Lista 1

Zad.1 Pokazać, że

$$i^{(m)} - d^{(m)} = \frac{i^{(m)}d^{(m)}}{m}$$

Zad.2 Pokazać, że

$$d < d^{(2)} < ... < d^{(m)} < .. < \delta < ... < i^{(2)} < i$$

oraz

$$i^{(m)} - d^{(n)} \leqslant \frac{i^2}{\min(m,n)}$$

Zad. 3 Spółka musi wykupić obligacje, które wyemitowała w pięciu rocznych płatnościach po 15000. Pierwszą płatność zaplanowano 31 grudnia 1999. By zgromadzić pieniądze na ten cel od dnia 1 stycznia 1990 wpłaca na konto co rok pewną kwotę X. Ostatnia wpłata jest planowana 1 stycznia 1999. Zakładając, że efektywna roczna stopa procentowa wynosi 6 % obliczyć X.

Zad. 4 Niech j oznacza nominalną roczną stopę procentową o kapitalizacji półrocznej. Wartość zaktualizowana nieskończonego ciągu płatności 1 jednostki wpłacanej co dwa lata począwszy od końca drugiego roku wynosi 5,89. Obliczyć j.

Zad. 5 Dany jest nieskończony ciąg płatności-co rok począwszy od końca pierwszego roku równy: $(1+k), (1+k)^2, (1+k)^3$...Zakładając, że efektywna roczna stopa procentowa wynosi 4% oraz wartość zaktualizowana wynosi 51 obliczyć k.

Zad. 6 Dana jest obligacja 10 letnia o wartości nominalnej 100, o kuponach półrocznych oprecentowanych rocznie 10% wartości nominalnej. Cena obligacji wynosi 94. Stopa procentowa dla 10 letniej obligacji zero kuponowej wynosi 12%. Wyznaczyć stopę procentową dla kuponów zakładając, że jest ona jednakowa.

Zad. 7 Pożyczka 4000 ma zostać oddana w ciągu 30 lat w postaci rosnącego strumienia pieniędzy. Pierwsza płatność przewidziana jest pod koniec 1 roku i wynosi k. Następna $2k$, $3k$ itd. Efektywna roczna stopa procentowa wynosi 4%. Obliczyć wielkość pożyczki, którą należy spłacić po 9 latach.

Zad. 8 Obligacja(kupon skarbowy) roczna o wartości nominalnej 100 kosztuje 98,51. Ma ona kupony półroczne oprocentowane 4% w skali roku wartości nominalnej. Obliczyć stopę procentową nominalną roczną dla kapitalizacji półrocznej użytą do wyceny obligacji.

Lista 2

Wprowadzamy oznaczenia związane z Tablicami życia. Niech l_0 oznacza liczbę nowo narodzonych zaś l_x liczbę tych którzy dożyli do wieku x. „Prawdopodobieństwo" przeżycia

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0},$$

czyli

$$_tp_x = \frac{s(x+t)}{s(x)} = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Niech d_x oznacza liczbę śmierci w przedziale $(x, x+1)$ czyli

$$d_x = l_x - l_{x+1}.$$

Ponadto

$$L_x = \int_x^{x+1} l_y dy = \int_0^1 l_{x+t} dt$$

$$m_x = \frac{d_x}{L_x}$$

Zad.1 Niech

$$_tp_x = \frac{100 - x - t}{100 - x}$$

dla $0 \leqslant x < 100$ i $0 \leqslant t < 100 - x$. Wyznaczyć μ_{45} i μ_x.

Zad.2 Niech

$$_tp_x = 1 - \left(\frac{t}{100}\right)^{1,5}$$

dla $x = 60$ i $0 < t < 100$. Wyznaczyć $E[T(x)]$.

Zad. 3 Niech

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{85 - t} + \frac{3}{105 - t}$$

dla $0 \leqslant t < 85$. Wyznaczyć $_{20}p_x$.

Zad.4 Niech

$$_tp_x = \left(\frac{1 + x}{1 + x + t}\right)^3$$

dla $t > 0$. Wyznaczyć średni czas życia dla x.

Zad.5 Pokazać, że

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_tp_x dt}.$$

Zad.6 Przy założeniu Balducci pokazać, że

$$m_x = \frac{-q_x^2}{p_x \ln p_x}.$$

Zad. 7 Niech μ_{x+t} jest stałe dla $0 \leqslant t < 1$ i $q_x = 0,16$. Znaleźć t takie, że ${}_tp_x = 0,95$.

Zad. 8 Załóżmy, że funkcja $l_x\mu_x$ jest stała dla $0 \leqslant x \leqslant \omega$, gdzie $\omega = 100$. Parametr ω oznacza maksymalny czas życia. Wyznaczyć $VarT(x)$ dla $x = 88$.

Lista 3

Zad. 1 Dane $l_x = (121 - x)^{0,5}$ dla $0 < x < 121$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba w wieku $x = 21$ umrze w przedziale wieku od 40 do 57.

Zad. 2 Udowodnić formułę $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$.

Zad. 3 Dane jest $e_{75} = 10,5$, $e_{76} = 10$ i $e_{77} = 9,5$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że osoba w wieku 75 przeżyje conajmniej do wieku 77. Wskazówka: użyć formuły $e_x = p_x(1 + e_{x+1})$.

Zad. 4 Śmiertelność ma rozkład de Moivra z $E[T(16)] = 36$. Wyznaczyć $VarT(16)$.

Zad. 5 Dane $x = 30$ oraz

$${}_tp_x = \frac{7800 - 70t - t^2}{7800},$$

gdzie $0 \leqslant t \leqslant 60$. Wyznaczyć $q_{50} - \mu_{50}$.

Zad. 6 Dane

$${}_tp_x = \left(\frac{100 - x - t}{100 - x}\right)^2,$$

gdzie $0 \leqslant t < 100 - x$. Wyznaczyć $VarT(x)$.

Zad. 7 Niech $q_x = 0,42$. zakładamy zał (2), czyli ułamkowy czas życia ma stałą intensywność od x do $x + 1$. Wyznaczyć m_x.

Zad. 8 Niech Xi Y niezależne nieujemne zmienne losowe o gęstościach odpowiednio f_X, f_Y. Wyprowadzić wzór na $P(X > Y)$.

Zad. 9 Rozważamy czas życia dwóch niezależnych osób: palacej i niepalącej. Dana jest intesywność życia μ_x dla osoby niepalącej $0 \leqslant x \leqslant \omega$ i dla osoby palącej $c\mu_x$, $0 \leqslant x \leqslant \omega$ gdzie $c > 1$. Parametr ω oznacza maksymalny czas życia. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoba paląca żyje krócej niż osoba niepląca.

Zad. 10 Niech $\mu_x = kx$, $x > 0$, stała $k > 0$ i ${}_{10}p_{35} = 0,81$.Obliczyć ${}_{20}p_{40}$.

Zad. 11 Dane $l_x = 1000(\omega^3 - x^3)$, $0 \leqslant x \leqslant \omega$. Wyznaczyć $VarT(0)$.

Lista 4

Zad.1 Dane jest

$$S(x) = 1 - \frac{x}{100}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 100$$

oraz $\delta = 0,1$. Wyznaczyć $50000\overline{A}_{30}$.

Zad.2 Pokazać, że

$$\frac{(IA)_x - A^1_{x:\overline{1}|}}{(IA)_{x+1} + A_{x+1}} = vp_x.$$

Zad.3 Niech Z_1 oznacza ubezpieczenie na życie i dożycie wypłacane po n latach lub w momencie śmierci $T < n$ dla (x) w kwocie 1, natomiast Z_2 ubezpieczenie terminowe na życie dla tej samej osoby do chwili n wypłacane w momencie śmierci kwotę 1. Wiedząc, że $Var(Z_2) = 0,01$, $v^n = 0,3$, ${}_np_x = 0,8$, $EZ_2 = 0,04$. Obliczyć $VarZ_1$.

Zad.4 Dla $i = 5\%$ użyć tablic życia do wyznaczenia $A_{45:\overline{20}|}$.

Zad.5 Dane jest $A_{x:\overline{n}|} = u$, $A^1_{x:\overline{n}|} = y$, $A_{x+n} = z$. Wyznaczyć A_x jako funkcje u, y, z.

Zad.6 Wyznaczyć składkę netto ubezpieczenia na życie (ubezpieczenie dożywotnie) dla $x = 50$ wiedząc, że $i = 0,01$, kwota wypłacana w momencie śmierci $C_t = 100 - 0,1t^2$ oraz rozkład czasu życia jest rozkładem de Moivre'a.

Zad.7 Załóżmy, że intensywność śmiertelności jest stała w wynosi μ oraz δ jest stałą stopą procentową dla kapitalizacji ciągłej. Wyznaczyć $Varv^T$ jako funkcję parametrów μ oraz δ.

Zad.8 Wiedząc, że $q_{[x]} = 0,5q_x$ dla $x \geqslant 0$ pokazać, że

$$A_x - A_{[x]} = 0,5vq_x(1 - A_{x+1}).$$

Okres selekcji wynosi 1 rok, czyli $q_{[x]+1} = q_{x+1}$.

Lista 5, Funkcje komutacyjne

Zad.1 Niech

$$D_x = v^x l_x$$

oraz

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots$$
$$S_x = N_x + N_{x+1} + N_{x+2} \ldots$$

Pokazać, że

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$
$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$
$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}.$$
$$(I\ddot{a})_x = \frac{S_x}{D_x}$$

Zad.2 Niech

$$C_x = v^{x+1} d_x, \quad d_x = l_x - l_{x+1}$$
$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots$$
$$R_x = C_X + 2C_{x+1} + 3C_{x+3} \cdots = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots.$$

Pokazać, że

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$
$${}_{m|}A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$
$$(IA)_x = \frac{R_x}{D_x}$$
$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$
$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$
$$(IA)^1_{x:\overline{n}|} = \frac{R_x - R_{x+n} - nM_{x+n}}{D_x}$$

Zad.3 Polisę terminową na 10 lat wystawiono dla x z świadczeniem płatnym na końcu roku w którym nastąpi śmierć wg. stawek

10; 10; 9; 9; 9; 8; 8;8; 8;7. Wyrazić stawkę za pomocą funkcji komutacyjnych.

Lista 6

Zad.1 Obliczyć $\ddot{a}^{(2)}_{40:\overline{30}|}$ przy założeniu liniowości (a) oraz $i = 5\%$. Dane: $N_{40} = 22002680$, $N_{70} = 1973548$, $D_{40} = 1322891$,$v^{30} = 0,2314$, $l_{70} = 6616235$, $l_{40} = 9313144$

Zad.2 Pokazać, że

$$\frac{(I\ddot{a})_x - \ddot{a}_{x:\overline{1}|}}{(I\ddot{a})_{x+1} + \ddot{a}_{x+1}} = a_{x:\overline{1}|}.$$

Zad. 3 Niech $(\overline{I}_{\overline{n}|}\overline{a})_x = EY$, gdzie renta

$$Y = \begin{cases} (\overline{I}\overline{a})_{\overline{T}|} & \text{dla } 0 \leqslant T < n \\ (\overline{I}\overline{a})_{\overline{n}|} + n({}_{n|}\overline{a}_{\overline{T-n}|}) & \text{dla } T \geqslant n \end{cases}$$

oraz

$$\overline{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T v^t dt,$$

$$(\overline{I}\overline{a})_{\overline{T}|} = \int_0^T tv^t dt,$$

$${}_{n|}\overline{a}_{\overline{T-n}|} = \int_n^T v^t dt,$$

o ile $T > n$. Narysować intensywność wpłat renty Y. Ponadto wiedząc, że $\mu_x = 0,04$ dla x, $\delta = 0,06$ wyznaczyć $\frac{\partial}{\partial n}\overline{I}_{\overline{n}|}\overline{a})_x$.

Zad. 4 Wyprowadzić wzór na rentę terminową n letnią o stałej intensywności jeden

$$\overline{a}_{x:\overline{n}|} = E\int_0^{T\wedge n} v^t dt =?$$

w zależności od $\overline{a}_x$, $\overline{a}_{x+n}$.

Zad. 5 Wystawiono 3-letnią rentę terminową dla x

t	$wypata$	p_{x+t}
0	2	0,80
1	3	0,75
2	4	0,50

Wyznaczyć wariancję wypłat renty dla $v = 0,9$.

Zad. 6 Dane $l_x = 100000(100 - x)$, $0 \leqslant x \leqslant 100$ oraz $i = 0$ Wyznaczyć $(I\overline{a})_{95}$.

Zad. 7 Wyprowadzić wzór na ${}_{k|}\ddot{a}^{(m)}_{x:\overline{n}|}$ korzystając z funkcji komutacyjnych

Zad.8 Korzystając z funkcji komutacyjnych + założenie (a) pokazać, że

$$(I\ddot{a})^{(m)}_{x:\overline{n}|} = \alpha(m)\frac{S_x - S_{x+n} - nN_{x+n}}{D_x} - \beta(m)\frac{N_x - N_{x+n} - nD_{x+n}}{D_x}.$$

Zad 9 Korzystając z zadania 8 obliczyć $(I\ddot{a})^{(12)}_{70:\overline{10}|}$, wiedząc, że $\alpha(12) = 1,00028$ $\beta(12) = 0,46812$ oraz

x	69	70	71	72	$\cdot$	79	80	81	82
S_x	77,938	67,117	57,520	49,043	$\cdot$	13,483	10,875	8,691	6,875

Lista 7

Zad. 1 Pokazać, że

$${}_np_x d\ddot{a}_{\overline{n}|} + \sum_{k=0}^{n-1}(1 - v^{k+1})_k p_x q_{x+k} = 1 - A_{x:\overline{n}|}.$$

Zad. 2 Niech Y oznacza rentę terminową, czyli $\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = EY$. Udowodnić, że

$$VarY = \frac{M(-2\delta) - (M(-\delta))^2}{d^2},$$

gdzie $M(u) = Ee^{u((K+1)\wedge n)}$ jest funkcją momentów zmiennej losowej $\min(K+1, n)$.

Zad. 3 Niech Y oznacza rentę dożywotnią dla x. Obliczyć wariancję Y jeśli $\ddot{a}_x(i) = 10$ dla $i = 1/24$, $\ln(1+i) = \delta$ oraz $\ddot{a}_x = 6$ dla stopy procentowej 2δ.

Zad. 4 Niech $i = 3\%$ oraz

x	27	28	29	30	31
S_x	1,868	1,767	1,670	1,577	1,488

Wyznaczyć M_{28}.

Zad. 5 Niech $i = 3\%$ oraz

x	72	73	74	75
$\ddot{a}_x$	8,06	7,73	7,43	7,15

Wyznaczyć p_{73}.

Zad. 6 Dane $l_x = 10000(100 - x)$, $0 \leqslant x \leqslant 100$ $i = 0$. Wyznaczyć jednorazową składkę netto dla renty $x = 80$. Renta płacona jest w sposób ciągły z intensywnością 1 w pierwszym roku w następnych latach z intensywnością 2.

Lista 8

Oznaczenia

$$P(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}, \quad gdzie \quad L = v^T - P(\overline{A}_x)\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

$$\overline{P}(A_x) = \frac{A_x}{\overline{a}_x}, \quad gdzie \quad L = v^{K+1} - \overline{P}(A_x)\overline{a}_{\overline{T}|}$$

$$\overline{P}(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\overline{a}_x}, \quad gdzie \quad L = v^T - \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{\overline{T}|}$$

$${}_nP_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \quad gdzie \quad L = v^{K+1} - {}_nP_x\ddot{a}_{\overline{(K+1)\wedge n}|}$$

$${}_nP(\overline{A}_x) = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \quad gdzie \quad L = v^T - {}_nP(\overline{A}_x)\ddot{a}_{\overline{(K+1)\wedge n}|}$$

$$P(\overline{A}_{x:\overline{n}|}) = \frac{\overline{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}, \quad gdzie \quad L = v^{T\wedge n} - P(\overline{A}_{x:\overline{n}|})\ddot{a}_{\overline{(K+1)\wedge n}|}$$

Zad 1. Ubezpieczenie na dożycie =1 płacone jest po n-tach z tym, że jeśli śmierć nastąpi w ciągu n-lat wpłata na rzecz ubezpieczenia+koszty będzie zwrócona w całości bez odsetek pod koniec roku w którym nastąpi śmierć. Składki są płacone co rok. Opłaty stałe są równe 40% rocznej składki. Wyznaczyć składkę.

Zad 2. Dane ${}_{20}P_{25} = 0,046$, $P_{25:\overline{20}|} = 0,064$, $A_{45} = 0,64$. Obliczyć $P^1_{25:\overline{20}|}$

Zad 3. Niech $L = v^{K+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{K+1}}$ oraz $L^* = v^{K+1} - G\ddot{a}_{\overline{K+1}}$, gdzie $EL = 0$, $EL^* = -0,2$ i $VarL = 0,3$.Wyznaczyć $VarL^*$.

Zad 4. Korzystając z tablic, życia (i=5%) obliczyć składkę dla polisy bezterminowej dla $x = 25$. Składka płacona jest z góry co rok przez 10 lat. Świadczenie wypłacane jest pod koniec roku w którym nastąpiła śmierć. Początkowa kwota świadczenia wynosi 50 000 i rośnie o 5000 co 5 lat aż do kwoty 75 000 i dalej od 50 roku życia jest stała.

Zad 5. Dane i, A_x oraz założenie (a). Wyznaczyć wzór na $\overline{P}(\overline{A}_x) - P(\overline{A}_x)$.

Zad 6. Wiedząc, że $\delta = const$ i $\mu_{x+t} = \mu$, $t > 0$ pokazać, że dla $L = v^T - \overline{P}(\overline{A}_x)\overline{a}_{\overline{T}|}$, $VarL = \frac{\mu}{2\delta+\mu}$.

Zad 7. Wyznaczyć składkę ${}_nP_x$ w zależności od A_x, A_{x+n}, d, ${}_np_x$.

Zad 8. Dane $A_x = 0,25$ $A_{x+20} = 0,40$, $A_{x:\overline{20|}} = 0,55$, $i = 0,03$ + założenie (a). Wyznaczyć $1000P(\overline{A}_{x:\overline{20|}})$

Zad.9 Wystawiono następujące ubezpieczenie. Rodzina x'a dostanie kwotę 10000 pod koniec roku śmierci, jeśli śmierć nastąpi w ciągu pierwszych 20 lat plus zwrot całej wpłaconej składki jednorazowej netto P, która jest nieoprocentowana lub 20000 jeśli śmierć nastąpi po 20 latach. Wyznaczyć P (od funkcji komutacyjnych)

Lista 9

Zad 1. Pokazać, że

$$1 - \frac{\left(P_{30:\overline{15|}} - {}_{15}P_{30}\right)\ddot{a}_{30:\overline{15|}}}{v^{15}{}_{15}p_{30}} = A_{45}.$$

Zad 2. Dane $\overline{A_x} = 0,3$, $\delta = 0,07$. Oblicz składkę płaconą dwa razy do roku na ubezpieczenie dożywotnie wypłacające świadczenie 1000 w momencie śmierci. Zastosować założenie (a).

Zad 3. Niech $d = 0,08$. Wystawiono dwie polisy bezterminowe na życie A i B dla x. Polisa A: świadczenie =4, składka=0,18, wariancja=3,25. Polisa B: świadczenie =6, składka=0,22. Obliczyć wariancję.

Zad 4. Polisę bezterminową wystawiono dla x z kwotą ubezpieczenia 10 000. Składka płacona jest przez 20 lat na początku każdego roku, świadczenie płacone pod koniec roku w którym nastąpi śmierć. Świadczenie składa się z 10 000+ połowa składki wpłaconej w ostatnim roku. Pokazać, że składka jest równa

$$\frac{10000A_x}{(1 + d/2)\ddot{a}_{x:\overline{20|}} - (1 - v^{20}{}_{20}p_x)/2}.$$

Zad 5. Wystawiono 20-letnią polisę terminową nz życie i dożycie dla osoby w wieku $x = 35$. Świadczenie wynosi 1000 i jest płacone pod koniec roku w którym nastąpi śmierć. Składki płacone są na początku roku. Pod koniec 5 roku ubezpieczenie przekształcono w bezterminowe ubezpiezpieczenie na życie przeznaczając rezerwę na składkę jednorazową (netto). Wyznaczyć wielkość świadczenia. Posłużyć się tablicami życia. Wyznaczyć rezerwę ${}_5V_{35:\overline{20|}}$.

Zad 6. Dane ${}_nV_x$, ${}_nV_{x+n}$. Pokazać, że ${}_{2n}V_x = 1 - (1 - {}_nV_x)(1 - {}_nV_{x+n})$

Zad 7. Dane $\overline{a}_{40} = 20$, $\overline{a}_{60} = 12,25$. Wyznaczyć ${}_{20}\overline{V}(\overline{A}_{40})$, gdzie rezerwa utworzoną pod koniec k roku dla ubezpieczenia bezterminowego na życie, ze świadczeniem 1 płaconym w chwili śmierci, składki płacone w sposób ciągły oznaczamy przez ${}_k\overline{V}(\overline{A}_{40})$

Zad 8. Wystawiono 3-letnią polisę na życie i dożycie. W tabeli podano wielkość wypłaty świadczenia w przypadku śmierci

k	C_{k+1}	q_{x+k}
0	2	0,2
1	3	0,25
2	4	0,5

Składki w wysokości 1 płacone są przez 3 -lata na początku roku. Po trzech latach wypłacana jest zgromadzona rezerwa $i = 1/9$ Obliczyć rezerwy w kolejnych latach zakładdając, że ${}_0V = 0$. Zastosować wzór rekurencyjny.

Zad 9. Dane są $i = 0,06$, $q_x = 0,65$, $q_{x+1} = 0,85$, $q_{x+2} = 1$. Wyznaczyć ${}_1V_x$. Wskazówka, użyć wzoru rekurencyjnego dla $\ddot{a}_{x+2}$ względem $\ddot{a}_x$.

Zad 10. Wystawiono polisę dożywotnią 1.05.1978 roku. dla $x = 60$. Kwota świadczenia 1000, $i = 6\%$, q_{70}, $1000{}_{10}V_{60} = 231,14$, $1000P_{60} = 33$, $1000{}_{11}V_{60} = 255,40$ oszacować rezerwy 31 grudnia 1988.

Zad 11. Dla $x = 35$ wystawiono polisę bezterminową na życie odroczoną o 20 lat. Wielkość świadczenia 1. Składki płacone na początku roku co najwyżej przez 20 lat. Użyć rozkład życia z tablic dla $i = 5\%$. Obliczyć rezerwy po 10 latach.

Zad 12. Dane jest ${}_{k|}q_x = (0,5)^{k+1}$ czyli ${}_kp_xq_{x+k} = (0,5)^{k+1}$. Pokazać, ze wariancja funkcji straty

$$L = v^{K+1} - P_x\ddot{a}_{\overline{K+1|}}$$

jest równa

$$VarL = \frac{v^2}{2(2-v^2)} \quad gdzie \quad v = \frac{1}{1+i}.$$

Zad 13. Użyć rozkład życia z tablic dla $i = 5\%$. Obliczyć $1000{}_{15}V_{45:\overline{20|}}$

Zad 14. Użyć rozkład życia z tablic dla $i = 5\%$. Obliczyć $1000{}_{15}V^{1}_{45:\overline{20|}}$

Zad 15. Korzystając z danych z zadania 8 obliczyć wariancję strat Λ_1 w drugim roku.

Lista 10

Zad 1. Rozważamy model z dwoma szkodliwościami o intensywności $\mu_{1,x+t} = 0,01$ oraz $\mu_{2,x+t} = 0,02$, $t \geqslant 0$. Wyznaczyć $q_{1,x}$.

Dane (do zad 2,3) są $\mu_{j,x+t} = \frac{j}{150}$, $j = 1, 2, 3$, $t \geqslant 0$ gdzie 1 oznacza śmierć w środkach komunikacji miejskiej, 2 oznacza nieszczęśliwy wypadek, 3 inny powód niż wymieniony.

Zad 2. Wyznaczyć rozkład warunkowy $P(T < t|J = j)$ oraz $E[T|J = j]$, $E[T|J]$.

Zad 3. Wyznaczyć rozkład warunkowy $P(J = j|T = t)$ oraz $E[J|T = t]$, $E[J|T]$.

Zad 4. Niech 1 oznacza śmierć w środkach komunikacji miejskiej, 2 oznacza nieszczęśliwy wypadek, 3 inny powód niż wymieniony. Dane $\mu_{1,x+t} = 0,01$, $\mu_{2,x+t} = 0,03$, $\mu_{3,x+t} = 0,03$, $\delta = 0,03$. Wyznaczyć składkę na ubezpieczenie bezterminowe wypłacające 3000 z powodu 1, 2000 z powodu 2, oraz 1000 z powodu 3 w momencie śmierci. Składka jest płacona w sposób ciągły.

Zad 5. Rozważamy model z dwoma szkodliwościami o intensywności $\mu_{1,x+t} = 1$ oraz $\mu_{2,x+t} = \frac{t}{t+1}$, $t \geqslant 0$. Wyznaczyć

$$m_x = \frac{q_x}{\int_0^1 {}_tp_x dt}$$

Zad 6. Rozważamy dwuletnią polisę terminową wypłacającą w momencie śmierci kwotę 2 z powodu nieszczęśliwego wypadku lub kwotę 1 z innego powodu. Odpowiednie intensywności $\mu_{1,x+t} = t/20$ oraz $\mu_{2,x+t} = t/10$, $t \geqslant 0$, $\delta = 0$. Wyznaczyć jednorazową składkę netto.

Zad 7. Rozważamy model z trzema szkodliwościami o intensywnościach $\mu_{1,30+0,2} = 0,20$ oraz $\mu_{2,30+0,4} = 0,10$, $\mu_{3,30+0,8} = 0,15$, Zakładamy jednostajny rozkład w ciągu roku dla każdej szkodliwości. Wyznaczyć q_{30}.

Zad 8.

x	$q_{1,x}$	$q_{2,x}$	p_x
25	0,01	0,15	0,84
26	0,02	0,10	0,88

Dla grupy 10 000 osób w wieku $x = 25$ lat wyznaczyć /srednią liczbę osób którzy przeżyją pierwszy rok i nieprzeżyją z powodu przyczyny 1 w następnym roku.

Lista 11

Rozpatrujemy czas życia $T(x), T(y)$ dwóch niezależnych osób x, y. Ich rozkład na $[0,\infty)^2$ jest iloczynem gęstości brzegowych. Korzystając z interpretacji geometrycznej wyprowadzić wzór na prawdopodobieństwa z zadań od 1 do 3 (czyli pola) używając funkcji niezawodności ${}_tp_x$ oraz ${}_tp_y$ oraz intensywności μ_{x+t}, μ_{y+t}. Następnie korzystając z tablic

x	q_x
80	0,50
81	0,75
82	1

życia + założenie o liniowości przeprowadzić konkretne rachunki.

Zad 1.Obliczyć

$$ {}_nq^{\,1}_{x:y} = P(T(x) < T(y), T(x) < n) $$

$$ {}_nq_{x:\overset{1}{y}} = P(T(y) < T(x), T(y) < n) $$

oraz $q^{\,1}_{80:81} = {}_1q^{\,1}_{80:81}$

Zad 2. Obliczyć ${}_nq_{x:y}$ korzystając z ${}_nq^{\,1}_{x:y}$ oraz ${}_nq_{x:\overset{1}{y}}$. Następnie obliczyć $q_{80:81}$ oraz $q_{\overline{80:81}}$.

Zad 3. Obliczyć

$$ {}_nq^{\,2}_{x:y} = P(T(y) < T(x), T(x) < n) $$

i analogicznie

$$ {}_nq_{x:\overset{2}{y}} = P(T(x) < T(y), T(y) < n) $$

oraz $q_{80:\overset{2}{81}} = {}_1q_{80:\overset{2}{81}}$

Zad 4. Dane: $\delta = 0,055$, $\mu_{x+t} = 0,045$, $t > 0$ oraz $\mu_{y+t} = 0,045$, $t > 0$ wyznaczyć $\overline{A}^{\,2}_{xy}$.

Zad 5. Intensywnośćśmiertelności osób palących jest dwa razy większa niż osób niepalacych wyznaczyć $e_{55:65}$ dla osoby palącej (55) i niepalącej (65). Zakładamy, że dla osób niepalących $s(x) = 1 - x/75$, $0 \leqslant x \leqslant 75$.

Zad 6. Wystawiono polisę dla (x) i (y). W momencie drugiej śmierci jest wypłacana kwota 10 000. Składka jest płacona w sposob ciągły do momentu drugiej śmierci. Składka ma stałą intensywność c o ile żyje (x) i jest obniżona do $0,5c$ w przeciwnym wypadku. Zakładamy, ze warunek $EL = 0$, czyli średnio biorąc korzyści rónoważą składkę.

Dane $\delta = 0,05$, $\overline{a}_x = 12$, $\overline{a}_y = 15$, $\overline{a}_{x:y} = 10$

Przykłady zadań egzaminacyjnych

Zad. Dane są

$$P(IA)_x = 0,473 \qquad P(IA)_{x+20} = 0,652 \qquad P_{x+\overline{20}|}^{\ 1} = 0,0273 \qquad P_{x+20} = 0,0487$$

$$\ddot{a}_x = 17,43 \qquad \ddot{a}_{x:\overline{20}|} = 13,27 \qquad \ddot{a}_{x+20} = 11,47$$

Wyznacz $P(IA)^1_{x:\overline{20}|}$.

Zad. Rozważamy ciągły model 20-letniego ubezpieczenia na dożycie z sumą ubezpieczenia 10000. Składka jest płacona przez cały okres ubezpieczenia z malejącą intensywnością

$$\pi(t) = P(1 - \frac{\overline{a}_{x:\overline{t}|}}{\overline{a}_{x:\overline{20}|}}) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 20.$$

Wyznaczyć P, jeśli ubezpieczeni są z populacji o wykładniczym rozkładzie czasu trwania życia, $\mu = 0,03$, stopa procentowa dla kapitalizacji ciągłej wynosi $\delta = 0,02$