Strategie zabezpieczające Δ

Karol Dziedziul

04.06.2009

Plan prezentacji

- **Model binarny**
- **Model Black Scholesa**
- **Bismut- Elworthy -Li formuła**

Model binarny i opcja call

Niech cena akcji w chwili początkowej wynosi $S_0 = 20$. Załóżmy, że ceny akcji po trzech miesiącach $T = 3/12$ wyznacza zmienna losowa S_T, która przyjmuje dwie wartości: $S_d = 18$ i $S_u = 22$. Zatem przewidujemy, że albo nastąpi wzrost ceny o 20% albo nastapi spadek ceny o 20% z pewnym prawdopodobieństwem. Zakładamy, że na ten okres roczna stopa procentowa (kredytu i depozytu) dla kapitalizacji ciągłej $r = 12\%$. Opcja call to instrument finansowy, który pozwala jego nabywcy kupić akcję za określoną cenę np. $K = 21$, zwaną ceną wykonania. Zazwyczaj dochodzi do rozliczenia opcji. Wystawca opcji musi nabywcy opcji wypłacić kwotę o profilu wypłaty dla opcji call równym

$$(S_T - K)_+ = \begin{cases} S_T - K = 22 - 21 = 1 & \text{o ile} \quad S_u = 22 \\ 0 & \text{o ile} \quad S_d = 18 \end{cases}$$

W ogólności rozważa się wypłatę losową

$$f = \begin{cases} f_u & \text{o ile} \quad S_u \\ f_d & \text{o ile} \quad S_d \end{cases}$$

Miara martyngałowa i wycena opcji call

Wiadomo, że cena europejskiej opcji call jest równa

$$C = \frac{E^Q[(S_T - K)_+]}{e^{rT}}.$$

Dla losowego instrumentu f

$$C(f) = \frac{E^Q[f]}{e^{rT}}.$$

Miara Q jest miarą martyngałową jednoznacznie wyznaczoną z równań

$$\begin{cases} \frac{E^Q[S_T]}{e^{rT}} = 22q_1 e^{0,12*3/12} + 18q_2 e^{0,12*3/12} = 20 = S_0, \\ q_1 + q_2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Stąd $q_1 = 0,652$ zaś $q_2 = 0,348$ zaś cena opcji call $C = 0,633$.

Δ dla opcji binarnych

Wystawca opcji call (czy ogólnie losowego instrumentu o profilu wypłaty f) dostaje zatem kwotę $C = 0,633$ (C(f)) + marża. Kwota C musi wystarczyć do zabezpieczenia jego pozycji. Wystawca opcji MUSI kupić Δ akcji

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d} = \frac{1}{4}.$$

Potrzebuje zatem $\Delta * 20 = 5$. Ponieważ otrzymał $C = 0,633$ na rynku pieniężnym pożycza $5 - 0,633 = 4,367$. Jego portfel składa się z: 1 short call, long Δ akcji i pożyczki $4,367$. Zauważmy, że wartość portfela 1 short call, long Δ akcji po trzech miesiącach jest stała i równa kwocie należności wymagalnej przez pożyczkodawcę $4,367 * e^{0,123/12} = 4,5$ gdyż

$$-f_u + \Delta S_u = -f_d + \Delta S_d = 4,5.$$

Pieniądze te ściągamy z rynku akcji i oddajemy. Zrobiliśmy doskonałe zabezpieczenie.

Model Blacka Scholesa

Definicja

Rozważamy rynek akcji, gdzie cena akcji o wartości początkowej S_0 opisana jest równaniem

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), t \in [0, T].$$

Ponadto wartość pieniądza rośnie wg. rocznej stopy procentowej dla kapitalizacji ciągłej r stałej w okresię $[0, T]$.

Potrzeba znaleźć miarę martyngałową Q wg. której zdyskontowany proces cen jest martyngałem. Można pokazać, że miara

$$\frac{dQ}{dP} = exp(\frac{r-\mu}{\sigma} W_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T)$$

jest probabilistyczna i równoważna mierze P. Proces

$$W_t^* = W_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t$$

jest Q procesem Wienera.

Wycena opcji w modelu Blacka Scholesa

Korzystając z formuły ITO zdyskontowany proces cen $S_t^* = S^t / e^r t$ spełnia równanie

$$dS_t^* = \sigma S_d^* dW_t^*,$$

czyli jest Q-martyngałem.

Twierdzenie

Niech $f(S_T)$ będzie opcją taką, że $E^Q[f(S_T)]^2 < \infty$. Wówczas wartość opcji w chwili t jest równa $C_t = F(t, S_t)$, gdzie

$$F(t,x) = e^{-r(T-t)} E^Q[f(xe^{r(T-t)} e^{\sigma\xi\sqrt{T-t} - \sigma^2(T-t)/2})],$$

zaś $\xi \in N(0,1)$. W szczególności $C_0 = e^{-rT} E^Q f(S_T)$. Ponadto dynamika zdyskontowanego procesu $C_t^* = C_t / e^{rt}$ dana jest równaniem

$$dC_t^* = \frac{\partial F(t, S_t^*)}{\partial x} dS_t^* \tag{2}$$

czyli C_t^* jest martyngałem.

Hedging Δ w modelu Blacka Scholesa

Ponieważ
$$dC_t^* = \frac{\partial F(t, S_t^*)}{\partial x} dS_t^*$$
zatem aby zabezpieczyć swoje pozycje należy stosować strategie $\Delta(t, S_t)$
$$\Delta = \frac{\partial F(t, S_t^*)}{\partial x},$$
czyli jeśli oznaczymy $S_0 = x$ zaś proces cen S_t^x, to w chwili zero
$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} e^{-rT} E^Q[f(S_T^x)]$$

Hedging Δ w modelu ogólnym

Załózmy, że cena akcji opisana jest równaniem wzgl. miary martyngałowej Q

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t$$

funkcje $a, b : R \to R$ odpowiednio regularne. Wartość poczatkowa $X_0 = x$. Rozwiązanie będziemy oznaczać przez X_t^x. Dla prostoty zakładamy, że $r = 0$.
Jak już zauważyliśmy strategia zabezpieczająca wymaga od wystawcy opcji $g(X_T^x)$ kupienia Δ akcji, gdzie

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} E^Q[g(X_T^x)|\mathcal{F}_{\{}].$$

Problem polega na tym, że procedury numeryczne są niestabilne jeśli

$$\Delta \approx \frac{1}{\epsilon N} \sum_{j=1}^{N} (g(X_{j,T}^{x+\epsilon} - g(X_{j,T}^{x})),$$

gdzie parametr j oznacza niezależne kopie.

Narzędzia potrzebne do rozwiązania problemu

- **Izonormalny proces Wienera**
- **Proces Wienera w przestrzeń Hilberta**
- **Rachunek Malliavin**
- **Całka stochastyczna Ito wzgl. uogólnionego procesu Wienera + całka Bochnera**

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ