

Probabilistyka
na podstawie idei teorii niezawodności

Karol Dziędziul

2009

1. Podstawowe pojęcia teorii niezawodności

Rozważamy zbiór wszystkich możliwych do pomyślenia wariantów (scenariuszy) całego życia - elementów, układów lub ludzi $\omega \in \Omega$. Wariantom tym (a dokładniej dopuszczalnym zbiorom różnych wariantów) przyporządkujemy odpowiednią wagę, czyli miarę prognozując możliwe prawdopodobieństwo. Interesować nas będzie **przyszły czas życia** $T = T(x)$ pojedynczego elementu, układu, człowieka x , zatem

$$T : \Omega \rightarrow [0, +\infty).$$

Czas (zmienna losowa) T jest tak zdefiniowana, aby można było policzyć prawdopodobieństwo śmierci do chwili t , czyli wyznaczyć funkcję nazywaną **dystrybuantą**

$$F(t) = P\{\omega \in \Omega : T(x)(\omega) \leq t\}.$$

Dystrybuanta F nazywana jest również **funkcją zawodności**. Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą, ponadto $0 \leq F(t) \leq 1$. Wartość $F(t)$ interpretujemy jako prawdopodobieństwo śmierci elementu do chwili t . Można również dla elementów jednorodnych (o tych samych parametrach i tych samych możliwych do pomyślenia wariantach życia) sądzić, że $F(t)$ oznacza procent elementów, które zepsują się do chwili t .

My będziemy zakładać, że funkcja F jest ciągła oraz $F(0) = 0$.

Równoważną charakteryzację przyszłego czasu życia otrzymamy rozważając **funkcję niezawodności**

$$R(t) = 1 - F(t) = P\{\omega \in \Omega : T(x)(\omega) > t\}.$$

Interpretujemy ją w odniesieniu do elementów systemu (czas bezawaryjnej pracy, np. liczba godzin świecenia żarówki lub jednorodnej partii żarówek). Dla systemu złożonego pojęcie niezawodności rozważa się w kategorii dostępności i tolerowania awarii. Dla towarzystwa ubezpieczeniowego oznacza ono w zależności od rodzaju polisy czas życia, czas zdolności do pracy itp.

Definicja 1 Jeśli istnieje pochodna funkcji F , to nazywamy ją **gęstością prawdopodobieństwa** lub **gęstością** i oznaczamy ją przez f , czyli

$$f(t) = F'(t).$$

Z definicji oraz założenia otrzymujemy, że

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds.$$

Własności gęstości

$$f \geq 0,$$

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = 1,$$

$$P(a < T \leq b) = \int_a^b f(s)ds.$$

W tym wykładzie zazwyczaj będziemy zakładać, że funkcja F jest różniczkowalna.

Równoważnym sposobem opisu dalszego czasu życia T jest funkcja nazywana intensywnością uszkodzeń, intensywnością śmiertelności czy intensywnością śmierci. Dana jest ona wzorem

$$\lambda(t) = -(\ln R(t))' = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Sens tego parametru jest następujący: w jednorodnej populacji, która dożyła do chwili t obserwujemy szybkość śmierci. Pokazuje to również wzór

$$\lambda(t) \approx \frac{R(t) - R(t + dt)}{dtR(t)}$$

oznaczający względny wzrost uszkodzeń, śmierci.

Związki pomiędzy funkcją niezawodności, gęstością i intensywnością uszkodzeń

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(s)ds\right),$$

$$f(t) = R(t)\lambda(t) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}\lambda(t).$$

Charakterystyki liczbowe

Jedną z podstawowych charakterystyk liczbowych badanej cechy, czyli przyszłego czasu życia, jest miara położenia rozkładu, czyli wartość oczekiwana

$$ET = \int_0^{\infty} tf(t)dt.$$

Ten parametr w teorii niezawodności interpretujemy jako oczekiwany czas (w języku potocznym średni czas patrz uwagi językowe poniżej) do awarii (mean time to failure). Ponadto wprowadzamy k-ty moment centralny

$$ET^k = \int_0^{\infty} t^k f(t) dt.$$

Jedną z miar rozproszenia rozkładu jest wariancja

$$VarT = E(T - ET)^2 = ET^2 - (ET)^2$$

oraz związane z wariancją odchylenie standardowe

$$\sigma = \sqrt{VarT}.$$

Czasami warto jest podkreślać słowo oczekiwane: np. oczekiwane odchylenie standardowe dla rozróżnienia pomiędzy pojęciami probabilistyki a statystyką.

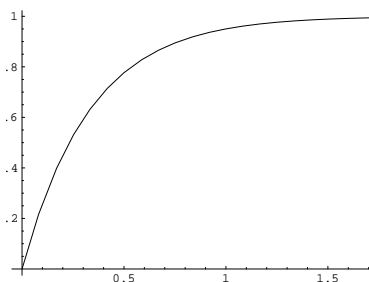
Zadanie 1. Umiejętność obliczania EX oraz $VarX$ dla zmiennych losowych dyskretnych.

2. Podstawowe rozkłady

Rozkład wykładniczy. Ogólna postać dystrybuanty

$$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t).$$

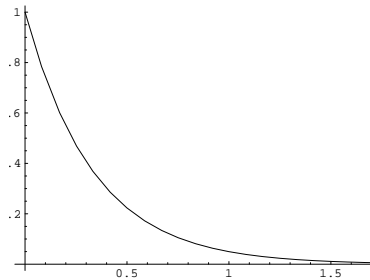
Przykład $\lambda = 3$.



Gęstość rozkładu wykładniczego

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Przykład $\lambda = 3$.



Zauważmy, że intensywność jest funkcją stałą, $\lambda(t) = \lambda$ zaś

$$ET = \frac{1}{\lambda} \quad VarT = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Rozkład Weibulla (1939). Intensywność uszkodzeń w rozkładzie Weibulla ma następującą postać, $t \geq 0$

$$\lambda(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1},$$

gdzie parametry $\alpha, \lambda \geq 0$. Jeśli $\alpha > 1$, to intensywność uszkodzeń jest funkcją rosnącą. Jeśli $\alpha = 1$, to mamy do czynienia z rozkładem wykładniczym. Dla $\alpha < 1$ intensywność uszkodzeń maleje. Otrzymujemy ponadto,

$$R(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(s) ds\right] = \exp[-\lambda t^\alpha].$$

Okazuje się, że wartość oczekiwana

$$ET = \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \lambda^{-\frac{1}{\alpha}}$$

zaś wariancja

$$VarT = \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\right) \lambda^{-\frac{2}{\alpha}}.$$

Występująca w powyższych wzorach **funkcja Gamma** Γ daje nam uogólnienie pojęcia silni, gdyż

$$\Gamma(n + 1) = n!.$$

Pozostałe własności i definicja są następujące. Definicja dla $x > 0$

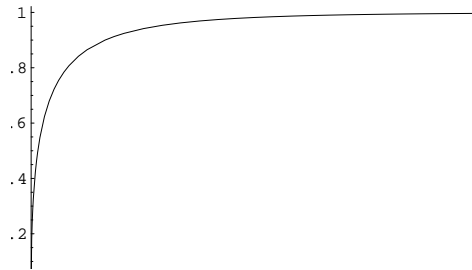
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

W niektórych przypadkach można łatwo obliczyć wartość funkcji Γ np.

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} (2n - 1)!!,$$

gdzie symbol dwóch silni $!!$ oznacza w tym przypadku mnożenie kolejnych liczb nieparzystych, czyli $5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5$.

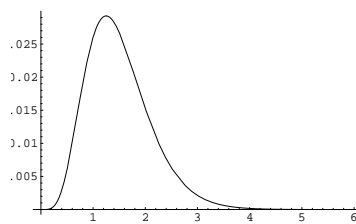
Przykład $\lambda = 4, \alpha = 0.5$ dystrybuanta rozkładu Weibulla.



Rozkład gamma. Gęstość rozkładu gamma z parametrami α, λ

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \exp(-\lambda t).$$

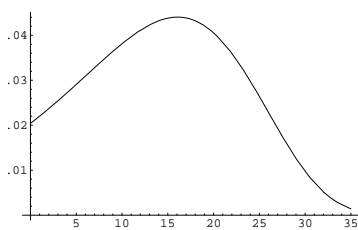
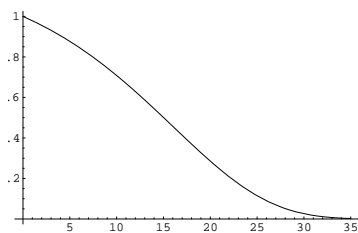
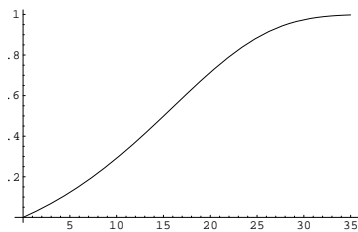
Przykład gęstości $\lambda = 4, \alpha = 6$

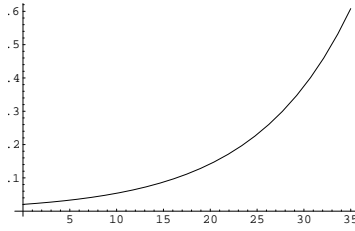


Rozkład Gompertza Intensywność dla rozkładu Gompertza z parametrami α, λ

$$\lambda(t) = \alpha e^{\lambda t}.$$

W matematyce aktuarialnej używany jest rozkład z parametrami $\alpha = 0.0204$ oraz $\lambda = 0.097$. Modeluje od dalszy czas życia osób które osiągnęły wiek emerytalny czyli 65 lat. Po kolei dystrybuanta, funkcja niezawodności, gęstość oraz intensywność





Rozkład normalny standardowy. Gęstość rozkładu standardowego oznaczonego $N(0, 1)$ jest następująca dla $t \in (-\infty, \infty)$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

Przez Φ oznaczamy dystrybuantę rozkładu $N(0, 1)$. Wiemy, że

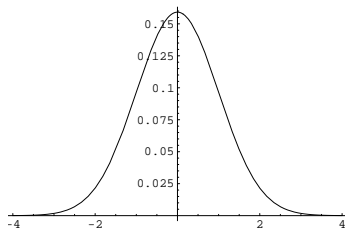
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Powyższa całka jest to tzw. całka nieelementarna, dlatego wartości dystrybuanty są tablicowane w podręcznikach.

Zauważmy, że rozkład ten nie jest skoncentrowany jak wszystkie powyższe rozkłady na półprostej $(0, \infty)$. Nie modeluje on zatem bezpośrednio dalszego czasu życia. Jego zastosowanie i użyteczność poznamy w dalszej części podając twierdzenia graniczne. Modelujemy nim na przykład błąd pomiarowy U , gdzie brak jest błędu systematycznego. Inaczej mówiąc, błąd systematyczny jest równy zero ($EU = 0$). Parametr jeden oznacza, że mamy zadaną dokładność pomiarową (np. 1 mA $VarU = 1$). Z tego modelu wynika, że prawdopodobieństwo błędu w granicach dokładności pomiarowej wynosi

$$P(-1 < U \leq 1) = \int_{-1}^1 f(t) dt = \Phi(1) - \Phi(-1) \approx 0.68.$$

Gęstość rozkładu standardowego



Gęstość rozkładu standardowego

Rozkład normalny. Rozkład normalny rozpatrujemy z parametrami μ, σ oznaczając go $N(\mu, \sigma)$. Gęstość tego rozkładu jest równa

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Jeśli badana cecha (błąd pomiarowy) X ma rozkład normalny $N(\mu, \sigma)$, to jej wartość oczekiwana (czyli błąd systematyczny)

$$EX = \mu,$$

zaś rozrzut od wartości oczekiwanej

$$\sqrt{\text{Var}X} = \sigma.$$

Inaczej mówiąc parametry rozkładu normalnego μ, σ oznaczają jednocześnie charakterystyki liczbowe tego rozkładu, czyli wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe.

Związek pomiędzy dowolnym rozkładem normalnym a rozkładem standardowym ilustruje następujący przykład. Załóżmy, że błąd pomiarowy ma rozkład $N(1, 4)$, czyli dopuszczamy błąd systematyczny. Pytamy się jaki jest procent błędów pomiarowych pomiędzy -2 a 2 . Wówczas

$$P(-2 < X \leq 2) = P\left(\frac{-2 - 1}{4} < U \leq \frac{2 - 1}{4}\right) = \Phi(1/4) - \Phi(-3/4).$$

Korzystając z tablic lub oprogramowania znajdujemy wynik.

Problematyka Podstawowym problem na tym poziomie modelowania probabilistycznego jest odpowiedni dobór rozkładu, czyli dobór miary (prawdopodobieństwa zdarzeń). W tym kontekście statystyka pozwala na weryfikację naszych mniemań odnośnie prawdopodobieństwa przyszłych zdarzeń

analizując dane historyczne. Niemniej trzeba jasno powiedzieć, że w przypadku zdarzeń losowych nigdy nie wiemy na pewno, czy nasz wybór odpowiada prawdzie. Jeśli jesteśmy już skłonni używać jakiegoś modelu z nieznanymi parametrami (choćby dla prostoty) wówczas znowu statystyka pozwala na estymację parametrów (parametru) tego rozkładu. Tutaj czeka nas następna trudność. Musi wybrać pomiędzy różnymi sposobami estymacji.

Zadanie 2. Umiejętność wyznaczania prawdopodobieństwa dla $N(\mu, \sigma)$ w oparciu o tablicę wartości dystrybuanty $N(0, 1)$.

Zadanie 3. Załóżmy, że życie żarówki T z danej partii ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Korzystając z metody momentów (czyli wiedząc, że $ET = 1/\lambda$) na podstawie czasów życia w dniach 10 żarówek: 250, 230, 124, 45, 34, 95, 102, 340, 130, 160 oszacować parametr λ .

3. Proces stanów na przykładzie procesu defaultu

Jest jeszcze jeden ważny przykład zastosowania teorii niezawodności. Ma to miejsce w modelowaniu czasu defaultu dla przedsiębiorstwa. Czas defaultu to moment "śmierci", czyli niewypłacalności przedsiębiorstwa. Rozważmy zatem proces stanów (defaultu, śmierci, uszkodzenia)

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < T(\omega) \\ 1 & T(\omega) \leq t \end{cases}$$

Dla każdego t zmienna losowa X_t przyjmuje dwie wartości: - 0 - oznacza, że nie nastąpił jeszcze moment defaultu oraz - 1 - oznacza, że nastąpił już ten moment. Z definicji widać, że

$$P(X_t = 1) = F(t)$$

zaś

$$P(X_t = 0) = R(t).$$

Dla każdego t zmienna losowa X_t jest tzw. zmienną losową binarną (dwupunktową) określającą sukces 0 lub porażkę 1. Z drugiej strony, mając proces X_t możemy dokładnie odtworzyć czas przeżycia

$$T(\omega) = \inf\{t \geq X_t(\omega) = 1\}.$$

Precyzyjnie, jeśli dany jest proces X_t o trajektoriach niemalejących przyjmujących wartości w zbiorze $\{0, 1\}$, to T jest przyszłym czasem życia. W języku

teorii procesów stochastycznych T jest czasem stopu (Markowa) zaś proces X_t procesem Markowa.

Pamiętajmy, że w praktyce nieznana jest dystrybuanta F . To co obserwujemy, to faktycznie wyniki procesu ilość sukcesu i porażki:

- w medycynie procent skuteczności leczenia
- w finansach procent przedsiębiorst z trudnościami finansowymi
- w badaniach demograficznych procent ludzi, którzy przeżyli 1 rok, 2 lata...

Problem zatem jest prosty, jeśli interesuje nas wyłącznie procent przeżywających do chwili T . Jest tak np. jeśli chcemy wycenić wartość obligacji zerokuponowej o wartości nominalnej 100 i wygasającej w chwili T . Wówczas wystarczy estymować $F(T)$ aby w prosty sposób oszacować wartość takiej obligacji, mianowicie wartość tej obligacji w chwili T jest równa

$$100E(1 - X_T) = 100R(T).$$

Biorąc odpowiednie dyskonto otrzymamy pierwsze przybliżenie wartości takiej obligacji.

Również w badaniach demograficznych Tablice życia są skonstruowane w ten sposób, że podają liczbę osób, które przeżyły 1,2 itd. lat. Zatem mamy estymację wartości funkcji $F(n)$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Zadanie 4. Załóżmy, że w pewnym zakładzie pracy pracuje 1000 kobiet w wieku 40 lat, które przepracowały już 15 lat. Zgodnie z Art. 93 pracodawca w przypadku śmierci będzie musiał wypłacić odprawę pośmiertną. Zakładamy, że pensje będą rosły wraz z inflacją oraz że większość kobiet pójdzie na emeryturę w wieku 65 lat. Ponadto średnia pensja brutto w tej grupie zawodowej wynosi 3000 PLN. Oszacować zobowiązania pracodawcy w okresie zatrudnienia, czyli przez 25 lat.

Kodeks pracy Art. 93.

§ 1. W razie śmierci pracownika w czasie trwania stosunku pracy lub w czasie pobierania po jego rozwiązaniu zasiłku z tytułu niezdolności do pracy wskutek choroby, rodzinie przysługuje od pracodawcy odprawa pośmiertna.

§ 2. Wysokość odprawy, o której mowa w § 1, jest uzależniona od okresu zatrudnienia pracownika u danego pracodawcy i wynosi:

- 1) jednomiesięczne wynagrodzenie, jeżeli pracownik był zatrudniony krócej niż 10 lat,
- 2) trzymiesięczne wynagrodzenie, jeżeli pracownik był zatrudniony co najmniej 10 lat,

3) sześciomiesięczne wynagrodzenie, jeżeli pracownik był zatrudniony co najmniej 15 lat.

4. Niezależność i prawdopodobieństwo warunkowe na przykładzie własności rozkładu wykładniczego

Często zachodzi potrzeba obliczenia rozkładu dalszego trwania życia jeśli zakładamy, że element (osoba) przeżyje s lat. Definicja prawdopodobieństwa warunkowego dla zdarzeń jest następująca

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Zatem prawdopodobieństwo

$$P(T > t + s | T > s) = \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{R(t + s)}{R(s)}.$$

Wiemy, że dla rozkładu wykładniczego z parametrem λ

$$R(t) = \exp(-\lambda t).$$

Stąd wnosimy, że

$$P(T > t + s | T > s) = \exp(-\lambda t) = R(t)$$

lub inaczej

$$(1) \quad R(t)R(s) = R(t + s).$$

Własność tą nazywamy brakiem pamięci rozkładu wykładniczego. Z powyższego wzoru wnosimy bowiem, że jest zupełnie nieistotne jak długo żył wcześniej element. Jego dalszy czas trwania życia jest zawsze taki sam i jest niezależny od czasu który przeżył (tutaj s). Przypomnijmy, że dla zbiorów niezależność oznacza właśnie (1) czyli

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Okazuje się, że jedynym procesem który jest bez pamięci jest rozkład wykładniczy. Wynika to stąd, że jedyną funkcją spełniającą (1) jest funkcja eksponencjalna. Rozkład wykładniczy w pewnym sensie w teorii niezawodności jest generyczny. Badając bowiem rzeczywisty czas trwania życia możemy wyznaczyć trzy okresy:

- okres gwarancyjny (czas ujawniania wad produkcyjnych)
- okres pracy elementów intensywność uszkodzeń w przybliżeniu jest stała
- okres umierania.

Dla ludzi to odpowiednio okresu 0-2 lub 3 lat od 3-65 roku życia i okres szybkiego starzenia powyżej 65 roku życia (modelowanego rozkładem Gomperta jak wyżej).

Zadanie 5. Opracować rozkład łączny oraz rozkłady brzegowe dwóch cech X (np. płeć) i Y (np. umiejętności językowe A1,A2,B1,B2,H-wyższe). Porównać rozkład łączny z rozkładem łącznym otrzymanym z rozkładów brzegowych pod warunkiem, że cechy te są niezależne.

5. Zastosowanie poznanych narzędzi probabilistycznych w ubezpieczeniach na życie

Model dalszego czasu życia dla $x = 45$. Ułamkowy czas trwania życia. Rozkład warunkowy: jednostajny, wykładniczy.

Obliczanie składki jednorazowej dla ubezpieczenia bezterminowego A_x , dla $x = 45$. Obliczanie składki \overline{A}_x .

Obliczanie składki jednorazowej dla renty bezterminowej \ddot{a}_x dla $x = 45$

Wysokość składki netto P_x , dla $x = 45$.

Rezerwy netto, funkcja ryzyka. Podział składki.

6. System nieodwracalny - proces śmierci

Niech E oznacza zbiór złożony z m -niezależnie działających elementów. Zakładamy, że każdy z element z E jest w stanie 1 (działa) albo 0 (nie działa). Działanie systemu określone jest przez niezawodność jego elementów i za pomocą funkcji stanów Ψ ,

$$\Psi : \{0, 1\}^E \rightarrow \{0, 1\}.$$

Zbiór $\{0, 1\}^E$ jest zbiorem wszystkich możliwych stanów elementów systemu E . O funkcji stanów zakładamy, że

$$\Psi(1, \dots, 1) = 1,$$

co oznacza, że system na pewno działa jeśli są sprawne wszystkie jego elementy. Ponadto zachodzi sytuacja odwrotna

$$\Psi(0, \dots, 0) = 0,$$

Funkcja Ψ jest niemalejąca w każdej zmiennej, czyli pogorszenie działania jednego z elementów nie może polepszyć działania systemu E . W teorii niezawodności często bada się funkcję stanów nazywaną strukturę progową k z m . Oznacza to że system działa, jeśli działa co najmniej k z wszystkich m elementów (tzw. statystyka pozycyjna).

Aby zdefiniować wzorem strukturę progową k z m niech wektor $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m) \in R^m$. Niech wektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) = (w_{(1)}, \dots, w_{(m)})$ oznacza uporządkowany nierosnąco ciąg

$$w_{(1)} \geq \dots \geq w_{(m)}$$

utworzony z ciągu w_1, \dots, w_m . Definiujemy funkcję

$$M_m^k(\mathbf{w}) = u_k.$$

Każdemu elementowi $j \in E$ przyporządkowujemy jego proces stanu X_t^j . Wówczas proces systemu E jest zdefiniowany przez

$$\xi_t^S = \Psi(X_t^1, \dots, X_t^m).$$

Dla struktury progowej k z m

$$\xi_t^S = M_m^k(X_t^1, \dots, X_t^m).$$

Z tych rozważań wynika, że funkcja zawodności dla systemu E jest zdefiniowana przez

$$T_S = \inf\{t \in [0, \infty) : \xi_t^S = 0\}.$$

Zauważmy, że struktura progowa m z m oznacza połączenie szeregowie. Możemy bezpośrednio obliczyć T^S mianowicie

$$T^S = \min\{T_1, \dots, T_m\} = M_m^m(T_1, \dots, T_m),$$

gdzie T_j to czas życia j -tego elementu. Z drugiej strony struktura progowa 1 z m jest związana z połączeniem równoległym. Zatem

$$T^S = \max\{T_1, \dots, T_m\} = M_m^1(T_1, \dots, T_m).$$

Wyznaczmy teraz rozkłady dla tych dwóch struktur progowych zakładając, że T_j ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Przypomnijmy że założyliśmy, iż elementy działają niezależnie. Wówczas funkcja zawodności dla max

$$\begin{aligned} P(\max\{T_1, \dots, T_m\} \leq t) &= P(T_1 \leq t, \dots, T_m \leq t) \\ &= P(T_1 \leq t) \cdots P(T_m \leq t) = (1 - \exp(-\lambda t))^m. \end{aligned}$$

Z drugiej strony okazuje się, że rozkład min jest wykładniczy z parametrem $m\lambda$. Obliczamy funkcję niezawodności

$$\begin{aligned} P(\min\{T_1, \dots, T_m\} > t) &= P(T_1 > t) \cdots P(T_m > t) \\ &= (\exp(-\lambda t))^m = \exp(-m\lambda t). \end{aligned}$$

Zauważmy, że precyzyjniejszą informacją dla systemu k z m byłoby określenie ile elementów jeszcze pracuje. Zatem interesuje nas proces $S(t)$, który w chwili t może być w stanie $Z_0, Z_1, \dots, Z_{m-k+1}$, gdzie stan Z_0 oznacza, że wszystkie elementy działają, Z_1 oznacza stan gdzie dokładnie 1 element jest popsuty, itd. Zauważmy, że proces porusza się od stanu do stanu

$$Z_0 \rightarrow Z_1 \rightarrow Z_2 \rightarrow \dots \rightarrow Z_{m-k+1}.$$

Stan Z_{m-k+1} oznacza śmierć. Proces $S(t)$ jest dyskretny. Przed nami stoi problem wyznaczenia prawdopodobieństw

$$P\{S(t) = Z_j\} = p_j(t).$$

Zauważmy, że jest to uogólnienie procesu stanów. W tym momencie możemy nieco rozszerzyć nasz model zakładając, że obok czasu pracy (życia) elementu T_j dany jest jeszcze czas pracy poszczególnego elementu w sytuacji: system działa a element j jest wyłączony. Niech $T_{j,r}$ definiuje czas do uszkodzenia jeżeli element jest wyłączony. Zakładamy, że $T_{j,r}$ ma rozkład wykładniczy z parametrem λ_r . Oczywiście $\lambda_r \leq \lambda$. Ponadto wszystkie zmienne losowe są niezależne. Możemy wyróżnić następujące systemy

(i) rezerwa aktywna $\lambda_r = \lambda$. Wówczas proces $S(t)$ w stanie Z_j ma intensywność uszkodzeń

$$\nu_j = (m - j)\lambda.$$

(ii) rezerwa zimna oznacza, że $\lambda_r = 0$ czyli proces $S(t)$ w stanie Z_j ma intensywność uszkodzeń

$$\nu_j = k\lambda.$$

(iii) rezerwa ciepła. Proces $S(t)$ w stanie Z_j ma intensywność uszkodzeń

$$\nu_j = k\lambda + (m - k - j)\lambda_r.$$

Problem obliczenia prawdopodobieństw $p_j(t)$ prowadzi nas teraz do układu równań. Zauważmy, że jeśli proces w chwili $t + dt$ jest w stanie j , to w chwili t był albo w stanie j albo był w stanie $j - 1$. Proces $S(t)$ zostaje w stanie Z_j wg. rozkładu wykładniczego z parametrem ν_j zaś wychodzi ze stanu Z_{j-1} wg. rozkładu wykładniczego z parametrem ν_{j-1} , zatem

$$p_j(t + dt) \approx p_j(t)(1 - \nu_j dt) + p_{j-1}(t)\nu_{j-1}dt.$$

Uzasadnienie tego wzoru wiąże się z własnością braku pamięci rozkładu normalnego oraz ze wzorem przybliżonym dla małych wartości $|x|$

$$e^x \approx 1 + x.$$

Zatem dla rozkładu wykładniczego trwanie w stanie Z_j w czasie t do $t + dt$

$$R_j(dt) = e^{-\nu_j dt} \approx (1 - \nu_j dt).$$

Z drugiej strony wyjście ze stanu Z_{j-1} do stanu Z_j w czasie t do $t + dt$ wyraża wzór

$$F_{j-1}(dt) = 1 - e^{-\nu_{j-1} dt} \approx -\nu_{j-1} dt.$$

Zatem

$$\begin{aligned} p_j(t + dt) - p_j(t) &\approx p_j(t)\nu_j dt + p_{j-1}(t)\nu_{j-1}dt \\ \frac{p_j(t + dt) - p_j(t)}{dt} &\approx p_j(t)\nu_j + p_{j-1}(t)\nu_{j-1}. \end{aligned}$$

Prowadzi to do układu równań Kołmogorowa

$$p'_j(t) = p_j(t)\nu_j + p_{j-1}(t)\nu_{j-1}$$

z warunkami początkowymi

$$p_0(0) = 1, p_1(0) = 0, \dots, p_m(0) = 0.$$

Rozwiązując ten układ otrzymujemy rozwiązanie. Poniżej zasugerujemy jedną z metod rozwiązania tego układu równań. Zauważmy, że funkcja niezawodności systemu k z m jest równa

$$R_S(t) = \sum_{j=0}^{m-k} p_j(t) = 1 - p_{m-k+1}(t).$$

Warto w tym momencie wprowadzić niezwykle użyteczne narzędzie stosowane w probabilistyce i metodach równań różniczkowo funkcyjnych transformatę Laplace'a

Definicja 2 Transformatą Laplace'a funkcji $f : [0, \infty) \rightarrow R$ wystarczająco regularną jest funkcja

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

gdzie dziedzina s jest tak dobrana aby całka miała sens.

Okazuje się, że niezwykle łatwo znaleźć funkcję R_S w terminach transformaty Laplace'a

Twierdzenie Przy powyższych założeniach

$$\mathcal{L}(R_S)(s) = \frac{(s + \nu_0) \cdots (s + \nu_{m-k}) - \nu_0 \cdots \nu_{m-k}}{s(s + \nu_0) \cdots (s + \nu_{m-k})}.$$

Stosując teraz transformatę odwrotną uzyskujemy rozwiązanie.

7. Proces odnowy

Założmy teraz, że mamy ciąg niezależnych zmiennych losowych oznaczających moment zepsucia elementu bądź układu $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \dots$. Zakładamy, że czas pracy τ_0 do pierwszej awarii jest opisany funkcją zawodności F_A , zaś pozostałe czasy pracy do kolejnej awarii opisuje funkcja zawodności F . Pomijamy rozkład czasu naprawy. Interesować nas będzie proces ilości odnów (awarii) do chwili t oraz czas pracy do n-tej awarii. Funkcje zawodności spełniają założenia z pierwszych rozdziałów zatem niech f_A oznacza gęstość dla F_A zaś f gęstość dla F . Wprowadzamy proces czasu pracy do n-tej awarii

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j.$$

Niech F_n oznacza dystrybuantę zmiennej losowej S_n . Okazuje się, że

Twierdzenie

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-s)f(s)ds$$

oraz

$$f_n(t) = \int_0^t f_{n-1}(t-s)f(s)ds.$$

Powyższe twierdzenie jest konsekwencją następującego faktu, jeśli zmienne losowe X i Y o gęstościach odpowiednio f i g są niezależne, to zmienna losowa $X + Y$ ma rozkład $f * g$, (splot funkcji f i g) dany wzorem

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds.$$

Ponieważ czas pracy jest zmienną losową określoną na $[0, \infty)$, zatem wzór powyższy redukuje się do wzoru

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds.$$

W tym kontekście warto użyć transformaty Laplace'a. Mianowicie dla funkcji wystarczająco regularnych f i g

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Własność ta pozwala często efektywnie obliczyć funkcje gęstości f_n dla $n = 1, 2, \dots$. Jeżeli metody dokładne są trudne do zastosowania można zastosować metody przybliżone. Kluczem jest tutaj twierdzenie Lindenberga-Levy'ego (Moivre-Laplace). Twierdzenie to mówi, że jeśli mamy ciąg $\{X_j\}_j$ zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie o skończonej wartości oczekiwanej $EX_j = \mu$ i wariancji $Var X_j = \sigma^2$, to

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \approx N(\mu, \sigma/\sqrt{n}).$$

Możemy wówczas korzystać z dystrybuanty rozkładu normalnego i z metody standaryzacji (rozdział 2). Używając naszych oznaczeń i zakładając, że rozkład τ_0 jest równy rozkładowi τ_j (tzw. prosty proces odnów)

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{S_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \approx N(0, 1).$$

Możemy zdefiniować teraz proces odnowy. Proces informuje nas rozpatrując scenariusz wydarzeń ω ile będzie odnów do chwili t . Mianowicie

$$\nu(t)(\omega) = \begin{cases} 0 & t < \tau_0(\omega) \\ n & S_n(\omega) \leq t < S_{n+1}(\omega) \end{cases}$$

Zmienna losowa jest dyskretna. Ponadto

$$P(\nu(t) \leq n - 1) = P(S_n > t) = 1 - P(S_n \leq t) = 1 - F_n(t).$$

oraz

$$P(\nu(t) = n - 1) = P(\nu(t) \leq n) - P(\nu(t) \leq n - 1) = F_n(t) - F_{n+1}(t).$$

Może nas interesować nie cały rozkład zmiennej losowej (procesu odnowy) ν tylko wartość oczekiwana liczby odnów (np. aby wiedzieć jaka średnio ilość psujących się elementów jest potrzebna w magazynie)

$$H(t) = E\nu(t).$$

Wprowadzamy również funkcję nazywaną gęstością odnów (o ile ona istnieje)

$$h(t) = H'(t).$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} H(t) = E\nu(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} jP(\nu(t) = j) = \sum_{j=0}^{\infty} j(F_j(t) - F_{j+1}(t)) \\ \sum_{j=1}^{\infty} F_j(t) &= F_A(t) + \sum_{j=2}^{\infty} \int_0^t f(s)F_{n-1}(t-s)ds. \end{aligned}$$

Zmieniając kolejność sumowania z całkowaniem otrzymujemy równanie nazywane równaniem odnowy

$$(2) \quad H(t) = F_A(t) + \sum_{j=2}^{\infty} \int_0^t f(s)H(t-s)ds.$$

Używając pojęcia splotu dostajemy zwartą postać równania

$$(3) \quad H = F_A + f * H.$$

Korzystając z transformaty Laplace'a otrzymamy

$$\mathcal{L}(H) = \mathcal{L}(F_A) + \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(H).$$

Stąd

$$\mathcal{L}(H) = \frac{\mathcal{L}(F_A)}{1 - \mathcal{L}(f)}.$$

Korzystając z metod numerycznych czy analitycznych rozwiązujemy problem.

8. Prosty proces odnów

Obliczymy teraz funkcję $H(t)$ dla prostego procesu odnów. Po pierwsze zróżniczkujemy równanie (2) otrzymamy wówczas

$$h(t) = f(t) + f * h(t).$$

Korzystając z transformaty Laplace'a otrzymamy

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(h).$$

Stąd

$$\mathcal{L}(h) = \frac{\mathcal{L}(f)}{1 - \mathcal{L}(f)}.$$

Ponieważ dla rozkładu wykładniczego

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Zatem

$$\mathcal{L}(h)(s) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}.$$

Korzystając z odwrotnej transformaty Laplace'a otrzymamy

$$h(t) = \lambda \quad \text{oraz} \quad H(t) = \lambda t.$$

Wniosek jest następujący: jeśli awarie zdarzają się wg. rozkładu wykładniczego z oczekiwanym czasem na awarię $\frac{1}{\lambda}$, to oczekiwana ilość odnów do chwili t jest równa λt .