrycznych jest domknięta ze względu na skończone przekroje.

•

Rozważmy teraz $T = [0, 1]$, $\Xi = \mathbb{R}$, $\mathcal{X} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $U = C(T)$. Niech μ będzie zadaną miarą probabilistyczną na (Ξ^T, \mathcal{X}^T) . Miarę tę możemy rozszerzyć do miary zewnętrznej $\mu^*(B) = \inf_{B \subset E \in \mathcal{X}^T} (\mu(E))$, [Lojasiewicz str.99].

Lemat 1.19 Zbiór U ma miarę zewnętrzną jeden $\mu^*(U) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru przeliczalnego $\tau \subset T$:

$$\mu^*(\{f \in \mathbb{R}^T : f|_{\tau} \text{ jest jednostajnie ciągła w } \tau\}) = 1.$$

Zauważmy, że do naszych rozważań wystarczy założyć, że miara μ jest zupełna, czyli \mathcal{X}^T rozszerzamy o wszystkie zbiory miary zero.

DOWÓD. \implies Niech $\mu^*(U) = 1$. Dla danego τ przeliczalnego definiujemy zbiór

$$A_\tau = \{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi|_\tau \text{ jest jednostajnie ciągła w } \tau\}.$$

Wówczas ponieważ $U \subset A_\tau$, to $1 = \mu^*(U) \leq \mu^*(A_\tau) \leq 1$ co kończy dowód implikacji.

\Leftarrow Niech teraz $E \in \mathcal{X}^T$ dowolny zbiór taki, że $U = C(T) \subset E$. Wystarczy pokazać, że $\mu(E) = 1$. Z zadania 13 istnieje $S = \{t_1, t_2, \dots\} \subset T$ taki, że $E \in \mathcal{X}^S(\Xi^T)$, czyli istnieje $A \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}} = (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^{\mathbb{N}}$

$$E = \{f \in \mathbb{R}^T : (f(t_1), f(t_2), \dots) \in A\}.$$

Można pokazać, że dla dowolnej funkcji $\psi \in \mathbb{R}^T$ takiej, że $\psi|_S$ jest jednostajnie ciągły istnieje funkcja ciągła $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f|_S = \psi|_S$. Ponieważ $C(T) \subset E$ stąd wynika, że $\psi \in E$, czyli

$$A_S := \{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi|_S \text{ jednostajnie ciągły}\} \subset E.$$

Stąd $1 = \mu^*(A_S) \leq \mu^*(E) = \mu(E) \leq 1$ co kończy dowód.

•

W następnych rozdziałach pokażemy, że istnieje miara Wienera skoncentrowana na $U = C(T)$ w sensie lematu 19. Stąd będzie wynikać, że można wprowadzić miarę na U , gdyż zachodzi następujący lemat

Lemat 1.20 *Niech (E, \mathcal{E}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Niech $E' \subset E$ taki, że $P^*(E') = 1$, to istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna P' na $(E', E' \cap \mathcal{E})$ spełniająca równanie*

$$(1.3) \quad P'(E' \cap A) = P(A), \quad A \in \mathcal{E}.$$

DOWÓD. Sprawdzimy, że (1.3) może służyć jako definicja miary. Wystarczy sprawdzić, że definicja jest poprawna, czyli dla dowolnych $A_1, A_2 \in \mathcal{E}$ jeśli

$$(1.4) \quad E' \cap A_1 = E' \cap A_2,$$

to $P(A_1) = P(A_2)$. Zauważmy, że z (1.4) wynika, że $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_1) \subset E \setminus E'$. Stąd

$$P(A_1 \Delta A_2) \leq P^*(E \setminus E') = 0$$

zatem $P(A_1) = P(A_2)$. Pozostałe własności wynikają z definicji.

•

Oczywiście przestrzeń $U = C(T)$, $T = [0, 1]$ jest przestrzenią ośrodkową Banacha z normą supremum $\|x\| = \sup_{t \in [0, 1]} |x(t)|$. Istnieje zatem w U naturalne σ -ciało zbiorów borelowskich \mathcal{B}_U , czyli σ -ciało generowane przez kule otwarte $K_r(x) = \{y : \|x - y\| < r\}$.

Zadanie 1.21 Pokazać, że

$$\mathcal{B}_U = U \cap (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^T.$$

Sens tego zadania jest jasny. Do definicji funkcji ciągłej ψ potrzeba i wystarcza podzbiór przeliczalny gęsty w T taki, że ciąg $\psi|_S$ jest jednostajnie ciągły.

Zadanie 1.22 W dowodzie lematu 1.19 użyto następującej identyfikacji. Jeśli $S = \{t_1, t_2, \dots\} \subset T$, to

$$\mathcal{X}^S(\Xi^T) = \{\{f \in \mathbb{R}^T : (f(t_1), f(t_2), \dots) \in A\} : A \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}\}$$

Uzupełnić dowód.

Zadanie 1.23 Pokazać, że dla dowolnej funkcji $\psi \in \mathbb{R}^T$ takiej, że $\psi|_S$ jest jednostajnie ciągły istnieje funkcja ciągła $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f|_S = \psi|_S$.

2 Twierdzenia o rozszerzaniu

W rozdziale tym podamy podstawowe konstrukcje rozszerzające rodziny miar zgodnych do miary na Ξ^T . W tym celu przypomnimy definicje ciała skończenie addytywnym \mathcal{E} zbiorów z przestrzeni E [Lojasiewicz str 73].

Definicja 2.1 *Jeśli $A, B \in \mathcal{E}$, to $A \cup B \in \mathcal{E}$ i $A \setminus B \in \mathcal{E}$, to \mathcal{E} nazywamy ciałem skończenie addytywnym*

Następnie niech F będzie funkcją skończoną, nieujemną i skończenie addytywną w ciele \mathcal{E} .

Twierdzenie Carathéodory 2.2 *Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby funkcja F dała się rozszerzyć do miary na σ -ciele generowanym przez ciało skończenie addytywne \mathcal{E} jest jej przeliczalna addytywność w \mathcal{E} . [Dowód Lojasiewicz str 99.]*

Definicja 2.3 *Przestrzenie mierzalne (E_1, \mathcal{E}_1) i (E_2, \mathcal{E}_2) są izomorficzne w sensie Borela, jeśli istnieją funkcje f i f^{-1}*

$$f : E_1 \rightarrow E_2, \quad f^{-1} : E_2 \rightarrow E_1$$

odpowiednio mierzalne.

Definicja 2.4 *(E, \mathcal{E}) jest przestrzenią Borela jeśli istnieje zbiór borelowski A w $[0, 1]$, taki, że (E, \mathcal{E}) oraz $(A, A \cap \mathcal{B}_{[0,1]})$ są izomorficzne w sensie Borela.*

Sformułujemy lemat, którego dowód jest oparty o istnienie warunkowych prawdopodobieństw. [Kallenberg]

Lemat 2.5 *Niech dane będą zmienne losowe $X, X' : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Xi, \mathcal{X})$ o jednakowych rozkładach $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X')$ oraz zmienna losowa $Y : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (A, \mathcal{A})$, gdzie (A, \mathcal{A}) jest przestrzenią Borela. Niech zmienna Z ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$ i jest niezależna od X' . Wówczas istnieje funkcja mierzalna $f : \Xi \times [0, 1] \rightarrow A$ taka, że*

$$\mathcal{L}(X', f(X', Z)) = \mathcal{L}(X, Y),$$

$\mathcal{L}(\cdot)$ oznacza rozkład zmiennej losowej.

Twierdzenia Daniella podamy nieco w ogólniejszej formie niż tego wymaga dalszy wykład. Do tej pory mówiliśmy o rodzinach miar zgodnych. W

tym twierdzeniu zakładamy, że rodzina miar jest **kolejno zgodna**. Niech dla każdego n , A_n będzie przestrzenią Borela z zaś μ_n oznacza miarę probabilistyczną na przestrzeni produktowej $\prod_{j=1}^n A_j$. Rodzina miar jest kolejno zgodna jeśli dla

$$\mu_{n+1}(D \times A_{n+1}) = \mu_n(D).$$

Zauważmy, że taka rodzina wyznacza rodzinę miar zgodnych. Wystarczy uzupełnić, tę rodzinę o wszystkie miary brzegowe.

Twierdzenie Daniella 2.6 *Niech dla każdego n , A_n będzie przestrzenią Borela, zaś μ_n oznacza miarę probabilistyczną na przestrzeni $\prod_{j=1}^n A_j$. Jeśli rodzina miar μ_n tworzy rodzinę kolejno zgodną, to istnieją zmienne losowe $X_n : \Omega \rightarrow A_n$ takie, że $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) = \mu_n$ dla każdego n oraz istnieje miara probabilistyczna μ na $\prod_{j=1}^{\infty} A_j$ taka, że jeśli π_n oznacza (projekcję) operator obcięcia*

$$\pi_n : \prod_{j=1}^{\infty} A_j \rightarrow \prod_{j=1}^n A_j,$$

to $\mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}$.

DOWÓD. Można zauważyć [Kallenberg] (dowód uzupełnimy później), że istnieje Ω , dla której można wybrać ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, X_4, \dots$ taki, że X_j ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$ zaś $\mathcal{L}(X) = \mu_1$ oraz dla każdego n istnieje ciąg (zależny od n) ξ_1^n, \dots, ξ_n^n taki, że

$$(2.1) \quad \mathcal{L}(\xi_1^n, \dots, \xi_n^n) = \mu_n.$$

Ciąg zmiennych X_1, X_2, \dots konstruujemy indukcyjnie. Załóżmy, że potrafimy skonstruować ciąg X_1, X_2, \dots, X_n taki, że

$$\mathcal{L}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \mu_n.$$

Jak skonstruować X_{n+1} . Korzystając z warunku (2.1) wybieramy $\xi_1^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1}$ tak aby

$$\mathcal{L}(\xi_1^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1}) = \mu_{n+1}.$$

Ponieważ rodzina jest kolejno zgodna

$$\mathcal{L}(\xi_1^{n+1}, \dots, \xi_n^{n+1}) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) = \mu_n.$$

Korzystając z Lematu 2.5 zastosowanego dla

$$X = \xi_1^{n+1}, \dots, \xi_n^{n+1}, \quad X' = X_1, \dots, X_n$$

otrzymujemy, że istnieje $X_{n+1} = f(X', Z_{n+1})$ taki, że

$$\mathcal{L}(\xi_1^{n+1}, \dots, \xi_{n+1}^{n+1}) = \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, X_{n+1}),$$

co kończy dowód.

•

Następne twierdzenie uogólnia wynik Daniella na (Ξ^T, \mathcal{X}^T) . Oczywiście trudność pojawia się tylko gdy T jest zbiorem nieprzeliczalnym.

Twierdzenie Kołmogorowa 2.7 *Niech (Ξ, \mathcal{X}) będzie przestrzenią Borela. Załóżmy, że dana jest rodzina miar zgodna μ_J , J skończony, $J \subset T$ na (Ξ^J, \mathcal{X}^J) . Wówczas istnieje funkcja losowa X o rozkładzie μ na (Ξ^T, \mathcal{X}^T) takim, że $\mu_J = \mu \circ (\pi_J^T)^{-1}$.*

DOWÓD. Zauważmy, że korzystając z definicji σ ciała $\mathcal{X}^S(\Xi^T)$ (zadanie 1.13) i twierdzenia 2.6 dla dowolnego zbioru przeliczalnego $S \subset T$ możemy zdefiniować miarę μ_S na $\mathcal{X}^S(\Xi^T)$ taką, że miary μ_J dla $J \subset S$ są miarami brzegowymi $\mu_J = \mu_S \circ (\pi_J^S)^{-1}$.

Z twierdzenia 1.14 wynika, że rodzina miar μ_S , gdzie S jest skończony lub przeliczalny spełnia warunek zgodności (1.2). Pamiętając, że (zad. 1.13) $\mathcal{X}^T = \bigcup_{S \subset T} \mathcal{X}^S(\Xi^T)$ możemy zdefiniować funkcję na $A \in \mathcal{X}^T$ wzorem

$$\mu(A) = \mu_S(A),$$

gdzie $A \in \mathcal{X}^S(\Xi^T)$. Ponieważ rodzina spełnia warunek zgodności (1.2) definicja nie zależy od wyboru S . Oczywiście μ jest miarą gdyż w definicji miary wszystkie operacje są przeliczalne. Poszukiwany w twierdzeniu proces X_t możemy zdefiniować $X_t = \pi_t$, gdzie $(\Xi^T, \mathcal{X}^T, \mu)$ jest przestrzenią probabilistyczną.

Inny dowód (A.D. Wenzel). Istnienie miary μ wynika, również bezpośrednio z twierdzenia Carathéodory'ego 2.2 w którym za ciało zbiorów bierzemy zbiory cylindryczne w następujący sposób. Niech A będzie zbiorem cylindrycznym, wówczas istnieje zbiór skończony K taki, że $A \in \mathcal{X}^K(\Xi^T)$. Addytywną funkcję zbiorów definiujemy przez

$$F(A) = \mu_K(A).$$

Definicja nie zależy od wyboru zbioru K , bo te miary tworzą rodzinę zgodną. W dowodzie, że F jest przeliczalnie addytywny w ciele wykorzystuje się założenie, że zbiory są przestrzeniami Borela.

•

Zadanie 2.8 Pokazać, że zdefiniowana w dowodzie twierdzenia Kołmogorowa funkcja zbiorów jest miarą.

Wystarczy sprawdzić, że zdefiniowana miara w dowodzie twierdzenia jest przeliczalnie addytywna. Niech $A_j \in \mathcal{X}^T$ są rozłączne. Z zadania 1.13 istnieją zbiory przeliczalne $S_j \subset T$ takie, że $A_j \in \mathcal{X}^{S_j}(\Xi^T)$. Ponieważ $S = \bigcup_j S_j$ jest zbiorem przeliczalnym zatem

$$A_j, \bigcup_j A_j \in \mathcal{X}^S(\Xi^T).$$

Stąd

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \mu_S\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu_S(A_j) = \sum_j \mu(A).$$

•

3 Miary skoncentrowane na $C(T)$

w tym rozdziale skonstruujemy miarę Wienera. Rozpocznijemy od nierówności Garsia, Rademich i Rumsey [1970].

Theorem 3.1 *Niech p i Ψ będą funkcjami ciągłymi, ściśle rosnącymi określonymi na $[0, \infty)$ i takimi, że $p(0) = \Psi(0) = 0$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t) = \infty$. Niech $\phi \in C(T)$. Wówczas jeśli*

$$(3.1) \quad \int_0^1 \int_0^1 \Psi \left(\frac{|\phi(t) - \phi(s)|}{p(|t-s|)} \right) ds dt \leq B,$$

to

$$(3.2) \quad |\phi(t) - \phi(s)| \leq 8 \int_0^{|t-s|} \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) p(du).$$

DOWÓD. Definiujemy funkcję:

$$I(t) = \int_0^1 \Psi \left(\frac{|\phi(t) - \phi(s)|}{p(|t-s|)} \right) ds.$$

W dalszej części pokażemy, że z założenia

$$\int_0^1 I(t) dt \leq B$$

wynika istnienie $t_0 \in (0, 1)$ takiego, że

$$I(t_0) \leq 2B \quad I(1-t_0) \leq 2B.$$

Wyberzemy ciąg nierosnący $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset [0, t_0]$. Mając t_{n-1} , $n \geq 1$ definiujemy d_{n-1} ($d_{-1} = 1$) tak aby

$$p(d_{n-1}) = \frac{1}{2} p(t_{n-1}).$$

Wówczas wybieramy $t_n \in (0, d_{n-1})$ tak aby

$$(3.3) \quad I(t_n) \leq 2B/d_{n-1}$$

oraz

$$(3.4) \quad \Psi \left(\frac{|\phi(t_n) - \phi(t_{n-1})|}{p(|t_n - t_{n-1}|)} \right) \leq 2I(t_{n-1})/d_{n-1}.$$

Aby uzasadnić ten wybór zauważmy, że jeśli

$$A := \{t \in (0, d_{n-1}) : I(t) > 2B/d_{n-1}\},$$

to

$$B \geq \int_0^{d_{n-1}} I(t) dt \geq \int_A I(t) dt > \frac{2B}{d_{n-1}} |A|.$$

Stąd miara $|A| < d_{n-1}/2$. Z drugiej strony dla zbioru

$$D := \{t \in (0, d_{n-1}) : \Psi \left(\frac{|\phi(t) - \phi(t_{n-1})|}{p(|t - t_{n-1}|)} \right) > 2I(t_{n-1})/d_{n-1}\},$$

mamy

$$\begin{aligned} I(t_{n-1}) &= \int_0^1 \Psi \left(\frac{|\phi(t_{n-1}) - \phi(s)|}{p(|t_{n-1} - s|)} \right) ds \geq \\ &\int_D \Psi \left(\frac{|\phi(t_{n-1}) - \phi(s)|}{p(|t_{n-1} - s|)} \right) ds > 2|D|I(t_{n-1})/d_{n-1}. \end{aligned}$$

Zatem również $|D| < d_{n-1}/2$ co dowodzi istnienia punktu t_n spełniającego (3.3) i (3.4). Zdefiniowaliśmy ciąg

$$t_n < d_{n-1} < t_{n-1}.$$

Co więcej

$$2p(d_{n+1}) = p(t_{n+1}) < p(d_n) = p(t_n)/2.$$

Zatem

$$p(t_{n+k}) < p(t_n)/2^k.$$

Stąd dla $n \rightarrow \infty$, $p(t_n) \rightarrow 0$ zatem $t_n \rightarrow 0$. Ponadto

$$\begin{aligned} p(t_n - t_{n+1}) &\leq p(t_n) = 2p(d_n) = 4(p(d_n) - \frac{1}{2}p(d_n)) \leq \\ &\leq 4(p(d_n) - p(d_{n+1})). \end{aligned}$$

Stąd oraz z (3.3) i (3.4) wynika, że

$$\begin{aligned} |\phi(t_n) - \phi(t_{n+1})| &\leq \Psi^{-1}(2I(t_n)/d_n)p(t_n - t_{n+1}) \\ &\leq \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{d_{n-1}d_n} \right) 4(p(d_n) - p(d_{n+1})) \leq 4\Psi^{-1} \left(\frac{4B}{d_n^2} \right) (p(d_n) - p(d_{n+1})) \\ &\leq 4 \int_{d_{n+1}}^{d_n} \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) p(du). \end{aligned}$$

Sumując po n otrzymamy

$$(3.5) \quad |\phi(t_0) - \phi(0)| \leq 4 \int_0^1 \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) p(du).$$

Biorąc za funkcję ϕ funkcję $\phi(1-t)$ i powtarzając rozumowanie

$$(3.6) \quad |\phi(1) - \phi(1-t_0)| \leq 4 \int_0^1 \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) p(du).$$

Jeszcze wypada zobaczyć, że dla zbioru

$$C := \{t \in (0, 1) : I(t) > 2B\}$$

otrzymamy

$$B \geq \int_0^1 I(t) dt \geq \int_C I(t) dt > 2B|C|,$$

czyli $|C| < 1/2$. Zatem można wybrać punkt t_0 taki, że jednocześnie

$$I(t_0) \leq 2B \quad I(1-t_0) \leq 2B.$$

Stąd z (3.5) i (3.6) wynika, że

$$(3.7) \quad |\phi(1) - \phi(0)| \leq 8 \int_0^1 \Psi^{-1} \left(\frac{4B}{u^2} \right) p(du).$$

W szczególności jeśli $0 \leq s < t \leq 1$ definiujemy nowe funkcje

$$\tilde{\phi}(u) = \phi(s + (t-s)u), \quad u \in [0, 1]$$

oraz

$$\tilde{p}(u) = p((t-s)u), \quad u \in [0, 1].$$

Jak łatwo sprawdzić dla nowych funkcji zachodzi warunek (3.1) z nową stałą $B/(t-s)^2$. Stosując wzór (3.7) do nowych funkcji i nowej stałej a następnie stosując zamianę zmiennych otrzymuje teżę twierdzenia.

•

Zauważmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego odcinka $[0, a]$, $a > 0$.

Wniosek 3.2 *Niech (E, \mathcal{E}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. I niech proces*

$$X : [0, \infty) \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

jest o ciągłych trajektoriach. Jeśli dla dowolnego $a > 0$ istnieją parametry $\alpha = \alpha_a > 0$, $r = r_a > 0$ oraz $C = C_a < \infty$ takie, że

$$(3.8) \quad E|X_t - X_s|^r \leq C|t-s|^{1+\alpha}, \quad 0 \leq t, s \leq a,$$

wówczas dla dowolnego $\gamma = \gamma_a \in (2, 2 + \alpha)$ oraz $\lambda > 0$

$$(3.9) \quad P \left(\sup_{0 \leq s < t \leq a} \frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^\beta} \geq \frac{8\gamma}{\gamma - 2} (4\lambda)^{1/r} \right) \leq CA/\lambda,$$

gdzie $\beta = \beta_a = (\gamma - 2)/r$ zaś

$$A = A_a = \int_0^a \int_0^a |t - s|^{1+\alpha-\gamma} ds dt.$$

DOWÓD. Z ciągłości trajektorii wynika, że proces jest progresywnie mierzalny (zob. twierdzenie 6.4), czyli dla każdego $a > 0$ obcięcie procesu do $[0, a]$ jest $\mathcal{B}_{[0,a]} \otimes \mathcal{E}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ mierzalne. Z warunku (3.8) oraz definicji stałej A wynika, że

$$\begin{aligned} E \left[\int_0^a \int_0^a \left(\frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^{\gamma/r}} \right)^r ds dt \right] &\leq \\ \int_0^a \int_0^a E \left(\frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^{(1+\alpha)/r}} \right)^r \frac{1}{|t - s|^{(\gamma-1-\alpha)}} ds dt &\leq AC. \end{aligned}$$

Z nierówności Czebyszewa

$$P \left(\int_0^a \int_0^a \left(\frac{|X_t - X_s|}{|t - s|^{\gamma/r}} \right)^r ds dt \geq \lambda \right) \leq CA/\lambda.$$

Wówczas na dopełnieniu powyższego zbioru i z twierdzenia 3.1

$$\begin{aligned} |X_t - X_s| &\leq 8 \int_0^{|t-s|} \left(\frac{4\lambda}{u^2} \right)^{1/r} du^{\gamma/r} = 8(4\lambda)^{1/r} \int_0^{|t-s|} u^{-2/r} (\gamma/r) u^{\gamma/r-1} du \\ &= 8(4\lambda)^{1/r} |t - s|^{(\gamma-2)/r} (\gamma/r) (1r/(\gamma - 2)). \end{aligned}$$

co kończy dowód.

•

Powrócimy teraz do zagadnienia, które rozpatrywaliśmy w rozdziale 1. Mianowicie sformułowaliśmy warunek przy którym miarę probabilistyczną μ na \mathbb{R}^T można zawęzić do $C(T)$, lemat 1.18 i 1.19. Okazuje się, że taką sytuację mamy dla miar, które pochodzą od procesów spełniających warunek (3.8). Sformułowujemy to twierdzenie na odcinku $T = [0, 1]$ choć jest ono prawdziwe również na półprostej $[0, \infty)$.

Twierdzenie 3.3 *Niech dana będzie miara μ na \mathbb{R}^T , $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^T$ taka, że istnieją stałe $\alpha > 0$, $r > 1 + \alpha$ i $C > 0$, że dla*

$$(3.10) \quad E|\pi_t - \pi_s|^r = \int |\psi(t) - \psi(s)|^r \mu(d\psi) \leq C|t - s|^{1+\alpha}, \quad 0 \leq s < t \leq 1.$$

Wówczas $\mu^*(C(T)) = 1$.

DOWÓD. Z lematu 1.19 wynika, że wystarczy pokazać, że dla każdego zbioru przeliczalnego S

$$\mu^*(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi|_S \text{ jest jednostajnie ciągły}\}) = 1.$$

W tym celu zobaczymy, że jeśli zbiór τ jest skończony, to zbiór (stałe dobieramy jak we wniosku 3.2)

$$A_{\tau,\lambda} := \left\{ \psi : \sup_{t,s \in \tau} \frac{|\psi(t) - \psi(s)|}{|t - s|^\beta} \leq \frac{8\gamma}{\gamma - 2} (4\lambda)^{1/r} \right\}$$

jest $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^T$ mierzalny co wynika z mierzalności funkcji π_t , $t \in \tau$. W odpowiedni sposób dobieramy teraz zbiory

$$\tau = \tau_N = \{0 = t_{0,N} < \dots < t_{N,N} = 1\}.$$

tak aby $S \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} \tau_N$ i $\tau_N \subset \tau_{N+1}$. Zauważmy, że

$$\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} A_{\tau_N,\lambda} \subset \{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi|_S \text{ jest jednostajnie ciągły}\}.$$

Stąd

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \mu^*(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi|_S \text{ jest jednostajnie ciągły}\}) \\ \geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_{\tau_N,\lambda}). \end{aligned}$$

Zdefiniujmy łamaną interpolującą ψ^N w punktach zbioru τ_N o wartości dowolnej funkcji ψ , czyli

$$\psi^N(t) = \frac{(t_{i+1,N} - t)\psi(t_{i,N}) - (t - t_{i,N})\psi(t_{i+1,N})}{t_{i+1,N} - t_{i,N}}, \quad t_{i,N} \leq t \leq t_{i+1,N}.$$

Niech $s < t$ dowolne. Wówczas $t_{i,N} \leq t \leq t_{i+1,N}$ oraz $t_{j,N} \leq s \leq t_{j+1,N}$. Wtedy korzystając z założenia (3.10) możemy wykonać następujące szacowanie

$$\int |\psi^N(t) - \psi^N(s)|^r \mu(d\psi) \leq 3^{r-1} C |t - s|^{1+\alpha}.$$

Rzeczywiście korzystając w z nierówności Jensena; dla $a, b, c > 0$ mamy

$$(a + b + c)^r \leq 3^{r-1}(a^r + b^r + c^r),$$

gdyż $r > 1$ oraz z nierówności $a^r + b^r + c^r \leq (a + b + c)^r$ rozważamy trzy przypadki. Pierwszy $t_{i,N} \leq s < t \leq t_{i+1,N}$. Proste rachunki w tym przypadku pokazują, że

$$\int |\psi^N(t) - \psi^N(s)|^r \mu(d\psi) \leq C|t - s|^{1+\alpha}.$$

Drugi $t_{i,N} \leq s \leq t_{i+1,N} \leq t \leq t_{i+2,N}$ sprowadzamy do poprzedniego gdyż

$$\begin{aligned} \int |\psi^N(t) - \psi^N(s)|^r \mu(d\psi) &\leq 2^{r-1} \int (|\psi^N(t_{i+1,N}) - \psi^N(s)|^r + |\psi^N(t) - \psi^N(t_{i+1,N})|^r) \mu(d\psi) \\ &\leq C2^{r-1} (|t_{i+1,N} - s|^r + |t - t_{i+1,N}|^r) \leq C2^{r-1} |t - s|^r \end{aligned}$$

Trzeci sprowadzamy również do pierwszego. Korzystając z wniosku 3.2 dla ψ^N otrzymujemy

$$\mu(\{\psi : \sup_{t,s \in \tau} \frac{|\psi(t) - \psi(s)|}{|t - s|^\beta} \geq \frac{8\gamma}{\gamma - 2} (4\lambda)^{1/r}\}) \leq 3^{r-1} CA/\lambda.$$

Wykorzystując teraz (3.11) wnioskujemy, że $\mu^*(C(T)) = 1$.

•

Twierdzenie Kołmogorowa 3.4 *Załóżmy, że dana jest rodzina zgodna μ_K , $K \subset T = [0, 1]$. Jeśli istnieją $\alpha > 0$, $r \geq 1 + \alpha$, $C > 0$ takie, że dla dowolnego $S = \{s, t\}$, $s < t$*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y - x|^r \mu_S(dx \times dy) \leq C|t - s|^{1+\alpha},$$

to istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna na $(C(T), \mathcal{B}_{C(T)})$.

DOWÓD. Wystarczy zauważyć, że dla $s < t$ i $S = \{s, t\}$ mamy

$$\int_{C(T)} |\pi_t(\psi) - \pi_s(\psi)|^r \mu(d\psi) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y - x|^r \mu_S(dx \times dy).$$

Następnie trzeba wykorzystać zadanie 1.21, Lemat 1.19 i 1.20 twierdzenie o istnieniu miary oraz wszystkie twierdzenia z tego rozdziału.

4 Nierówności Dooba dla podmartyngałów

Zanim przejdziemy do definicji i własności martyngałów potrzebować będziemy następujących twierdzeń.

Twierdzenie 4.1 *Niech (E, \mathcal{E}, ν) przestrzeń mierzalna. Wówczas dla $p > 0$ i każdej funkcji nieujemnej $f \in L^p(\nu)$*

$$(4.1) \quad \int_E f^p(x) \nu(dx) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu(x : f(x) \geq \lambda) d\lambda.$$

DOWÓD. Wzór otrzymujemy stosując twierdzenie Fubiniego:

$$\begin{aligned} \int_E f^p(x) \nu(dx) &= \int_E (p \int_0^{f(x)} \lambda^{p-1} d\lambda) \nu(dx) \\ &= p \int_E \int_0^\infty \lambda^{p-1} I_{\{\lambda \leq f(x)\}} d\lambda \nu(dx) = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \nu(x : f(x) \geq \lambda) d\lambda \end{aligned}$$

co kończy dowód.

•

Twierdzenie 4.2 *Niech X, Y nieujemne zmienne losowe określone na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) i takie, że $EY < \infty$ oraz dla każdego $\lambda > 0$*

$$(4.2) \quad P(X \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{X \geq \lambda} Y dP.$$

Jeśli ponadto dla pewnego $r > 1$ $Y \in L^r(P)$, to $X \in L^r(P)$ oraz

$$(4.3) \quad (EX^r)^{1/r} \leq \frac{r}{r-1} (EY^r)^{1/r}.$$

DOWÓD. Z wzoru (4.1) oraz (4.2)

$$\begin{aligned} EX^r &= r \int_0^\infty \lambda^{r-1} P(X \geq \lambda) d\lambda \\ &\leq r \int_0^\infty \lambda^{r-1} \frac{1}{\lambda} \int_{X \geq \lambda} Y dP d\lambda. \end{aligned}$$

Oznaczmy przez P' nową miarę $dP' = Y dP$ (niekoniecznie probabilistyczną). Wówczas ostatni wzór możemy zapisać w postaci

$$EX^r \leq r \int_0^\infty \lambda^{r-2} P'(X \geq \lambda) d\lambda.$$

Korzystając znowu z (4.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned} EX^r &\leq r \int_0^\infty \lambda^{r-2} P'(X \geq \lambda) d\lambda = \frac{r}{r-1} \int_\Omega X^{r-1} dP' \\ &= \frac{r}{r-1} \int_\Omega X^{r-1} Y dP. \end{aligned}$$

Korzystając z nierówności Höldera dla $p = r/(r-1)$ i $p' = r$ otrzymujemy

$$EX^r \leq \frac{r}{r-1} (EY^r)^{1/r} (EX^r)^{(r-1)/r}.$$

Dzieląc stronami

$$(EX^r)^{1/r} \leq \frac{r}{r-1} (EY^r)^{1/r}.$$

•

Definicja 4.3 Niech $T = [0, 1]$ lub $T = [0, \infty)$. Niech (Ω, \mathcal{F}, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. **Filtracją** nazywamy rodzinę σ -ciał \mathcal{F}_t , $t \in T$ takich, że dla każdego $t \in T$ $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Ponadto dla $s < t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Będziemy również zakładać, że \mathcal{F}_0 zawiera wszystkie zbiory miary zero tzn. miara P jest zupełna. Proces stochastyczny X_t jest **adaptowany** jeśli dla każdego $t \in T$, $X_t \in \mathcal{F}_t$.

Definicja 4.4 Proces stochastyczny X_t , $t \in T$ adaptowany do filtracji \mathcal{F}_t nazywamy **martyngałem** (podmartyngałem) {nadmartyngałem} jeśli dla każdego $t \in T$, $E|X_t| < \infty$ oraz dla każdego $s < t$

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = (\geq) \{ \leq \} X_s$$

P prawie wszędzie.

Przypominamy, że istnienie warunkowej wartości oczekiwanej $E[X_t | \mathcal{F}_s]$ wynika z twierdzenia Radona-Nikodyma i oznacza że jeśli istnieje $f \in \mathcal{F}_s$ i dla każdego zbioru $A \in \mathcal{F}_s$

$$\int_A X_t dP = \int_A f dP,$$

to $E[X_t | \mathcal{F}_s] = f$ P prawie wszędzie. Rozpocznijmy od pokazania nierówności Dooba dla podmartyngałów.

Twierdzenie 4.5 Jeśli proces X_t jest podmartyngałem o prawostronnie ciągłych trajektoriami, to dla dowolnych $\lambda > 0$ i $s > 0$

$$(4.4) \quad P(\{ \sup_{0 \leq t \leq s} X_t \geq \lambda \}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{ \sup_{0 \leq t \leq s} X_t \geq \lambda \}} X_s dP.$$

W szczególności jeśli X_t jest nieujemny, to

$$(4.5) \quad P(\{\sup_{0 \leq t \leq s} X_t \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} EX_s.$$

oraz dla $r > 1$

$$(4.6) \quad \left(E(\sup_{0 \leq t \leq s} X_t)^r \right)^{1/r} \leq \frac{r}{r-1} (EX_s^r)^{1/r}.$$

Nierówność oznacza, że jeśli prawa strona jest nieskończona to również nieskończona jest lewa strona

DOWÓD (4.5) wynika natychmiast z (4.4) zaś (4.6) wynika bezpośrednio z (4.4) i twierdzenia 4.2 przyjmując $X = \sup_{0 \leq t \leq s} X_t$ zaś $Y = X_s$. Ponieważ trajektorie są prawostronnie ciągłe, to aby udowodnić (4.4) wystarczy pokazać, że dla dowolnego n oraz $S_n = \{0 = t_0 < \dots < t_n = s\}$:

$$(4.7) \quad P(\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\}} X_s dP.$$

Najpierw pokażemy, że z (4.7) wynika (4.4). W tym celu zauważmy, że jeśli $s \in S$, gdzie S jest przeliczalny i gęsty w $[0, s]$, to ponieważ trajektorie są prawostronnie ciągłe, to

$$\{\sup_{t \in S} X_t \geq \lambda\} = \{\sup_{0 \leq t \leq s} X_t \geq \lambda\}.$$

Teraz wystarczy zauważyć, że przy odpowiednim wyborze S_n oraz $n \rightarrow \infty$

$$\{\sup_{t \in S_n} X_t \geq \lambda\} \nearrow \{\sup_{t \in S} X_t \geq \lambda\}$$

co pamiętając o ciągłości miary prowadzi do pełnego uzasadnienia implikacji z (4.7) do (4.4). Wrócimy teraz do dowodu (4.7). Definiujemy ciąg zbiorów: $A_0 = \{X_{t_0} \geq \lambda\}$ oraz dla $1 \leq k \leq n$

$$A_k = \{X_{t_k} \geq \lambda \wedge \max_{0 \leq i \leq k-1} X_{t_i} < \lambda\}.$$

Oczywiście $A_i \cap A_j = \emptyset$, dla $i \neq j$;

$$\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\} = \bigcup_{k=1}^n A_k$$

oraz $A_k \in \mathcal{F}_{t_k}$ dla $k = 0, \dots, n$. Wówczas z nierówności Czebyszewa

$$P(\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\}) = \sum_{k=0}^n P(A_k) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^n \int_{A_k} X_{t_k} dP.$$

Ponieważ X_t jest podmartyngałem z definicji wynika, że $X_{t_k} \leq E[X_s | \mathcal{F}_{t_k}]$ zatem

$$\int_{A_k} X_{t_k} dP \leq \int_{A_k} E[X_s | \mathcal{F}_{t_k}] dP = \int_{A_k} X_s dP.$$

Stąd

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^n \int_{A_k} X_{t_k} dP \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^n \int_{A_k} X_s dP \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\{\sup_{0 \leq k \leq n} X_{t_k} \geq \lambda\}} X_s dP.$$

Co kończy dowód.

•

5 Procesy Markowa i miara Wienera

Kilka uwag jest na miejscu. W poprzednich rozdziałach przyjmowaliśmy najczęściej, że $T = [0, 1]$. Okazuje się, że możemy udowodnić analogiczne twierdzenia przyjmując za $T = [0, \infty)$. Zatem będziemy powoływać się na poprzednie twierdzenia przyjmując, że $T = [0, 1]$ albo $T = [0, \infty)$.

W poniższej definicji funkcji prawdopodobieństw przejść s, t interpretujemy jako czas. Zatem zbiór T może oznaczać również zbiór liczb całkowitych lub naturalnych. Funkcje prawdopodobieństw przejść to rodziny miar $\mu^{s,t}(x, \Gamma)$. Interpretacja tej funkcji jest następująca znając pozycje punktu $x \in S$ w chwili s , $\mu^{s,t}(x, \Gamma)$ jest prawdopodobieństwem, że w chwili t znajdzie się punkt x w zbiorze $\Gamma \subset S$. S oznacza zbiór stanów. Ponieważ głównie interesują nas ewolucje na prostej od razu przyjęliśmy $S = \mathbb{R}$.

Definicja 5.1 *Funkcja prawdopodobieństwa przejść oznaczona przez $\mu^{s,t}(x, \Gamma)$ lub $P(s, x, t, \Gamma)$ jest określona dla $s, t \in T$ $s < t$, $x \in \mathbb{R}$ zaś zbiór $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i spełnia następujące warunki*

1. dla ustalonych s, t, x funkcja zbiorów $\mu^{s,t}(x, \cdot)$ jest miarą probabilistyczną określoną na $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
2. dla ustalonych s, t, Γ funkcja $\mu^{s,t}(\cdot, \Gamma)$ jest $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}/\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ mierzalna
3. (równania Chapmana-Kołmogorowa-Smoluchowskiego) jeśli $0 \leq s < t < u$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, to

$$(5.1) \quad \mu^{s,u}(x, \Gamma) = \int_{\mathbb{R}} \mu^{t,u}(y, \Gamma) \mu^{s,t}(x, dy).$$

Dla $s = t$ przyjmuje się, że

$$\mu^{s,s}(x, \cdot) = \delta_x(\cdot).$$

Zauważmy, że założenie 2 jest potrzebne przy definicji (5.1) gdyż wówczas całka jest poprawnie określona.

Zauważmy, że rodzina miar $\mu^{s,t}(x, \cdot)$ generuje nam równoważną rodzinę operatorów:

$$P^{s,t}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \mu^{s,t}(x, dy).$$

Oczywiście operatory są liniowe i dobrze określone dla funkcji ograniczonych B . Jeśli w tej przestrzeni wprowadzimy normę supremum

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

to operatory te są kontrakcjami, czyli

$$\|P^{s,t}(f)\| \leq \|f\|.$$

Ponadto $P^{s,t}(1) = 1$, $P^{s,s} = I$ oraz z warunku (5.1) otrzymujemy warunek składania operatorów

$$P^{s,u} = P^{s,t}P^{t,u}.$$

Pokażemy teraz sens probabilistyczny rodziny $\mu^{s,t}(x, \cdot)$. W przestrzeni mierzalnej $(\mathbb{R}^T, (\mathcal{B}_R)^T)$ wprowadzamy filtrację. Przez \mathcal{B}_t oznaczamy będziemy σ -ciało w \mathbb{R}^T generowane przez jednowymiarowe zbiory cylindryczne $\pi_s^{-1}(A)$ dla $0 \leq s \leq t$ co można zapisać jako $\mathcal{B}_t = \sigma[\pi_u : 0 \leq u \leq t]$. Zauważmy, że jeśli $s < t$, to $\mathcal{B}_s \subset \mathcal{B}_t$ oraz $\mathcal{B}_t \subset (\mathcal{B}_R)^T$ zatem tworzą filtrację.

Zauważmy, że ta filtracja generuje filtrację dla $U = C(T)$, gdzie $\mathcal{B}_{U,t} = \mathcal{B}_t \cap U$.

Niech (Ω, \mathcal{F}, P) . Prawdopodobieństwo warunkowe definiujemy wzorem $P[A|\mathcal{G}] = E[I_A|\mathcal{G}]$, gdzie $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ to ustalone σ -ciało. Funkcja I_A jest funkcją charakterystyczną zbioru A . W dalszym ciągu będziemy używać oznaczeń z rozdziału 1 (por. wzór (1.1)). I tak miary brzegowe odpowiadające mierze μ będziemy oznaczać przez μ_J lub μ_{t_1, \dots, t_n} , gdzie $J = \{t_1 < \dots, t_n\}$.

Definicja 5.2 Niech $\mu^{s,t}(x, \Gamma) = P(s, x, t, \Gamma)$ będzie funkcją prawdopodobieństwa przejść i ν niech będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Miara probabilistyczna μ na $(\mathbb{R}^T, (\mathcal{B}_\mathbb{R})^T)$ jest nazywana procesem Markowa z funkcją przejść $\mu^{s,t}(x, \Gamma)$ i rozkładem początkowym ν jeśli

$$(5.2) \quad \mu(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi(0) \in \Gamma\}) = \mu_0(\Gamma) = \nu(\Gamma)$$

oraz dla wszystkich $0 \leq s < t$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

$$(5.3) \quad \mu[\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi(t) \in \Gamma\} | \mathcal{B}_s](\phi) = \mu^{s,t}(\phi(s), \Gamma),$$

gdzie $\phi \in \mathbb{R}^T$ i równość zachodzi w \mathbb{R}^T μ prawie wszędzie.

W świetle definicji 5.2 rodzina miar $\mu^{s,t}$ określa prawdopodobieństwa warunkowe (wzór 5.3).

Aby uzyskać wiedzę o samym rozkładzie μ zauważmy, że ponieważ

$$EP[A|\mathcal{G}] = P(A),$$

to dla $s < t$ (μ_s oznacza miarę brzegową (1.1) zaś $(\mathbb{R}^T, (\mathcal{B}_R)^T, \mu)$ przestrzeń probabilistyczną)

$$(5.4) \quad \mu(\{\psi(t) \in \Gamma\}) = \int_{\mathbb{R}^T} P(s, \psi(s), t, \Gamma) d\mu(\psi)$$

$$(5.5) \quad = \int_{\mathbb{R}^T} P(s, \pi_s(\psi), t, \Gamma) d\mu(\psi) = \int_{\mathbb{R}} P(s, x, t, \Gamma) \mu_s(dx).$$

Ponieważ s jest dowolne niech $s = 0$. Wówczas

$$\mu(\{\psi(t) \in \Gamma\}) = \int_{\mathbb{R}} P(0, x, t, \Gamma) \mu_0(dx) = \int_{\mathbb{R}} P(0, x, t, \Gamma) d\nu(x).$$

Pełny związek określa twierdzenie 5.3.

Twierdzenie 5.3 *Niech $P(s, x, t, \Gamma)$ będzie funkcją prawdopodobieństwa przejść i ν niech będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Definiujemy rodzinę miar na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^n)$*

$$(5.6) \quad P_0(\Gamma) = \nu(\Gamma), \quad \Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$(5.7) \quad P_t(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}} P(0, x, t, \Gamma) P_0(dx)$$

i dla $J = \{0 \leq t_1 < \dots < t_{n+1}\}$

$$(5.8) \quad P_{t_1, \dots, t_{n+1}}(\Delta) = \int_{\Delta} P(t_n, y_n, t_{n+1}, dy_{n+1}) P_{t_1, \dots, t_n}(dy_1 \times \dots \times dy_n),$$

gdzie $\Delta \in (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^{n+1}$. Wówczas rodzina miar probabilistycznych $P_J = P_{t_1, \dots, t_{n+1}}$ jest zgodna. Ponadto miara μ określona na $(\mathbb{R}^T, (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^T)$ przez tą rodzinę jest procesem Markowa z funkcją prawdopodobieństwa przejść $P(s, x, t, \Gamma)$ oraz rozkładem początkowym ν wtedy i tylko wtedy gdy rozkłady skończenie wymiarowe μ_J , $J \subset T$ miary μ określonej na $(\mathbb{R}^T, (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^T)$ są równe P_J .

Uwagi. Wzór (5.8) najlepiej rozpisać dla zbiorów produktowych tzn. $\Delta = \Delta_n \times \Gamma$, $\Delta_n \in (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^n$ zaś $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Wówczas

$$(5.9) \quad P_{t_1, \dots, t_{n+1}}(\Delta) = \int_{\Delta_n} P(t_n, y_n, t_{n+1}, \Gamma) P_{t_1, \dots, t_n}(dy_1 \times \dots \times dy_n).$$

Zauważmy, że jeśli $\Gamma = \mathbb{R}$, to ponieważ $P(t_n, y_n, t_{n+1}, \mathbb{R}) = 1$ zatem

$$(5.10) \quad P_{t_1, \dots, t_{n+1}}(\Delta) = P_{t_1, \dots, t_n}(\Delta_n).$$

Z powyższych rozważań oraz własności funkcji prawdopodobieństwa przejść (5.1) wynika, że dla $s < t$

$$(5.11) \quad P_t(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}} P(s, x, t, \Gamma) P_s(dx).$$

DOWÓD. Dowód zgodności ograniczymy do rodziny dwuelementowej $S = \{t_1 < t_2\}$. Z (5.10) widzimy, jeśli $\Delta = \Gamma_1 \times \mathbb{R}$, to

$$P_{t_1, t_2}(\Gamma_1 \times \mathbb{R}) = P_{t_1}(\Gamma_1).$$

Pozostało wykazanie, że

$$P_{t_1, t_2}(\mathbb{R} \times \Gamma_2) = P_{t_2}(\Gamma_2).$$

Zobaczmy, że z (5.7) i (5.9) wynika, że

$$\begin{aligned} P_{t_1, t_2}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) &= \int_{\Gamma_1} P(t_1, y_1, t_2, \Gamma_2) P_{t_1}(dy_1) \\ &= \int_{\Gamma_1} P(t_1, y_1, t_2, \Gamma_2) \int_{\mathbb{R}} P(0, x, t_1, dy_1) \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Gamma_1} P(t_1, y_1, t_2, \Gamma_2) P(0, x, t_1, dy_1) \right) \nu(dx). \end{aligned}$$

Jeśli teraz $\Gamma_1 = \mathbb{R}$, to

$$P_{t_1, t_2}(\mathbb{R} \times \Gamma_2) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} P(t_1, y_1, t_2, \Gamma_2) P(0, x, t_1, dy_1) \right) \nu(dx),$$

Zatem z (5.1) otrzymujemy

$$P_{t_1, t_2}(\mathbb{R} \times \Gamma_2) = \int_{\mathbb{R}} P(0, x, t_2, \Gamma_2) \nu(dx) = P_{t_2}(\Gamma_2).$$

Analogicznie postępujemy dla dowolnego skończonego ciągu S .

Przejdziemy teraz do dowodu równoważności. \Leftarrow Zakładamy, że

$$\mu_J = P_J.$$

Z definicji miary

$$\mu(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \pi_0(\psi) \in \Gamma\}) = \mu_0(\Gamma) = P_0(\Gamma) = \nu(\Gamma),$$

zatem zachodzi (5.2). By udowodnić (5.3) rozważymy dwa przypadki. Pierwszy $s = 0$. Z definicji miar brzegowych dla miary μ

$$\mu(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \pi_0(\psi) \in \Delta, \pi_t(\psi) \in \Gamma\}) = \mu_{0,t}(\Delta \times \Gamma) = P_{0,t}(\Delta \times \Gamma).$$

Dalej z definicji (5.8) [(5.9)]

$$\begin{aligned} P_{0,t}(\Delta \times \Gamma) &= \int_{\Delta} P(0, y, t, \Gamma) P_0(dy). \\ &= \int_{\Delta} P(0, y, t, \Gamma) \mu_0(dy) \\ (5.12) \quad &= \int_{\{\pi_0(\psi) \in \Delta\}} P(0, \pi_0(\psi), t, \Gamma) \mu(d\psi). \end{aligned}$$

Z drugiej strony z definicji warunkowej wartości oczekiwanej

$$\mu(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi(t) \in \Gamma\} | \mathcal{B}_0) = E^\mu[I_{\{\psi(t) \in \Gamma\}} | \mathcal{B}_0]$$

dla każdego $B = \{\psi \in \mathbb{R}^T : \pi_0(\psi) \in \Delta\} \in \mathcal{B}_0$, czyli dla dowolnego $\Delta \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$

$$\int_B I_{\{\psi(t) \in \Gamma\}} \mu(d\psi) = \int_B E^\mu[I_{\{\psi(t) \in \Gamma\}} | \mathcal{B}_0] \mu(d\psi).$$

Lewa strona tej równości jest równa

$$\int_B I_{\psi(t) \in \Gamma} \mu(d\psi) = \mu(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \pi_0(\psi) \in \Delta, \pi_t(\psi) \in \Gamma\}).$$

Wystarczy to równanie porównać z (5.12) oraz zauważyć, że funkcja $P(0, \pi_0(\cdot), t, \Gamma)$ jest $\mathcal{B}_0/\mathcal{B}_\mathbb{R}$ mierzalna. Stąd otrzymujemy, że dla $\phi \in \mathbb{R}^T$ μ prawie wszędzie

$$E^\mu[I_{\{\psi(t) \in \Gamma\}} | \mathcal{B}_0](\phi) = P(0, \pi_0(\phi), t, \Gamma).$$

Niech teraz $0 \leq s < t$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Załóżmy że dany jest ciąg $0 \leq u_1 < \dots < u_n = s$ oraz zbiory $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Wówczas podobnie jak wyżej korzystając z miar brzegowych dla miary μ następnie z definicji (5.8)[(5.9)] i traktując $(\pi_{u_1}(\psi), \dots, \pi_{u_n}(\psi))$ jak wektor losowy na przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}^T, (\mathcal{B}_\mathbb{R})^T, \mu)$ otrzymujemy ($s = u_n$)

$$\begin{aligned} & \mu(\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi(u_1) \in \Gamma_1, \dots, \psi(u_n) \in \Gamma_n, \psi(t) \in \Gamma\}) \\ &= P_{u_1, \dots, u_n, t}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n \times \Gamma) \\ &= \int_{\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_n} P(s, y_n, t, \Gamma) P_{u_1, \dots, u_n}(dy_1 \times \dots \times dy_n) \\ &= \int_{\{\pi_{u_1}(\psi), \dots, \pi_{u_n}(\psi) \in \Gamma_n\}} P(s, \pi_s(\psi), t, \Gamma) \mu(d\psi). \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie 1.14 dla rodziny zbiorów \mathcal{G} postaci $\{\psi \in \mathbb{R}^T : \psi(u_1) \in \Gamma_1, \dots, \psi(u_n) \in \Gamma_n\}$ otrzymujemy (5.3) (wzór pierwszy i ostatni definiuje nam miarę). \implies Teraz zakładamy, że dany jest proces Markowa zgodnie z definicją 5.2. Oznaczmy rozkłady brzegowe przez μ_{t_1, \dots, t_n} . Oczywiście (5.2) implikuje, że

$$\mu_0 = P_0.$$

Z powyższych rachunków wynika również, że

$$\begin{aligned} \mu_t(\Gamma) &= \mu(\psi(t) \in \Gamma) = \int_{\mathbb{R}^T} P(0, \psi(0), t, \Gamma) \mu(d\psi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(0, \psi(0), t, \Gamma) \mu_0(dy) = \int_{\mathbb{R}} P(0, \psi(0), t, \Gamma) P_0(dy) = P_t(\Gamma). \end{aligned}$$

Dalej podobnie przez indukcję pokazujemy, że

$$\mu_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n+1}) = P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}}(\Gamma_1 \times \dots \times \Gamma_{n+1}).$$

Korzystając z twierdzenia 1.14 otrzymujemy równość rozkładów brzegowych.

•

Z tego twierdzenia wynika, że na przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) , gdzie $\Omega = \mathbb{R}^T$, $\mathcal{F} = (\mathcal{B}_{\mathbb{R}})^T$, $P = \mu$ istnieje proces tzw. kanoniczny proces Markowa $\xi_t = \pi_t$

1. adaptowany do filtracji $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}_t$, czyli $\xi_t \in \mathcal{F}_t$ (ξ_t jest \mathcal{F}_t mierzalny)
2. istnieje rozkład początkowy ν taki, że

$$P(\xi_0 \in \Gamma) = \nu(\Gamma), \Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

3. dla wszystkich $0 \leq s < t$ oraz $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ rozkład warunkowy $\xi_t \in \Gamma$ względem filtracji \mathcal{F}_s zależy tylko od ostatniego pobytu procesu ξ w chwili s , czyli

$$P(\xi_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s)(\omega) = P(s, \xi_s(\omega), t, \Gamma)$$

P prawie wszędzie. Dzięki temu możemy wprowadzić ogólną definicję.

Definicja 5.4 Niech (Ω, \mathcal{F}, P) przestrzeń probabilistyczna z filtracją \mathcal{F}_t . Niech $P(s, x, t, \Gamma)$ będzie funkcją prawdopodobieństwa przejść i ν niech będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Proces stochastyczny ξ_t jest procesem Markowa jeśli są spełnione warunki **1,2,3**.

Poniższe twierdzenie sformułujemy dla prostoty dla $T = [0, 1]$.

Twierdzenie 5.5 Niech $P(s, x, t, \Gamma)$ będzie funkcją prawdopodobieństwa przejść i ν niech będzie miarą probabilistyczną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Ponadto założymy, że istnieje $\alpha > 0$, $r \geq 1 + \alpha$ oraz $C > 0$ takie, że dla dowolnych $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$

$$(5.13) \quad \sup_{y_1 \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y - y_1|^r P(t_1, y_1, t_2, dy) \leq C |t_1 - t_2|^{1+\alpha}.$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna μ na $(U = C(T), \mathcal{B}_U)$. Mówimy, wówczas że $(\pi_t, \mathcal{B}_{U,t}, \mu)$ jest ciągłym procesem Markowa z funkcją prawdopodobieństwa przejść $P(s, x, t, \Gamma)$ i i rozkładem początkowym ν . Ponadto dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $s \in T$ istnieje dokładnie jedna miara probabilistyczna $P_{s,x}$ na $(U = C(T), \mathcal{B}_U)$ taka, że

$$(5.14) \quad P_{s,x}(\{\psi \in U : \pi_t(\psi) = x \text{ dla wszystkich } 0 \leq t \leq s\}) = 1$$

oraz $P_{s,x}$ prawie wszędzie

$$(5.15) \quad P_{s,x}(\psi \in U : \pi_{t_2}(\psi) \in \Gamma | \mathcal{B}_{U,t_1})(\phi) = P(t_1, \phi(t_1), t_2, \Gamma)$$

dla dowolnych $s \leq t_1 \leq t_2$ i $\Gamma \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

DOWÓD. Z twierdzenia 5.3 istnieje miara μ taka, że jest ona procesem Markowa wg definicji 5.2. Zauważmy, że dla rozkładu P_J , gdzie $J = \{t_1 < t_2\}$ określonego wzorem (5.8), czyli

$$P_{t_1,t_2}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \int_{\Gamma_1} P(t_1, y_1, t_2, \Gamma_2) P_{t_1}(dy_1)$$

i stosując założenie (5.13) otrzymamy, że $\mu_J = P_J$ spełnia założenia twierdzenia 3.4 gdyż

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y_1 - y_2|^r \mu_J(dy_1 \times dy_2) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |y_1 - y_2|^r P(t_1, y_1, t_2, dy_2) P_{t_1}(dy_1) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{y_1} \left(\int_{\mathbb{R}} |y_1 - y_2|^r P(t_1, y_1, t_2, dy_2) \right) P_{t_1}(dy_1) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} C |t_2 - t_1|^{1+\alpha} P_{t_1}(dy_1) = C |t_2 - t_1|^{1+\alpha}. \end{aligned}$$

Zatem μ zawężona do $C(T)$ jest ciągłym procesem Markowa. Aby skonstruować rodzinę miar indeksowaną s, x definiujemy nowe rodziny prawdopodobieństw przejść

$$P'(t_1, y, t_2, \Gamma) = \begin{cases} \delta_y(\Gamma) & 0 \leq t_1 < t_2 \leq s, \\ P(s, y, t_2, \Gamma) & t_1 \leq s < t_2, \\ P(t_1, y, t_2, \Gamma) & s < t_1 < t_2. \end{cases}$$

Wówczas całe rozumowanie można powtórzyć dla $P'(t_1, y, t_2, \Gamma)$ z tym, że rozkładem początkowym jest $\nu = \delta_x$. Miarę odpowiadającą P' oraz δ_x oznaczamy przez $P_{s,x}$.

•

Definicja 5.6 *Jeśli $P(s, x, t, \Gamma) = P(s + h, x, t + h, \Gamma)$ to proces Markowa nazywamy **jednorodny** względem czasu. Jeśli $\mu^{s,t}(x, \Gamma) = \mu^{s,t}(0, \Gamma - x)$, to proces Markowa nazywamy **jednorodny** względem przestrzeni.*

Będziemy potrzebować następującego twierdzenia, którego dowód odłożymy na później.

Twierdzenie 5.7 Niech (Ω, \mathcal{F}, P) przestrzeń probabilistyczna. Niech $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ pod- σ ciało. Niech ξ, η dwie zmienne losowe, takie, że $\eta \in \mathcal{G}$ (η jest \mathcal{G} mierzalna). Załóżmy, że istnieje warunkowa wartość oczekiwana $E[f(\xi, \eta)|\mathcal{G}]$. Wówczas dla ustalonego u funkcja

$$F(u) = E[f(\xi, u)|\mathcal{G}]$$

jest dobrze określona i ponadto,

$$E[f(\xi, \eta)|\mathcal{G}] = F(\eta(\omega)).$$

Twierdzenie 5.8 Rodzina prawdopodobieństw przejść jednorodna względem przestrzeni generuje proces Markowa o przyrostach niezależnych, tzn. $X_t - X_s$ jest niezależne od \mathcal{F}_s dla $s < t$. Zachodzi również twierdzenie odwrotne.

DOWÓD. Niech X_t będzie procesem Markowa odpowiadającym rodzinie prawdopodobieństw przejść, przy dowolnej ustalonej mierze początkowej ν . Zobaczmy, że dla dowolnego zbioru $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} F(u) &= P[\{X_t - u \in B\}|\mathcal{F}_s] = E[I_{\{X_t - u \in B\}}|\mathcal{F}_s] \\ &= \mu^{s,t}(X_s, B + u). \end{aligned}$$

Korzystając teraz z twierdzenia 5.7 otrzymamy

$$P[\{X_t - X_s \in B\}|\mathcal{F}_s] = \mu^{s,t}(X_s, B + X_s).$$

Z założenia

$$P[\{X_t - X_s \in B\}|\mathcal{F}_s] = \mu^{s,t}(0, B),$$

czyli jest funkcją stałą. Zatem dla dowolnego B zbiór $\{X_t - X_s \in B\}$ jest niezależny od \mathcal{F}_s .

•

Szczególną rodziną prawdopodobieństw przejść jest rodzina

$$P(s, x, t, \Gamma) = \int_{\Gamma} g(t - s, y - x) dy,$$

gdzie

$$g(a, x) = \frac{1}{(2\pi a)^{1/2}} e^{-x^2/(2a)}.$$

Zauważmy, że $g(a, \cdot)$ jest gęstością rozkładu normalnego $N(0, \sqrt{a})$. Generuje ona proces Markowa jednorodny względem czasu i przestrzeni.

Zadanie 5.8 Pokazać, że powyższa rodzina spełnia warunek (5.13) z $\alpha = 1$, $r = 4$, $C = 3 = EU^4$, gdzie $U \in N(0, 1)$.

W ten sposób otrzymujemy miarę i rodzinę miar Wienera $\mathcal{W}_{s,x}$. Odpowiadający jej proces jest procesem Wienera. Dlaczego mówimy zazwyczaj o jednej mierze $\mathcal{W} = \mathcal{W}_{0,0}$? Wyjaśnia to następane zadanie

Zadanie 5.9 Definiujemy operator $T_{s,x} : C(T) \rightarrow C(T)$ dany wzorem

$$T_{s,x}(\psi)(t) = \psi((t - s)_+) + x.$$

Wówczas

$$\mathcal{W}_{s,x} = \mathcal{W} \circ T_{s,x}^{-1}.$$

Zadanie 5.10 Pokazać, że dla $\mu = \mathcal{W}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$

$$E^\mu[e^{i\vartheta\pi_t(\cdot)}] = e^{-t\vartheta^2/2}.$$

Proces π_t na przestrzeni probabilistycznej $(U = C(T), U \cap (B_{\mathbb{R}})^T, \mu = \mathcal{W})$ nazywamy **kanonicznym procesem Wienera**. Zauważmy, że funkcja losowa

$$\pi_\cdot : U \rightarrow U \subset \mathbb{R}^T$$

jest odwzorowaniem identycznościowym. Zatem rozkład π_\cdot jest równy μ . Zdefiniujmy proces $\xi_t = \pi_t + vw$, gdzie $w(t) = t$ dla $t \in T$. Rozkład funkcji losowej ξ oznaczmy przez μ_ξ . Podamy teraz uproszczoną wersję twierdzenie Camerona-Martina.

Twierdzenie Camerona-Martina 5.11 Przy powyższych oznaczeniach miary μ i μ_ξ są równoważne. Pochodna Radona-Nikodyma jest równa

$$\frac{d\mu_\xi}{d\mu} = e^{-v^2T/2 + v\pi_T}.$$

DOWÓD. Zdefiniujemy miarę na U wzorem

$$\nu(A) = \int_A e^{-v^2T/2 + v\pi_T(\psi)} \mu(d\psi).$$

Korzystając z twierdzenia 1.14 wystarczy udowodnić, że dla każdego zbioru cylindrycznego

$$\nu(A) = \mu_\xi(A).$$

Dla prostoty pokażemy równość dla jednowymiarowych zbiorów cylindrycznych postaci $A = \{\psi : \psi(t) \in (-\infty, a)\}$. Wówczas

$$(5.16) \quad \mu_\xi(A) = \mu(\{\psi : \psi(t) \in (-\infty, a - vt)\}) = \int_{-\infty}^{a-vt} g(t, x) dx.$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_A e^{-v^2 T/2 + v\pi_T(\psi)} \mu(d\psi) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^a e^{-v^2 T/2 + vx_2} P_{t,T}(dx_1 \times dx_2). \end{aligned}$$

Z definicji

$$\begin{aligned} P_{t,T}(dx_1 \times dx_2) &= P(t, x_1, T, dx_2) P_t(dx_1) = P(t, x_1, T, dx_2) P(0, 0, t, dx_1) \\ &= g(T - t, x_2 - x_1) dx_2 g(t, x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \int_{\mathbb{R}} dx_2 \int_{-\infty}^a dx_1 e^{-v^2(T-t)/2 + v(x_2 - x_1)} e^{-v^2 t/2 + vx_1} g(T - t, x_2 - x_1) g(t, x_1). \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2(T-t)/2 + vu} g(T - t, u) du \int_{-\infty}^a e^{-v^2 t/2 + vx_1} g(t, x_1) dx_1. \end{aligned}$$

Dla standardowej zmiennej gausowskiej N , wiemy, że $Ee^{\lambda N} = e^{\lambda^2/2}$. Stąd jeśli $X \in N(0, \sqrt{T-t})$, to

$$Ee^{\lambda X} = Ee^{\lambda \sqrt{T-t} \frac{X}{\sqrt{T-t}}} = e^{\lambda^2(T-t)/2}.$$

Zatem

$$\nu(A) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(x-vt)^2}{2t}} dx.$$

Porównując z (5.16) otrzymujemy tezę.

•

Zazwyczaj podaje się następującą definicję procesu Wienera

Definicja 5.12 Proces Wienera *startujący z zera nazywamy proces Markowa taki, że W_t , $0 \leq t < \infty$ mający następujące własności:*

1. $W_0 = 0$
2. Dla dowolnych $s < t$ zmienna losowa $W_s - W_t$ jest niezależna od filtracji \mathcal{F}_s
3. dla każdego $0 \leq s < t$ zmienna losowa $W_t - W_s$ ma rozkład normalny o średniej zero i wariancji $t - s$, czyli $N(0, \sqrt{t - s})$

Z twierdzenie Camerona-Martina otrzymamy następującą wersję **twierdzenia Girsanowa**

Wniosek 5.13 *Niech W_t jest procesem Wienera określonym na (Ω, \mathcal{F}, P) dla $0 \leq t \leq T$. Wówczas proces*

$$\tilde{W}_t = W_t - vt$$

jest procesem Wienera startującym z zera dla miary probabilistycznej Q równoważnej mierze P takiej, że

$$dQ = dPe^{-v^2T/2+vW_T}.$$

Ponadto z poprzednich twierdzeń wynika, że trajektorie są ciągłe prawie wszędzie. Z wniosku 3.2 możemy wywnioskować, jaka jest klasa gładkości trajektorii (trajektorie są Hölderowskie z odpowiednim współczynnikiem).

6 Czasy stopu i procesy prawostronnie ciągłe

W dalszym ciągu przez T będzie oznaczać zbiór $[0, \infty)$ choć twierdzenia są prawdziwe też dla $T = [0, 1]$ i niektóre dla $T = \mathbb{N}$. Dana jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, \mathcal{F}, P) i filtracja $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$. Ponieważ przeliczalny przekrój σ -ciał jest σ -ciałem wprowadzamy oznaczenie

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{u>t} \mathcal{F}_u.$$

Formalnie przekrój nie jest przeliczalny ale jak łatwo pokazać, jeśli $\{u_j\}$ jest dowolnym ciągiem malejącym do t , czyli $u_j \searrow t$, to

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_j \mathcal{F}_{u_j}.$$

Zauważmy, że \mathcal{F}_{t+} tworzy filtrację prawostronnie ciągłą, którą to będziemy oznaczać przez \mathcal{F}^+ . Dlatego będziemy również stosować oznaczenie $\mathcal{F}_t^+ = \mathcal{F}_{t+}$.

Definicja 6.1 *Filtracja jest **prawostronnie ciągła** jeśli dla każdego $t \in T$*

$$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

Proste konsekwencje takiej definicji wyjaśnia twierdzenie 6.3

Definicja 6.2 *Zmienna losowa $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ jest \mathcal{F} -czasem stopu jeśli dla każdego $t \in T$*

$$\{\omega : \tau(\omega) \leq t\} = \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Jeśli zbiór indeksów T jest zbiorem liczb naturalnych, to czasem stopu nazywamy odwzorowanie mierzalne $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. W ogólności $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{\sup T\}$. Jeśli wiemy o jaką filtrację nam chodzi będziemy mówić o czasach stopu. Ponadto, czas stopu jest **ograniczony** jeśli

$$P(\{\tau = \infty\}) = 0.$$

Twierdzenie 6.3 *Załóżmy, że filtracja \mathcal{F}_t jest prawostronnie ciągła. Wówczas τ jest czasem stopu wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $t \in T$*

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

DOWÓD. \Leftarrow Niech u_j ciąg liczb malejących do t , $u_j \searrow t$. Wówczas

$$\{\tau \leq t\} = \bigcap_j \{\tau < u_j\}, \quad \{\tau < u_j\} \in \mathcal{F}_{u_j}.$$

Stąd $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$.

\Rightarrow Zauważmy, że

$$\{\tau < t\} = \bigcup_j \{\tau \leq t - \epsilon_j\} \in \mathcal{F}_{t-\epsilon_j} \subset \mathcal{F}_t.$$

•

W dalszym ciągu dla prostoty będziemy rozpatrywać procesy określone w $\Xi = \mathbb{R}$. To co jest istotne, to określenie takiej struktury aby można było mówić o ciągłości trajektorii, tzn. aby odwzorowanie (funkcja) $X(\omega) : T \rightarrow \Xi$ była ciągła lub prawostronnie (lewostronnie) ciągła.

Twierdzenie 6.4 *Jeśli proces X_t adaptowany do filtracji \mathcal{F}_t ma prawostronnie (lewostronnie) ciągłe trajektorie, to proces zawężony*

$$X : [0, t] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

dla każdego t jest $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$ mierzalny, czyli jest **progresywnie mierzalny**

DOWÓD. Zauważmy, że dla funkcji prawostronnie ciągłej f możemy skonstruować ciąg funkcji $\{f_n\}$ prostych lewostronnie ciągłych

$$f_n(u) := f\left(\frac{[nu] + 1}{n}\right),$$

który jest zbieżny punktowo dla każdego $u \in T$, gdzie $[u] = k - 1$ o ile $k - 1 < u \leq k$. Ustalmy x oraz $\epsilon > 0$. Ponieważ f jest prawostronnie ciągła w x istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $x < y < x + \delta$, $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Niech n, k będzie takie, że $(k - 1)/n < x \leq k/n$ oraz $1/n < \delta$. Wówczas

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(k/n)| + |f_n(x) - f_n(k/n)| + |f(k/n) - f_n(k/n)|$$

Zauważmy, że $f_n(x) = f_n(k/n)$, $f(k/n) = f_n(k/n)$ zatem z prawostronnej ciągłości

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Dla ustalonego t definiujemy teraz ciąg procesów

$$X_n(u, \omega) = X\left(\frac{[nu] + 1}{n} \wedge t, \omega\right).$$

Z tego co powiedzieliśmy wynika, że X_n punktowo zbiega do X w zbiorze $[0, t] \times \Omega$. Ponadto $X_n \in \mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$, gdyż na każdym z odcinków $(k-1)/n < u \leq k/n$ X_n zależy tylko od ω ,

$$X_n(u, \omega) = X\left(\frac{k}{n} \wedge t, \omega\right) \in \mathcal{F}_{\frac{k}{n}}.$$

•
Dla ustalonego czasu stopu τ zdefiniujemy rodzinę zbiorów.

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \geq 0\}.$$

Zadanie 6.5 *Sprawdzić, że \mathcal{F}_τ jest σ -ciałem. Jeśli τ jest czasem stopu, to $\tau \in \mathcal{F}_\tau$.*

Odczytajmy tylko z definicji co oznacza, że $Y \in \mathcal{F}_\tau$. Z definicji wynika, że jest to równoważne iż obcięta $Y_{\{\tau \leq t\}}$ są \mathcal{F}_t mierzalne dla każdego t .

Twierdzenie 6.6 *Jeśli proces X_t jest progresywnie mierzalny, to zmienna losowa $X_\tau \in \mathcal{F}_\tau$ na zbiorze $\tau < \infty$.*

Uwagi Zmienną losową $X_{\tau(\omega)}(\omega)$ interpretuje się jako zatrzymanie procesu w chwili τ .

DOWÓD. Ustalmy t . Zdefiniujemy funkcję

$$f_t : (\{\tau \leq t\}, \{\tau \leq t\} \cap \mathcal{F}_t) \rightarrow ([0, t] \times \Omega, \mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t)$$

wzorem

$$f_t(\omega) = (\tau(\omega) \wedge t, \omega) = (\tau(\omega), \omega).$$

Funkcja f_t jest mierzalna. Zatem ponieważ X jest progresywnie mierzalna, rozważając $X|_{\text{obcięte do } [0, t] \times \Omega}$ otrzymujemy mierzalność $X| \circ f_t = X(\tau(\omega) \wedge t, \omega)$, czyli mierzalność X na zbiorze $\tau \leq t$ co kończy dowód.

•

Twierdzenie 6.7 *Jeśli σ, τ są czasami stopu, to*

$$\sigma \wedge \tau, \quad \sigma \vee \tau$$

są czasami stopu. Przy założeniu, że filtracja jest prawostronnie ciągła $\sigma + \tau$ jest czasem stopu. Ponadto

$$(6.1) \quad \mathcal{F}_\sigma \cap \{\sigma \leq \tau\} \subset \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$$

dla dowolnego $t \in T$

$$(6.2) \quad \mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t, \quad \text{na} \quad \{\tau = t\}.$$

DOWÓD. Niech $A \in \mathcal{F}_\sigma$ i $t \in T$. Zauważmy, że

$$A \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cap \{\tau \leq t\} \cap \{\sigma \wedge t \leq \tau \wedge t\}.$$

Stąd dla $t \in T$

$$A \cap \{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

bo funkcje $\sigma \wedge t$ oraz $\tau \wedge t$ są \mathcal{F}_t mierzalne (np. $t \leq s$, to $\{\tau \wedge t \leq s\} = \Omega$. Jeśli przeciwnie $t \geq s$, to $\{\tau \wedge t \leq s\} = \{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s$.) Zatem

$$A \cap \{\sigma \leq \tau\} \in \mathcal{F}_\tau$$

Pierwsze zawieranie (6.1) otrzymamy wstawiając w powyższe wzory za parę $(\sigma; \tau)$ parę $(\sigma; \sigma \wedge \tau)$, gdyż $\{\sigma \leq \sigma \wedge \tau\} = \{\sigma \leq \tau\}$.

Wstawiając w powyższe wzory za parę $(\sigma; \tau)$ pary $(\sigma \wedge \tau; \sigma)$ i $(\sigma \wedge \tau; \tau)$ otrzymujemy, że

$$\mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau} \subset \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau.$$

W drugą stronę. Jeśli $A \in \mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}_\tau$ i $t \in T$, to

$$A \cap \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\tau \leq t\}) \in \mathcal{F}_t,$$

czyli $A \in \mathcal{F}_{\sigma \wedge \tau}$.

Przejdziemy teraz do dowodu (6.2). Niech $\tau \equiv t$. Pokażemy, że $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$. Zauważmy, że

$$\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\tau \cap \{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_t.$$

W drugą stronę. Jeśli $A \in \mathcal{F}_t$, to dla $s < t$

$$A \cap \{\tau = t \leq s\} = \emptyset \in \mathcal{F}_s.$$

Zaś jeśli $s \geq t$, to

$$A \cap \{\tau = t \leq s\} = A \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s,$$

czyli $A \in \mathcal{F}_\tau$. W ogólnym przypadku z (6.1) wynika, że

$$\mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\}.$$

zmieniając znaczeniami analogicznie

$$\mathcal{F}_\tau \cap \{\tau = \sigma\} \subset \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \cap \{\tau = \sigma\}.$$

Stąd $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_\sigma$ na $\{\tau = \sigma\}$. Korzystając z dowodu (6.2) dla $\sigma \equiv t$ otrzymujemy tezę.

•

Definicja 6.8 *Zmienna losowa $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ jest słabym \mathcal{F} - czasem stopu jeśli dla każdego $t \in T$*

$$\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Twierdzenie 6.9 *Zmienna losowa τ jest słabym \mathcal{F} -czasem stopu wtedy i tylko wtedy gdy jest \mathcal{F}^+ -czasem stopu. Ponadto*

$$(6.3) \quad \mathcal{F}_\tau^+ = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, t \in T\}.$$

DOWÓD. Zauważmy, że dla dowolnego $t \geq 0$.

$$(6.4) \quad \{\tau \leq t\} = \bigcap_{r>t, r \in Q} \{\tau < r\} \quad \{\tau < t\} = \bigcup_{r<t, r \in Q} \{\tau \leq r\}.$$

Jeśli dla każdego $t \in T$

$$A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t^+,$$

to z (6.4) dla $t > 0$

$$A \cap \{\tau < t\} = \bigcup_{r<t, r \in Q} A \cap \{\tau \leq r\} \in \bigcup \mathcal{F}_{r^+} \subset \mathcal{F}_t.$$

Jeśli $A = \Omega$, to powyższa zależność dowodzi implikacji równoważności \Leftarrow .
Jeśli dla każdego $t \in T$

$$A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

to z (6.4) dla $t > 0$ oraz $h > 0$

$$A \cap \{\tau \leq t\} = \bigcap_{r \in (t, t+h), r \in Q} A \cap \{\tau < r\} \in \mathcal{F}_{t+h}.$$

Zatem $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_{t^+}$, co dowodzi implikacji w drugą stronę, gdy $A = \Omega$.
Ponadto z obu wnioskowań otrzymujemy

$$\mathcal{F}_\tau^+ = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t, t \in T\}.$$

•

Zauważmy, że jeśli τ jest słabym czasem stopu, to dla każdego $h > 0$ $\tau + h$ jest czasem stopu. Sprawdzenie, $t \in T$

$$\{\tau + h \leq t\} = \{\tau \leq t - h\} \in \mathcal{F}_{(t-h)+} \subset \mathcal{F}_t.$$

Zatem możemy zdefiniować σ ciało (ze wzoru (6.1) $\mathcal{F}_{\tau+h_1} \subset \mathcal{F}_{\tau+h_2}$, gdy $h_1 < h_2$.)

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{\tau+h}.$$

Prawdziwe jest wówczas równość

$$\mathcal{F}_{\tau+} = \mathcal{F}_\tau^+,$$

którą zostawimy bez dowodu.

Lemat 6.10 *Dany jest ciąg \mathcal{F} -czasów stopu $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$. Wówczas $\sigma = \sup_n \tau_n$ jest \mathcal{F} -czasem stopu. Jeśli dany jest ciąg słabych \mathcal{F} -czasów stopu $\{\tau_n\}_{n \geq 1}$, to $\tau = \inf_n \tau_n$ jest słabym \mathcal{F} czasem stopu.*

DOWÓD. Teza wynika z równości

$$\{\sigma \leq t\} = \bigcap_n \{\tau_n \leq t\}$$

oraz

$$\{\tau < t\} = \bigcup_n \{\tau_n < t\}.$$

•

Lemat 6.11 *Dla dowolnego słabego \mathcal{F} czasu stopu τ istnieje ciąg malejących \mathcal{F} czasów stopu zbieżny do τ o wartościach w zbiorze przeliczalnym.*

DOWÓD. Definiujemy rządany ciąg wzorem

$$\tau_n = 2^{-n} [2^n \tau + 1],$$

gdzie $[x] = k - 1$ o ile $k - 1 \leq x < k$. Zauważmy, że τ_n przyjmuje wartości w zbiorze $2^{-n} \mathbb{Z}$. Zatem wystarczy sprawdzić, że

$$\{\tau \leq k/2^n\} \in \mathcal{F}_{k/2^n},$$

co wynika z następujących równości

$$\{\tau \leq k/2^n\} = \{[2^n \tau + 1] \leq k\}$$

$$= \{2^n \tau + 1 < k + 1\} = \{\tau < k/2^n\} \in \mathcal{F}_{k/2^n}.$$

•

W zastosowaniach ważną klasę czasów stopu stanowi klasa pierwszego wejścia do zbioru B przez proces X_t w chwili $t > 0$ (hitting time)

$$\tau_B = \inf\{t > 0 : X_t \in B\}.$$

Poniższy lemat jest prawdziwy również dla procesów przyjmujących wartości w przestrzeni metrycznej.

Lemat 6.12 *Jeśli proces X_t adoptowany do $\{\mathcal{F}_t\}$ ma ciągle trajektorie, zbiór B jest domknięty, to τ_B jest \mathcal{F} czasem stopu.*

Jeśli proces X_t adoptowany do $\{\mathcal{F}_t\}$ ma prawostronnie ciągle trajektorie, zbiór B jest otwarty, to τ_B jest słabym \mathcal{F} czasem stopu.

DOWÓD. Dowód pierwszej części wynika z równania

$$\{\tau_B \leq t\} = \bigcup_{h>0, h \in Q} \bigcap_n \bigcup_{r \in Q \cap [h, t]} \{d(X_r, B) < 1/n\} \in \mathcal{F}_t,$$

gdzie $d(x, B)$ jest odległością punktu x od zbioru B , czyli

$$d(x, B) = \inf_{y \in B} |x - y|.$$

Zauważmy, że odległość punktu od zbioru jest funkcją ciągłą. Uzasadnimy powyższe równanie. Ustalmy ω i t takie, że $\tau(\omega) = r \leq t$.

Ponieważ trajektoria $X_s = X_s(\omega)$ (będziemy pomijać ustalone ω) jest ciągła zatem z definicji τ_B oraz ponieważ B jest domknięty wynika, że $X_r \in B$. Stąd dla każdego n istnieje $u \in Q$, gdzie $u < r$, że

$$d(X_u, B) \leq |X_r - X_u| < 1/n.$$

W drugą stronę. Ustalmy ω takie, że istnieje h tak, że dla każdego n istnieje $r_n \in Q \cap [h, t]$ tak, że

$$d(X_{r_n}, B) < 1/n.$$

Zauważmy, że z ciągu r_n możemy wybrać podciąg zbieżny nazwijmy go tak samo, zatem $r_n \rightarrow r$. Z ciągłości $X_{r_n} \rightarrow X_r$. Z wyboru również wynika, że $d(X_r, B) = 0$, czyli ponieważ zbiór B jest domknięty $X_r(\omega) \in B$, co pokazuje, że $\tau_B \leq r \leq t$. Dowód drugiej części wynika z równania

$$\{\tau_B < t\} = \bigcup_{r \in Q \cap (0, t)} \{X_r \in B\} \in \mathcal{F}_t.$$

•
Potrzebować będziemy jeszcze twierdzenia o lokalizacji warunkowej wartości oczekiwanej

Lemat 6.13 *Niech w przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{F}, P) będą dwa pod σ -ciała \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 oraz dwie zmienne losowe $\xi, \eta \in L^1(P)$ i takie, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ taki, że*

$$\mathcal{G}_1 \cap A = \mathcal{G}_2 \cap A$$

oraz $\xi = \eta$ dla $\omega \in A$. Wówczas

$$E[\xi|\mathcal{G}_1](\omega) = E[\eta|\mathcal{G}_2](\omega), \quad \omega \in A.$$

DOWÓD. Zauważmy, że

$$I_A E[\xi|\mathcal{G}_1] = E[I_A \xi|\mathcal{G}_1]$$

$$E[I_A \eta|\mathcal{G}_2] = I_A E[\eta|\mathcal{G}_2]$$

i z założenia obie funkcje są $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ mierzalne. Definiujemy zbiór

$$B = A \cap \{E[\xi|\mathcal{G}_1] > E[\eta|\mathcal{G}_2]\} \in \mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2.$$

Wówczas

$$\int_B E[\xi|\mathcal{G}_1] = \int_B \xi = \int_B \eta = \int_B E[\eta|\mathcal{G}_2]$$

co wobec definicji B zachodzi tylko wówczas gdy $P(B) = 0$. W drugą stronę analogicznie

•
Poniższe twierdzenie Dooba udowodnimy najpierw w sytuacji gdy zbiór T jest przeliczalny. Będziemy korzystać z twierdzenia 6.7 wzór (6.2) który jest prawdziwy też w tej sytuacji. Ponadto martyngał M_t , $t \in [0, \infty)$ nazywamy regularnym jeśli istnieje rozszerzenie indeksów do zbioru $T = [0, \infty]$, czyli istnieje M_∞ , taki, że $M_t = E[M_\infty|\mathcal{F}_t]$.

Twierdzenie Dooba 6.14 *Niech proces M_t , $t \in T$ będzie martyngałem, T zbiorem przeliczalnym zaś σ, τ \mathcal{F} -czasami stopu, gdzie τ przyjmuje wartości w skończonym zbiorze albo τ jest ograniczony zaś martyngał jest regularny. Wówczas M_τ jest całkowalny oraz prawie wszędzie*

$$M_{\sigma \wedge \tau} = E[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma].$$

DOWÓD. Załóżmy, że τ przyjmuje wartości w zbiorze skończonym. Wówczas M_τ jest całkowalne. Z twierdzenia 6.7 (6.2) oraz lematu 6.13 wynika, że w zbiorze $\omega \in \{\tau = t\}$ i dla $t \leq u$

$$E[M_u|\mathcal{F}_\tau] = E[M_u|\mathcal{F}_t] = M_t = M_\tau.$$

Ponieważ T jest przeliczalny zatem

$$E[M_u|\mathcal{F}_\tau] = M_\tau$$

P prawie wszędzie na zbiorze $\tau \leq u$. Jeśli $\sigma \leq \tau \leq u$, to z twierdzenia 6.7 (6.1) $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ oraz powyższego równania

$$E[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = E[E[M_u|\mathcal{F}_\tau]|\mathcal{F}_\sigma] = E[M_u|\mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma = M_{\sigma \wedge \tau}.$$

Ponieważ u jest dowolne i τ jest ograniczone powyższa równość zachodzi dla $\sigma \leq \tau$. Z drugiej strony na zbiorze $\sigma > \tau$, z (6.1) $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$. Analogiczne twierdzenie do twierdzenia 6.6 dla T przeliczalnego i procesu adaptowanego M_t głosi, że $M_\tau \in \mathcal{F}_\tau$, czyli $M_\tau \in \mathcal{F}_\sigma$. Zatem

$$E[M_\tau|\mathcal{F}_\sigma] = M_\tau = M_{\sigma \wedge \tau},$$

co kończy dowód dla τ skończonego. Jeśli zachodzi druga możliwość, to postępujemy identycznie z tym, że za $u = \infty$ i wnioskujemy, że M_τ jest całkowalny. Dokładniej ponieważ z nieówności Jensena

$$E[|M_\infty||\mathcal{F}_\tau] \geq |E[M_\infty|\mathcal{F}_\tau]| = |M_\tau|,$$

zatem

$$E|M_\tau| \leq E|M_\infty|.$$

•

Definicja 6.15 Rodzina zmiennych losowych X_α nazywa się **jednakowo całkowalna**, jeżeli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup_{\alpha} \int_{|X_\alpha| > x} |X_\alpha| dP = 0$$

Będziemy potrzebować następującego twierdzenia

Twierdzenie Dooba 6.16 Niech $X \in L^1$. Rodzina zmiennych losowych $E[X|\mathcal{G}]$ dla wszystkich σ ciał $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ jest jednakowo całkowalna.

Twierdzenie Dooba 6.17 *Niech proces M_t będzie martyngałem regularnym o prawostronnie ciągłych trajektoriach, niech filtracja \mathcal{F}_t będzie prawostronnie ciągła. Niech τ, σ będą \mathcal{F} -czasami stopu, przy czym τ jest ograniczony. Wówczas*

$$M_{\sigma \wedge \tau} = E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma].$$

DOWÓD. Jeśli ograniczymy zbiór parametrów do zbioru $2^{-n}\mathbb{N}$ to są spełnione założenia twierdzenia 6.14. Przy czym czasami stopu są

$$\tau_n = 2^{-n}[2^n \tau + 1], \quad \sigma_n = 2^{-n}[2^n \sigma + 1],$$

gdyż

$$\tau_n, \sigma_n : \Omega \rightarrow 2^{-n}\mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Zatem

$$M_{\sigma_n \wedge \tau_n} = E[M_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}].$$

zauważmy, że jeśli $m \leq n$, to prawdziwe jest również równanie

$$M_{\sigma_m \wedge \tau_n} = E[M_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_m}],$$

gdyż $2^{-m}\mathbb{N} \subset 2^{-n}\mathbb{N}$ i σ_m jest czasem stopu przy filtracji \mathcal{F}_t , $t \in 2^{-n}\mathbb{N}$. Z dowodu twierdzenia wynika, że

$$(6.5) \quad |M_{\tau_n}| \leq E[|M_\infty| | \mathcal{F}_{\tau_n}],$$

czyli z twierdzenie 6.16 rodzina jest jednakowo całkowna. Z prawostronnej ciągłości wynika zbieżność punktowa

$$M_{\tau_n} \rightarrow M_\tau,$$

gdyż $\tau \leq \tau_n$ i $\tau_n \rightarrow \tau$. Zatem z twierdzenia o zbieżności ograniczonej wynika, że przy $n \rightarrow \infty$ prawie wszędzie

$$E[M_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_m}] \rightarrow E[M_\tau | \mathcal{F}_{\sigma_m}]$$

czyli

$$M_{\sigma_m \wedge \tau} = E[M_\tau | \mathcal{F}_{\sigma_m}].$$

Ponieważ filtracja jest prawostronnie ciągła

$$(6.6) \quad \mathcal{F}_\sigma = \bigcap_m \mathcal{F}_{\sigma_m},$$

co uzasadnijmy poniżej. Ponieważ $\sigma \leq \sigma_m$ zatem z (6.1) wynika, że $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_{\sigma_m}$. W drugą stronę. Załóżmy, że dany jest zbiór A taki, że dla każdego m (korzystamy z twierdzenia 6.3)

$$A \cap \{\sigma_m < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Stąd

$$A \cap \{\sigma < t\} = A \cap \bigcap_m \{\sigma_m < t\} \in \mathcal{F}_t,$$

czyli $A \in \mathcal{F}_\sigma$ co kończy dowód. Zatem z twierdzenia o zbieżności warunkowych wartości oczekiwanych $m \rightarrow \infty$

$$E[M_\tau | \mathcal{F}_{\sigma_n}] \rightarrow E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma]$$

prawie wszędzie i w L^1 czyli

$$M_{\sigma \wedge \tau} = E[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma],$$

co kończy dowód.

•