

Algorytmy obliczeń symbolicznych

(Faktoryzacja operatorów i zastosowania)

S. Leble Podziękowania dla studentów i doktorantów (głównie
Agnieszki Czuper,
Krzysztofa Mielewczyka i
Sebastiana Bielskiego)
za istotną pomoc przy tworzeniu tekstu notatek do tego wykładu.

Gdańsk, nowa redakcja S. Leble, wrzesień 2013, pomoc w redakcji językowej
marzec 2014 (Paulina Kraśnicka)

0.1 Wstęp

Obliczenia symboliczne to w chwili obecnej bardzo rozbudowana gałąź matematyki. Może o tym świadczyć chociażby fakt, iż zagadnienia takie publikuje się w specjalnie do tego celu przeznaczonych czasopismach naukowych, takich jak np. *Journal of Symbolic Computation*, <http://www.elsevier.com>

cytat:

An international journal, the Journal of Symbolic Computation is directed to mathematicians and computer scientists who has particular interest in symbolic computation. The journal provides a forum for research in the algorithmic treatment of all types of symbolic objects: objects in formal languages (terms, formulas, programs); algebraic objects (elements in basic number domains, polynomials, residue classes, etc.); and geometrical objects.

It is the explicit goal of the journal to promote the integration of symbolic computation by establishing one common avenue of communication for researchers working in the different subareas. It is also important that the algorithmic achievements of these areas should be made available to the human problem-solver in integrated software systems for symbolic computation. To help this integration, the journal publishes invited tutorial surveys as well as Applications Letters and System Descriptions.

Research Areas Include:

- Computational algebra
- Computational geometry (non-linear)
- Automated theorem proving
- Automatic programming
- Design and implementation of symbolic computation languages and systems
- Applications in education, science, engineering and industry.

czy *Journal of Computer and System Sciences*.

Autor artykułu "Cztery algorytmy które wstrząsnęły światem" [1], podaje klasyfikację algorytmów liczbowych (teorii liczb), koncentruje się głównie na historii, celach i osiągnięciach numeryki (obliczeń numerycznych). Naszym celem jest, próba obejżenia pewnej klasy algorytmów obliczeń symbolicznych, związanych z jednym z czterech wspomnianych w artykule.

Głównym celem, który wytycza kierunki rozwoju tej dyscypliny naukowej jest próba algorytmicznego podejścia do wszelkiego rodzaju symbolicznych obiektów, przy czym nie muszą to być koniecznie obiekty algebraiczne, takie chociażby jak wektory czy wielomiany. Możliwość zalgorytmizowania najróżniejszych zagadnień pozwoliła stworzyć całe zintegrowane systemy obliczeń symbolicznych. Do najważniejszych i najbardziej znanych należą: **Derive**, **Reduce**, **Matlab**, **Mathcad**, **Maple**, **Mathematica**, **MuPad**, **Scientific Workplace**. Powyższe programy są sukcesywnie rozwijane i unowocześniane (przynajmniej cztery ostatnie z wymienionych na liście), a także dostosowywane do coraz większej liczby najróżniejszych zastosowań w wielu dziedzinach nauki - czasami bardzo odległych, <http://mathworld.wolfram.com>. Patrz też <http://eqworld.ipmnet.ru/en/software.htm>*

Uwaga. * oznacza że z powodów polmactex link http może być uszkodzony, proszę pisać do leble@mif.pg.gda.pl.

Rozdział 1

Modele matematyczne

Jak wspomniano we wstępie i jak wynika ze specyfiki, obliczenia symboliczne operują na obiektach symbolicznych, które następnie próbuje się zalgorytmizować za pomocą algebry. Model matematyczny - algebraiczny powstaje poprzez zastosowanie najróżniejszych obiektów takich jak grupa, pierścień, algebra linowa - wektor (przestrzeń wektorowa), tensor, ..., na podstawie których buduje się równanie. Bardzo ważne jest pojęcie grupy [2].

1.1 Grupa

Grupą \mathcal{G} nazywamy skończony lub nieskończony zbiór elementów razem z binarnym działaniem grupowym, które razem (elementy i działanie) spełniają następujące aksjomaty:

1. **zamkniętość** - dla dwóch elementów $x, y \in \mathcal{G}$ iloczyn xy także należy do grupy:

$$\forall x, y \in \mathcal{G} \quad xy \in \mathcal{G} \quad (1.1.1)$$

2. **łączność**

$$\forall x, y, z \in \mathcal{G} \quad (xy)z = x(yz) \quad (1.1.2)$$

3. **istnienie elementu neutralnego**

$$\forall x \in \mathcal{G} \quad \exists I : \quad xI = Ix = x \quad (1.1.3)$$

4. **istnienie elementu odwrotnego**

$$\forall x \in \mathcal{G} \quad \exists x^{-1} : \quad xx^{-1} = x^{-1}x = I. \quad (1.1.4)$$

Uwagi

- gdy jakieś elementy zbioru (przy spełnionych trzech aksjomatach) nie posiadają elementów odwrotnych, mówimy o **półgrupie**,
- grupę dla której

$$\forall x, y \in \mathcal{G} \quad xy = yx, \quad (1.1.5)$$

nazywamy **grupą abelową (przemienneą)** - w przeciwnym wypadku mamy do czynienia z grupą nieabelową.

1.2 Pierścień. Ciało (Field - Pole)

Wprowadzenie na grupie drugiego iloczynu (struktury półgrupy) doprowadzi do pojęcia *pierścieni*, dalej, w przypadku grupy abeliowej - do pojęcia ciała, dalej - przestrzeni liniowej [2].

Definicja różniczkowania pierścieni. Różniczkowaniem ∂ pierścieni nazywa się odwzorowanie o własnościach:

$$\begin{aligned}\partial(a + b) &= \partial a + \partial b, \\ \partial(ab) &= (\partial a)b + a(\partial b).\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

1.3 Pierścień operatorów.

Niech A, B, C, D - operatory na przestrzeni liniowej $U, \forall f \in U, \exists Af = f' \in U, \dots$, Sumą operatorów A, B jest operator $C=A+B$, taki, że

$$\forall f \in U, Cf = Af + Bf.$$

Hoczymem operatorów $D = AB$ nazywamy

$$Df = A(Bf).$$

Jeśli uwzględniamy operator mnożenia przez stałą (liczbę) $\alpha, \beta, \dots \in C$, iloczyn

$$\alpha A$$

i sumę traktujemy jako operacje, które definiują przestrzeń liniową operatorów.

Pierścień różniczkowy. Abielowy pierścień z jednością, w którym zdefiniowano operację różniczkowania.

Definicja ciała. Ciało jest zbiorem elementów F na którym są określone dwie binarne operacje: $+$ dodawanie i \times - mnożenie które jest grupą abelową względem dodawania z elementem neutralnym "0" (jednostkowym). Przy tym $F \setminus \{0\}$ jest grupą multiplikatywną względem mnożenia z elementem jednostkowym "1". Dodawanie i mnożenie łączy aksjomat dystrybucyjności.

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c.$$

Przykładem ciał nieskończonych mogą być ciała liczb racjonalnych \mathbb{Q} , rzeczywistych \mathbb{R} i zespolonych \mathbb{C} .

Def. Ciało G o skończonej ilości elementów (rzęd n) nazywa się ciałem Galois. Przykładem ciała skończonego jest pierścień $\text{Res } F_p$ (by simple module p).

Ciało różniczkowe Para $(F, \partial) = \text{pole} + \text{różniczkowanie}$.

1.4 Przestrzeń liniowa.

Niech $U \ni a, b, \dots$ jest grupą abelową względem dodawania $\forall a, b, a + b = b + a \in U$, oraz binarna operacja $\alpha \in C, a \in U, \alpha a \in U$, taka że

- 1)
- 2)
- 3)

1.5 Algebra Lie'go

Algebra Lie'go L to przestrzeń liniowa, na której dowolne elementy $A, B, C \in L$ spełniają relacje:

- ogólne: zdefiniowany iloczyn Liego [2]
- w przypadku, kiedy przestrzeń liniowa jest algebrą łączną, iloczyn $[A, B] = AB - BA$ (komutator)

- zdefiniowany jest iloczyn Liego

- zachodzą własności iloczynu Liego (aksjomaty)

$$[A, B] = -[B, A], \quad (1.5.7)$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$[A, \alpha B + \beta C] = \alpha[A, B] + \beta[A, C], \quad (1.5.8)$$

- spełniona jest tzw. tożsamość Jacobiego

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (1.5.9)$$

Komutator

$$[A, B] = AB - BA, \quad (1.5.10)$$

- przykład iloczynu Liego. Drugi przykład - nawias Poissona.

Podstawowym elementem teorii jest stosowanie odniesienia do bazy $E_k \in L$, $A = \sum_{k=1}^n A_k E_k$, $n = \dim L$. Wtedy

$$[E_i, E_k] = \sum_{l=1}^n C_{ik,l} E_l,$$

gdzie $C_{ik,l}$ - stałe strukturalne definiują iloczyn Liego dowolnej pary elementów, więc - definiują algebrę.

Powróćmy do różniczkowań algebry A , (łąicznej i Abielowej). Jeśli D jest różniczkowalne i $a \in A$, wtedy aD definiuje się przez $(aD)(b) = a(D(b))$ i jest to różniczkowaniem. Więc, zbiór wszystkich różniczkowań $Der(A)$ jest A -modułem. Jak łatwo sprawdzić, jeśli D_1, D_2 są różniczkowaniem, następnie iloczyn $D_1 D_2$, ogólnie rzecz biorąc, nie jest różniczkowaniem. Jednak łatwo zweryfikować że komutator $[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$ jest różniczkowaniem, algebrę uzyskaną poprzez komutatory nadaje $Der(A)$ strukturę algebry Liego.

1.6 Wielomiany

Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję postaci

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (1.6.11)$$

przy czym $a_n, z \in \mathbb{C}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Zagadnienia, w których w naturalny sposób pojawiają się wielomiany, to mian.:

- rozwinięcia funkcji za pomocą wielomianów, np.:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \dots \quad \text{dla } -\infty < x < +\infty, \quad (1.6.12)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad \text{dla } -\infty < x < +\infty, \quad (1.6.13)$$

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots \quad (1.6.14)$$

co (patrz twierdzenie Stone'a - Weierstrassa http://pl.wikipedia.org/wiki/twierdzenie_stone 27a-Weierstrassa*) generuje aproksymację (także - Weierstrass approximation theorem). Takie operacje też są wbudowane do pakietów obliczeń symbolicznych. Zagadnienia własne dla $n \times n$ macierzy A ,

$$Ax = \lambda x, \quad (1.6.15)$$

posiadają rozwiązania, gdy

$$\det(A - \lambda I) = 0, \quad (1.6.16)$$

a to prowadzi do równania

$$\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 = 0. \quad (1.6.17)$$

Podstawowymi operacjami algebry symbolicznej wielomianów

”**Factor**”

i

”**Expand**”

są odwzorowania

$$P_n(z) \Leftrightarrow a_n \prod_{k=0}^n (z - z_k),$$

gdzie $z_k \in \mathbb{C}$ - pierwiastki równania typu (1.6.17), stąd - termin ”faktoryzacja”.

Generalnie ($n \geq 5$) nie rozwiązywalne symbolicznie w postaci jawnej za pomocą skończonej liczby operacji pierwiastkowania (Twierdzenie Abela).

Są jednak wyjątki, np.

Podstawienie

$$y = \frac{1}{x} + x \quad (1.6.18)$$

Sprowadza równanie rzędu n-2 do równania rzędu n.

Na przykład, równanie

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

redukuje się do

$$ay^3 + by^2 + (c - 3a)y + d - 2b = 0$$

zamianą (1.6.18):

$$\frac{[ay^3 + by^2 + (c - 3a)y + d - 2b]_{y=\frac{1}{x}+x}}{a+ax^6+cx^2+bx^5+cx^4+dx^3+bx} = d - 2b + a \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + b \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + (c - 3a) \left(x + \frac{1}{x}\right) =$$

W ważnych przypadkach n=3,4, rozwiązania dają wzory Cardano, patrz [http : /portalwiedzy.onet.pl/9215,,,cardana_wzory,haslo.html*](http://portalwiedzy.onet.pl/9215,,,cardana_wzory,haslo.html)

Rozdział 2

Faktoryzacja. Pojęcia ogólne

2.1 Relacje splątania (*intertwining relations*)

Powyższe zagadnienia związane są z tzw. operatorami drabinkowymi, których przykładem są np. operatory kreacji i anihilacji teorii pól kwantowych. Operatory drabinkowe w naturalny sposób pojawiają się także w kwantowej teorii momentu pędu.

Rozważmy trzy operatory z przestrzeni Hilberta \mathcal{H} , tzn. operatory L, L_1 oraz A , które działają na funkcjach ψ przy czym $\psi \in \mathcal{H}$. Przypomnijmy, że przestrzeń Hilberta jest przestrzenią unitarną i zupełną. Unitarność oznacza, iż dana przestrzeń jest liniowa oraz, że określony jest iloczyn skalarny

$$(x, y) = z \in \mathbb{C}, \quad x, y \in \mathcal{H}, \quad (2.1.1)$$

który jest biliniowym funkcjonałem.

Relacją splątania (*intertwine relation*) nazywamy następujący związek wymienionych powyżej trzech operatorów $A, L, L_1 \in O$:

$$L_1 A = A L, \quad (2.1.2)$$

przy czym jest to równość w sensie operatorowym, przestrzeń O jest algebrą liniową (operatory można dodawać, mnożyć przez liczbę i mnożenie samych operatorów definiuje się przez kolejne działanie), a więc należy ją rozumieć następująco (dla $\forall \psi \in \mathcal{H}$)

$$L_1 A \psi = A L \psi. \quad (2.1.3)$$

Można również powiedzieć, że relacja (2.1.2) jest spełniona, gdy spełniona jest równość (2.1.3).

Rozważmy teraz następujące zagadnienie na wartości własnej:

$$L \psi = \lambda \psi \quad (2.1.4)$$

Zapiszmy jeszcze raz równość (2.1.3) i skorzystajmy w niej z (2.1.4)

$$L_1(A\psi) = A(L\psi) = A\lambda\psi = \lambda(A\psi), \quad (2.1.5)$$

a więc jeśli przyrównamy pierwszy i ostatni wyraz powyższej równości, to otrzymamy

$$L_1(A\psi) = \lambda(A\psi), \quad (2.1.6)$$

co przypomina równanie na wartości własnej (2.1.4), ale tym razem dla operatora L_1 z wektorem własnym $A\psi \in \mathcal{H}$:

$$L \longrightarrow L_1, \quad \psi \longrightarrow A\psi \in \mathcal{H}. \quad (2.1.7)$$

Wartość własna przy tej transformacji pozostaje niezmienniona - jest to nadal liczba λ . Taką transformację nazywamy **transformacją izospektralną** (jej niezmiennikiem jest widmo wartości własnych). Operatory związane relacją splątania (2.1.2), a więc mające takie samo widmo, można niezbyt ściśle nazwać "prawie równoważnymi" (np. w ramach mechaniki kwantowej, w której zbiór wartości λ) - widmo daje wyniki pomiarów dla obserwacji, reprezentowanej przez L .

2.2 Operatory różniczkowania. Równania różniczkowe

Rozważmy operator pierwszej pochodnej $D \in O$:

$$y(x) \rightarrow Dy(x) = \frac{dy}{dx}, \quad (2.2.8)$$

gdzie $y \in C^1$ - funkcja różniczkowalna. Naturalnie definiuje się operator mnożenia przez funkcje $f(x) \in C^1$:

$$f(x)y(x).$$

Definicja operatora odwrotnego do D jest całkowaniem

$$y(x) \rightarrow D^{-1}y(x) = \int y(x)dx + C = \int_0^x y(z)dz + C. \quad (2.2.9)$$

Łatwo udowodnić że

$$D(e^{ax}y(x)) = ae^{ax}y(x) + e^{ax}Dy(x) = e^{ax}(a + D)y(x), \quad (2.2.10)$$

albo, w pierścieniu operatorów

$$De^{ax} = e^{ax}(a + D), \quad (2.2.11)$$

więc operator mnożenia przez funkcję e^{ax} odgrywa rolę operatora, a w relacji splątania(2.1.3). można więc napisać $L = D$, $L_1 = D + a$.

Równanie różniczkowe liniowe pierwszego rzędu o współczynnikach stałych ma postać:

$$y'(x) + ay(x) = f(x), \quad (2.2.12)$$

co jest równoważne do

$$Dy(x) + ay(x) = (D + a)y(x) = e^{-ax}De^{ax}y(x) = f(x), \quad (2.2.13)$$

gdzie uwzględnione (2.2.11).

Powstaje algorytm symbolicznego rozwiązania równania (5.2.8) pierwszego rzędu

$$y(x) = e^{-ax}D^{-1}e^{ax}f(x), \quad a \in C, \quad (2.2.14)$$

inaczej

$$y(x) = e^{-ax}[\int e^{ax}f(x) + C], \quad (2.2.15)$$

Dla wyższych rzędów opieramy się na wzorze faktoryzacji

$$P_n(D) = \prod_{i=1}^n (D - a_i), \quad (2.2.16)$$

gdzie a_i - pierwiastki wielomianu $P_n(a)$ (krotności się powtarzają, więc zakładamy że $i=1, \dots, n$) oraz relacje splątania

$$P_n(D)e^{bx} = e^{bx}P_n(D + b). \quad (2.2.17)$$

Inaczej można zastosować rozwinięcie

$$P_n^{-1}(D) = \sum_{i=1}^n A_i(D - a_i)^{-1}, \quad (2.2.18)$$

które daje inne możliwości uzyskania rozwiązań równań niejednorodnych, bo

$$(D - a_i)^{-1}f(x) = e^{a_i x}D^{-1}e^{-a_i x}f(x); \quad (2.2.19)$$

Współczynniki A_i, a_i znajdziemy z

$$P_n^{-1}(a) = \sum_{i=1}^n A_i (a - a_i)^{-1}. \quad (2.2.20)$$

Ważny przykład.

Określamy operator Laplace'a (laplasjan) na R^n :

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ naturalny operator różniczkowy drugiego rzędu, niezmienniczy względem rotacji.

Operator drugiej pochodnej względem zmiennej radialnej s

$$Lf(\alpha, s) \equiv \frac{\partial^2}{\partial s^2} f(\alpha, s)$$

też jest niezmienny. Klasyfikacja algorytmów faktoryzacji przedstawiona w [29]. Oznaczmy transformację Radona jako R i do niej sprzężoną R^* . Relację splątania określa wzór

$$R(\Delta f) = L(Rf), \quad R^*(Lg) = \Delta(R^*g).$$

Zastosowanie takich kodów może być realizowane za pomocą darmowego oprogramowania MAXIMA (patrz str. <http://eqworld.ipmnet.ru/eqnsoftware.htm> *)

2.3 Ewolucja i faktoryzacja

Rozważmy równanie ewolucyjne w postaci komutatorów (Lie product)

$$L_t = [M, L], \quad (2.3.21)$$

Następne stwierdzenie można udowodnić podstawieniem

Stwierdzenie *If the operator L is factorized as $L = L_1 L_2$ and their evolution is determined by the equation such as (2.3.21), $L \rightarrow L_i$ the operator L evolve as (2.3.21).*

Jednym z najważniejszych i najczęściej spotykanych sposobów uzyskania zagadnienia na wartości własne (2.1.4), jest zastosowanie metody rozdzielania zmiennych w przypadku tzw. równania ewolucji (opisującego szeroką klasę problemów matematyki stosowanej). Jest to równanie postaci

$$\Psi_t = L\Psi, \quad (2.3.22)$$

przy czym

$$\Psi_t \equiv \frac{\partial \Psi}{\partial t}. \quad (2.3.23)$$

W metodzie rozdzielania zmiennych poszukujemy rozwiązania szczególnego równania (2.3.22) w postaci iloczynu funkcji zależnych tylko od jednej zmiennej

$$\Psi = \tau(t)\psi(x). \quad (2.3.24)$$

Podstawiając funkcję (2.3.24) do równania (2.3.22) otrzymamy równania spełniane odpowiednio przez funkcje $\tau(t)$ oraz $\psi(x)$

$$\tau_t = \lambda\tau, \quad (2.3.25)$$

$$L\psi = \lambda\psi. \quad (2.3.26)$$

Rozwiązaniem ogólnym równania ewolucji (2.3.22) jest następująca całka Stieltjesa¹ (symbolizuje to przyrost ds_λ)

$$\Psi = \int \tau_\lambda \psi_\lambda ds_\lambda. \quad (2.3.27)$$

¹Całka Stieltjesa jest bezpośrednim uogólnieniem zwykłej całki oznaczonej Riemanna. Całka ta umożliwia ujęcie jednym wzorem całkowym np. różnych przypadków ciągłego i skupionego rozkładu mas, gdy chcemy obliczyć moment bezwładności takiego układu mas [8], albo tak jak w analizowanym przykładzie równania ewolucji, pozwala zapisać rozwiązanie za pomocą jednego wzoru (2.3.27), który uwzględni zarówno widmo ciągłe, jak i dyskretne.

Jako przykład rozważmy liniowy operator L , który może być np. macierzą o wymiarze (3×3) . Wówczas rozwiązanie równania własnego (2.3.26), sprowadza się do rozwiązania równania algebraicznego

$$\det(L - \lambda I) = 0, \quad (2.3.28)$$

przy czym wartości własne λ_1, λ_2 oraz λ_3 w ogólności wyrażają się poprzez wzory Cardana. W przykładzie tym, ze względu na to, iż mamy dyskretny zbiór wartości własnych, składający się z 3 elementów, całka Stieltjesa będzie zwykłą sumą

$$\Psi = \sum_{i=1}^3 \tau_{\lambda_i} \psi_{\lambda_i}. \quad (2.3.29)$$

2.4 Przykład faktoryzacji

Rozważmy hermitowski operator L , tzn.

$$L^\dagger = L \quad (2.4.30)$$

i załóżmy, że operator ten można przedstawić w postaci

$$L = S^\dagger S. \quad (2.4.31)$$

Okazuje się, że

$$(SS^\dagger)S = S(S^\dagger S), \quad (2.4.32)$$

co przypomina relację splątania (2.1.2) jeśli

$$A = S \quad \implies \quad L_1 = SS^\dagger \quad (2.4.33)$$

Wniosek, który można sformułować na tym etapie jest następujący: *jeżeli operator L się faktoryzuje, to wówczas istnieje relacja splątania.*

Rozważmy teraz równanie na wartości własnej dla operatora L_1 :

$$L_1 \varphi = \mu \varphi. \quad (2.4.34)$$

W oparciu o (2.4.33) mamy

$$SS^\dagger \varphi = \mu \varphi. \quad (2.4.35)$$

Działając z lewej strony operatorem S^\dagger na powyższe równanie otrzymamy

$$S^\dagger S(S^\dagger \varphi) = \mu(S^\dagger \varphi), \quad (2.4.36)$$

co w oparciu o (2.4.31) można zapisać w postaci równoważnego równania własnego

$$L(S^\dagger \varphi) = \mu(S^\dagger \varphi), \quad (2.4.37)$$

przy czym teraz

$$\varphi \longrightarrow S^\dagger \varphi, \quad (2.4.38)$$

jest wektorem własnym operatora L z niezmiennymi wartościami własnymi $\{\mu\}$. Praktycznie, rozważmy macierz L jako iloczyn wzajemnie sprzężonych macierzy A, A^+

$$A^+ A = L,$$

biorąc prosty przykład macierzy 2×2 .

$$L = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |c|^2 & a^*b + c^*d \\ b^*a + d^*c & |b|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

wprowadzmy columny, $\psi = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ and $\phi = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, otrzymujemy równania dla wektorów

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= L_{11}, \\ \|\phi\|^2 &= L_{22}, \\ (\psi, \phi) &= L_{12}. \end{aligned} \tag{2.4.39}$$

Można sprawdzić że $n \times n$ macierz L faktoryzuje się podobnie. W przypadku macierzy diagonalnej L , iloczyn skalarny (ψ, ϕ) wynosi zero, co daje zbiór ortogonalny. Macierz A z ortogonalnych wektorów spłata diagonalną macierz $L = A^+A$ i macierz AA^+ zbudowaną z wierszy norm wektorów i ich produktów skalarnych.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ cb^* + da^* & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

Generalnie, dla $n \times n$ macierz ma ustawaionych n kolumn

$$\psi_i$$

wykazano, że czynniki pola faktoryzacji wzrastają automatycznie.

2.5 Operatory drabinkowe

Załóżmy, że dla pewnego, samosprzężonego (hermitowskiego) operatora M , którego wartości własne m chcemy wyznaczyć, istnieje para wzajemnie sprzężonych² operatorów A^+ , A^- , spełniających następujące relacje komutacyjne

$$[M, A^\pm] = \pm A^\pm. \tag{2.5.42}$$

Powyższe relacje komutacyjne pojawiają się np. w zagadnieniach związanych z operatorem momentu pędu \mathcal{J} , który można zdefiniować następująco

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \mathcal{J}_k, \tag{2.5.43}$$

co w konkretnym przykładzie przyjmuje postać

$$[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] = i\hbar \mathcal{J}_3. \tag{2.5.44}$$

Analogia z relacją (2.5.42) jest następująca.

$$M = \mathcal{J}_3 \quad \text{oraz} \quad A^\pm = \mathcal{J}_1 \pm i\mathcal{J}_2. \tag{2.5.45}$$

Korzystając z relacji (2.5.42) dla operatora A^+ możemy napisać

$$MA^+ - A^+M = A^+, \tag{2.5.46}$$

a następnie

$$MA^+ = A^+ + A^+M = A^+(M + 1). \tag{2.5.47}$$

Patrząc na powyższą równość można rozpoznać w niej relację spłątania (2.1.2), przy czym

$$L_1 \longrightarrow M, \quad L \longrightarrow M + 1. \tag{2.5.48}$$

²Operatory A^+ i A^- nazywamy wzajemnie sprzężonymi jeśli

$$(\psi, A^+\varphi) = (A^-\psi, \varphi), \tag{2.5.40}$$

co oznacza, że

$$(A^+)^{\dagger} = A^-. \tag{2.5.41}$$

Postępując podobnie dla operatora A^- otrzymujemy

$$MA^- - A^-M = -A^-, \quad (2.5.49)$$

a w kosekwencji

$$MA^- = A^-(M - 1), \quad (2.5.50)$$

na co również można patrzeć jak na relację splątania.

Podziałajmy teraz prawostronnie operatorem A^- na równość (2.5.47) oraz lewostronnie operatorem A^+ na (2.5.50). W wyniku tego mamy

$$MA^+A^- = A^+MA^- + A^+A^-, \quad (2.5.51)$$

$$A^+MA^- = A^+A^-M - A^+A^-. \quad (2.5.52)$$

Dodając stronami (2.5.51) i (2.5.52) otrzymujemy

$$A^+A^-M - MA^+A^- = 0, \quad (2.5.53)$$

co można zapisać za pomocą komutatora

$$[A^+A^-, M] = 0. \quad (2.5.54)$$

Przejdziemy teraz do zagadnienia na wartości własne dla operatora M . Funkcje własne oznaczmy przez ψ_m ; mamy więc

$$M\psi_m = m\psi_m. \quad (2.5.55)$$

Jeśli teraz podziałajmy lewostronnie operatorem A^+ na powyższe równanie

$$A^+M\psi_m = mA^+\psi_m, \quad (2.5.56)$$

a następnie skorzystamy z (2.5.42), to wówczas

$$(MA^+ - A^+)\psi_m = mA^+\psi_m, \quad (2.5.57)$$

co ostatecznie można zapisać w postaci

$$M(A^+\psi_m) = (m + 1)(A^+\psi_m). \quad (2.5.58)$$

Przeprowadzenie analogicznych operacji z operatorem A^- prowadzi do równania

$$M(A^-\psi_m) = (m - 1)(A^-\psi_m). \quad (2.5.59)$$

Wektory własne występujące w dwóch powyższych równaniach można interpretować następująco

$$A^+\psi_m \sim \psi_{m+1}, \quad (2.5.60)$$

$$A^-\psi_m \sim \psi_{m-1} \quad (2.5.61)$$

lub jawnie

$$A^+\psi_m = c_m\psi_{m+1}, \quad (2.5.62)$$

$$A^-\psi_m = d_m\psi_{m-1}. \quad (2.5.63)$$

Właśnie z powodu wyrażeń (2.5.62) i (2.5.63), operatory A^+ oraz A^- nazywane są **operatorami drabinkowymi (ladder operators)**.

Funkcje własne operatora M normuje się zazwyczaj do jedności, tzn.

$$(\psi_m, \psi_m) = 1, \quad \forall m \in \{-N, \dots, N\} \quad (2.5.64)$$

$$(\psi_{m+1}, A^+\psi_m) = c_m \underbrace{(\psi_{m+1}, \psi_{m+1})}_{=1} = c_m \quad (2.5.65)$$

z drugiej strony (korzystając z faktu, że operatory A^+ i A^- są wzajemnie sprzężone - patrz wzór (2.5.40)) możemy napisać powyższe wyrażenie w postaci

$$(A^- \psi_{m+1}, \psi_m) = (d_{m+1} \psi_m, \psi_m) = d_{m+1}^* (\psi_m, \psi_m) = d_{m+1}^*, \quad (2.5.66)$$

a więc zachodzi

$$c_m = d_{m+1}^*. \quad (2.5.67)$$

Dodatkowo, korzystając z (2.5.62), (2.5.63) oraz (2.5.67), mamy

$$A^+ A^- \psi_m = d_m A^+ \psi_{m-1} = d_m c_{m-1} \psi_m = d_m d_m^* \psi_m = |d_m|^2 \psi_m. \quad (2.5.68)$$

2.5.1 Samosprężone operatory drabinkowe

Jako przykład rozważymy zagadnienie orbitalnego momentu pędu. Zanim jednak przystąpimy do tego problemu, należy tu zaznaczyć, że operatory drabinkowe, zdefiniowane porzez (2.5.62) i (2.5.63), nie mogą być samosprężone. Wynika to z tego, że dla obu operatorów, A^+ i A^- , sprzężenie jednego z nich musi prowadzić do drugiego z operatorów, a więc działającego przeciwnie niż pierwszy - patrz wzór (2.5.41). Poniżej przedstawimy pewne modyfikacje, które pozwolą uzyskać samosprężone operatory drabinkowe.

Zdefiniujmy, za pomocą operatorów M , A^+ i A^- , dwa operatory, \mathcal{M} oraz \mathcal{A} , w następujący sposób

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & -M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^- \\ A^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.69)$$

Oba powyższe operatory są już samosprężone (hermitowskie), a dodatkowo można pokazać, iż spełniają relację antykomutacyjną

$$[\mathcal{M}, \mathcal{A}]_+ = (\mathcal{M} \mathcal{A} + \mathcal{A} \mathcal{M}) = -\mathcal{A}, \quad (2.5.70)$$

przy czym, antykomutator dwóch dowolnych operatorów A i B , definiujemy następująco

$$[A, B]_+ = AB + BA. \quad (2.5.71)$$

Z każdą funkcją własną ψ_m operatora M , związana jest para funkcji własnych, $\psi_m^{(a)}$ oraz $\psi_m^{(b)}$, operatora \mathcal{M} (widać, że przestrzeń funkcji własnych tego operatora można rozbić na sumę dwóch podprzestrzeni: "a" i "b"). Funkcje te mają postać spinorową

$$\psi_m^{(a)} = \begin{pmatrix} \psi_m \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_m^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_m \end{pmatrix} \quad (2.5.72)$$

i są rozwiązaniami następujących zagadnień własnych

$$\mathcal{M} \psi_m^{(a)} = m \psi_m^{(a)}, \quad (2.5.73)$$

$$\mathcal{M} \psi_m^{(b)} = -m \psi_m^{(b)}. \quad (2.5.74)$$

Stosując do powyższych funkcji własnych operator \mathcal{A} , w oparciu o relację antykomutacyjną (2.5.70), można pokazać, iż

$$\mathcal{A} \psi_m^{(a)} \sim \psi_{m+1}^{(b)}, \quad (2.5.75)$$

$$\mathcal{A} \psi_{m+1}^{(b)} \sim \psi_m^{(a)}, \quad (2.5.76)$$

a więc mamy ponownie do czynienia z operatorem drabinkowym, który w wyniku działania "prze-rzuca" funkcje własne z jednej podprzestrzeni do drugiej, podnosząc lub obniżając przy tym o 1 wartość własną m .

Przeanalizujemy teraz konkretny przykład, w którym pojawi się samosprężony operator drabinkowy. Niech M będzie z -tową składową orbitalnego momentu pędu, czyli

$$M = L_z. \quad (2.5.77)$$

Mamy wówczas

$$A^\pm = L_x \pm iL_y, \quad (2.5.78)$$

a w konsekwencji otrzymamy operatory \mathcal{M} i \mathcal{A} w postaci

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} L_z & 0 \\ 0 & -L_z \end{pmatrix} = \sigma_z L_z \quad (2.5.79)$$

oraz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & (L_x - iL_y) \\ (L_x + iL_y) & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x L_x + \sigma_y L_y. \quad (2.5.80)$$

Dla uproszczenia zapisu w powyższych wyrażeniach pojawiły się macierze Pauliego, zdefiniowane następująco

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.81)$$

Powyższy przykład, ze względu na swoją prostotę, nie obrazuje największej zalety skonstruowanego drabinkowego operatora \mathcal{A} . Otóż, operatory A^\pm często są bardzo skomplikowane, natomiast samosprężony operator \mathcal{A} jest dużo prostszy i prowadzi do zwartego zapisu algebraicznego.

2.6 Algorytm QR i układy całkowalne.

Inny przykład faktoryzacji odwracalnej (invertible) $n \times n$ macierzy M przez ortogonalną macierz Q i górną trójką macierz R iloczyn

$$M = QR \quad (2.6.82)$$

jest znany dla tego że daje algorytm obliczenia wartości własnych macierzy M [12]. Dowód może być zrobiony za pomocą procedury ortogonalizacji Grama-Schmidta [13].

Procedura wykonania jest taka: startujemy z (2.6.82) i faktoryzujemy rezultat transpozycji

$$M_1 = RQ = Q^{-1}MQ = Q^T MQ$$

jako

$$M_1 = Q_1 R_1, \quad (2.6.83)$$

co pozwala skonstruować

$$M_2 = Q_1^T M_1 Q_1. \quad (2.6.84)$$

Powtórzenie faktoryzacji produkuje łańcuch

$$M_{k+1} = Q_k^T M_k Q_k. \quad (2.6.85)$$

Ten interaktywny proces stosuje się w teorii całkowalnego układu Tody który się realizuje jako transformacja przesunięcia wzdłuż dodatkowej osi, powiedzmy - t [15]. Następną ideą związaną z twierdzeniem Mosera [22] sens której w tym że poza-diagonalna część macierz dąży do zera jeśli rozważa się t -przesunięcie. Ściślej, jeśli układ jest generowany Hamiltonianem

$$H_{QR} = -Tr(M \log M - M) \quad (2.6.86)$$

na $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$, gdzie $\omega = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$, wtedy

$$M_{QR}(k) = M_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6.87)$$

Poważną rolę w tej teorii odgrywa łańcuch Tody, którego używamy w postaci, podanej przez Flaschka

$$M_t = [B(M), M] \quad (2.6.88)$$

gdzie M jest tridiagonalną macierzą

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdot \\ b_1 & \cdot & & \\ & & \cdot & b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}. \quad (2.6.89)$$

Macierz $B(M)$ ma zera na diagonalu

$$B(M) = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & 0 & \cdot \\ b_1 & 0 & & \\ & & \cdot & -b_{n-1} \\ & & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6.90)$$

Formulujemy twierdzenie [14]

Twierdzenie *Całkowalność łańcucha QR (2.6.85) .*

Hamiltonian (2.6.86) generuje układ całkowny (2.6.88) który określa interpolacje łańcucha ubierania QR w punktach całkowitych czasu t .

Stwierdzenie o wartościach asymptotycznych części poza-diagonalnej macierzy M brzmi następująco

Twierdzenie *Twierdzenie Mosera o łańcuchach Tody.*

Elementy macierzowe $b_k(t)$ dążą do zera na obu końcach $t \rightarrow \pm\infty$

Twierdzenie może być zastosowane wprost do wielu problemów aproksymacji różnicowych w teorii równania Schrodingera [27]. Za pomocą tego algorytmu mogą być stworzone programy do odpowiednich obliczeń symbolicznych.

Rozdział 3

Transformacja Darboux

3.1 Izospektralna transformacja Darboux

Zajmujemy się transformacjami, dzięki którym na podstawie rozwiązań danych zagadnień można przechodzić do innych rozwiązań zagadnień o podobnej formie operatora [24] (An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations). Pokażemy jak ubrać rozwiązanie 1- wymiarowego liniowego równania kiedy faktoryzacja operatora istnieje.

Najpierw, sformułujemy problem faktoryzacji operatora różniczkowego i wytłumaczymy, jak go dzielić monomialem z prawej i z lewej, wprowadzając uogólnione wielomiany Bella.

Operator klasyczny TD, ma formę operatora różniczkowego pierwszego rzędu

$$L_\sigma = D - \sigma. \quad (3.1.1)$$

który jest związany, np., z operatorem równania

$$-\psi_{xx} + u\psi = \lambda\psi, \quad (3.1.2)$$

mianowicie

$$-D^2 + u = (-D - \sigma)(D - \sigma) = -D^2 + \sigma_x + \sigma^2. \quad (3.1.3)$$

jeśli $\sigma = \frac{\phi'}{\phi}$, gdzie ϕ - rozwiązanie problemu (3.1.2) z wartościami własnymi (WW) μ .

Wprowadzając równanie łańcuchowe dla powtarzania DT

$$-\psi_{xx} + u_i\psi = \lambda\psi, \quad (3.1.4)$$

Ten że jednowymiarowy operator Schrodingera na osi x z potencjałem u_i jest związany z u_{i+1}

$$u_{i+1} = u_i - 2\sigma_i \quad (3.1.5)$$

σ_i , jest rozwiązaniem

$$\sigma_i' + \sigma_i^2 + \mu_i = u_i. \quad (3.1.6)$$

Które jest tożsamościowe, jeśli $\sigma_i = \phi_i' \phi_i^{-1}$. Podstawienie u_i i z (3.1.6) w (3.1.5) daje łańcuch

$$(\sigma_i + \sigma_{i+1})' = \sigma_i^2 - \sigma_{i+1}^2 + \mu_i - \mu_{i+1}. \quad (3.1.7)$$

Poważne problemy mechaniki kwantowej mogą być rozwiązane taką metodą. Np. klasyczne widmo oscylatora harmonicznego i potencjał Coulomba znajdują się w tym opisie, jeśli szukamy rozwiązania (3.1.7) w postaci

$$\sigma_j = \xi_j a(x) + \eta_j, j = 0, \pm 1, \dots \quad (3.1.8)$$

co produkuje równanie Riccati dla $a(x)$

$$(\xi_{j+1} + \xi_j)a' = (\xi_{j+1}^2 - \xi_j^2)a^2 + 2(\xi_{j+1}\eta_{j+1} - \xi_j\eta_j)a + \eta_{j+1}^2 - \eta_j^2 + \mu_i - \mu_{i+1}. \quad (3.1.9)$$

Rozwiązania $a(x) = x, \frac{1}{x}$ via link Miury (3.1.6) produkuje potencjał

$$u_i = \xi_j a(x)' + (\xi_j a(x) + \eta_i)^2 + \mu_i, \quad (3.1.10)$$

$a = x$ oznacza $\xi_{j+1} = \pm \xi_j, \eta_{j+1} = \pm \eta_j$ natomiast (3.1.9) czyta się jako rekurencję dla WW

$$\mu_{i+1} = \mu_i + 2\xi_j, \quad (3.1.11)$$

i daje widmo równoodległe dla wyboru $\xi_{j+1} = \xi_j = -\mu_j, \eta_{j+1} = \eta_j = \eta$. Potencjał oscylatora harmonicznego $x \in (-\infty, \infty)$ jest wprost

$$u_i = -\mu_i + \mu^2 x^2 + 2\xi \eta x + \eta^2 + \mu_i, \quad (3.1.12)$$

Przypadek radialnego równania Schrodingera (atomic units)

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{l(l+1)}{2r^2} + u_l - E \right) \psi_l(r) = 0, \quad (3.1.13)$$

transformuje się do (3.1.2) za pomocą $\psi_l = \psi(x \rightarrow r)$ i równanie łańcuchowe jest więc równoważne do (3.1.7). Warunek (3.1.9) tworzy dwa dla stałych:

$$\begin{aligned} (\xi_{j+1} + \xi_j)(1 + \xi_{j+1} - \xi_j) &= 0 \\ \xi_{j+1}\eta_{j+1} - \xi_j\eta_j &= 0 \end{aligned}$$

To oznacza ze wzory (3.1.11) i

$$\psi_0(r) = \frac{C}{r} \exp\left[\int_1^r \sigma(x) dx\right] \quad (3.1.14)$$

rozwiązują problem kwantowy potencjału Coulomba dla $l=0$.

Jeśli kończymy na N-kroku, otrzymujemy super-Hamiltonian, basowy dla supersymetrii.

3.2 Nieizospektralna transformacja Darboux

Z twierdzenia Darboux potrafimy wywnioskować, że transformacja w nim zdefiniowana jest izospektralna. Spróbujemy teraz podejść do problemu z innej strony, tak, aby otrzymać równanie łańcuchowe generujące nowe wartości własne. Z twierdzenia (3.2.15) i przykładu (??) wiemy, że rozpatrywany przez nas w równaniu operator $L = -\frac{d^2}{dx^2} + u$ można przedstawić w postaci (2.4.32), przy czym σ jest w tym przypadku postaci $\sigma = \frac{\phi_1'}{\phi_1}$, gdzie ϕ_1 spełnia $L\phi_1 = \lambda_1\phi_1$. Na podstawie uwagi (??) do twierdzenia Darboux widzimy, że $r = u - \sigma'^2 = \lambda_1$. Mamy zatem

$$L = \left(-\frac{d}{dx} - \sigma \right) \left(\frac{d}{dx} - \sigma \right) + \lambda_1.$$

Wiemy, że operator L_σ działa na elementy przestrzeni funkcji całkowalnych z kwadratem $L^2(\mathbb{R})$. Dla dowolnych $v, \varphi \in L^2(\mathbb{R})$, pamiętając, że zanikają one w nieskończoności, dostaniemy:

$$\begin{aligned} (v, L_\sigma \varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x) (L_\sigma \varphi)^\dagger(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \left(\frac{d\varphi}{dx} - \sigma \varphi \right)^\dagger(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \frac{d\varphi^\dagger}{dx}(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} v(x) \sigma \varphi^\dagger(x) dx \\ &= v(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{dv(x)}{dx} - \sigma v(x) \right) \varphi^\dagger(x) dx = (L_\sigma^\dagger v, \varphi). \end{aligned}$$

Stąd mamy, że $L_\sigma^\dagger = -dx - \sigma = M$, czyli

$$L = L_\sigma^\dagger L_\sigma + \lambda_1. \quad (3.2.15)$$

Wprowadźmy teraz nowe oznaczenia. Niech $L_i = -d^2x^2 + u_i$. Będziemy zatem rozważać równanie

$$L_i\psi_i(\mu_i) = \mu_i\psi_i(\mu_i), \quad (3.2.16)$$

gdzie $\psi_i(\mu_i) = \psi_i(x, \mu_i)$. Rozwiązanie tego równania odpowiadające wartości własnej λ_i będziemy oznaczać tak, jak w treści twierdzenia Darboux, przez ϕ_i , czyli możemy zapisać $L_i\phi_i = \lambda_i\phi_i$. Dostaniemy wtedy $\sigma_i = \frac{\phi'_i}{\phi_i}$. Z (3.2.15) otrzymamy

$$L_i = L_{\sigma_i}^\dagger L_{\sigma_i} + \lambda_i.$$

Podstawiając to do równania (3.2.16), możemy zapisać

$$(L_{\sigma_i}^\dagger L_{\sigma_i} + \lambda_i)\psi_i(\mu_i) = \mu_i\psi_i(\mu_i)$$

i dalej, mnożąc to równanie przez L_{σ_i} z lewej strony, mamy

$$L_{\sigma_i} L_{\sigma_i}^\dagger (L_{\sigma_i}\psi_i(\mu_i)) + \lambda_i(L_{\sigma_i}\psi_i(\mu_i)) = \mu_i(L_{\sigma_i}\psi_i(\mu_i)),$$

czyli

$$L_{\sigma_i} L_{\sigma_i}^\dagger (L_{\sigma_i}\psi_i(\mu_i)) = (\mu_i - \lambda_i)(L_{\sigma_i}\psi_i(\mu_i)). \quad (3.2.17)$$

Widzimy, że działając transformatą L_{σ_i} na funkcję $\psi_i(\mu_i)$ spełniającą (3.2.16), otrzymamy inną funkcję $\psi_{i+1}(\mu_{i+1})$ spełniającą nowe równanie

$$L_{i+1}\psi_{i+1}(\mu_{i+1}) = \mu_{i+1}\psi_{i+1}(\mu_{i+1}) \quad (3.2.18)$$

dla wartości własnej $\mu_{i+1} = \mu_i - \lambda_i$, gdzie $L_{i+1} = L_{\sigma_i} L_{\sigma_i}^\dagger$. Mamy

$$L_{i+1} = L_{\sigma_i} L_{\sigma_i}^\dagger = L_{\sigma_{i+1}}^\dagger L_{\sigma_{i+1}} + \lambda_{i+1},$$

gdzie $\sigma_{i+1} = \frac{\phi'_{i+1}}{\phi_{i+1}}$ a ϕ_{i+1} rozwiązuje $L_{i+1}\phi_{i+1} = \lambda_{i+1}\phi_{i+1}$.

Z takiej postaci operatora L_i wynika między innymi to, że jego wartości własne są liczbami dodatnimi. Rzeczywiście, dla dowolnego $\phi_i \in L^2(\mathbb{R})$ takiego, że zachodzi $L_i\phi_i = \lambda_i\phi_i$, mamy

$$\begin{aligned} \lambda_i \|\phi_i\|^2 &= \lambda_i(\phi_i, \phi_i) = (\phi_i, \lambda_i\phi_i) = (\phi_i, L_i\phi_i) = (\phi_i, L_{\sigma_{i-1}}^\dagger L_{\sigma_{i-1}}\phi_i) \\ &= (L_{\sigma_{i-1}}^\dagger\phi_i, L_{\sigma_{i-1}}^\dagger\phi_i) = \|L_{\sigma_{i-1}}^\dagger\phi_i\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Zatem $\lambda_i \geq 0$ dla dowolnego i . Zatem dla dowolnego i operator L_{σ_i} jest operatorem drabinkowym obniżającym wartość własną operatora L_i .

Uwaga 3.2.1 W dalszych rozważaniach będziemy korzystali z wprowadzonego w tym podrozdziale sposobu zapisu.

3.3 Potencjały całkowne w mechanice kwantowej.

Zastosowanie w mechanice kwantowej wymaga pewnych warunków. To jest rzeczywistość i dozwolone osobliwości potencjałów, definicja stanu w przestrzeni Hilberta \mathcal{H} dla równania

$$-\frac{1}{2}\psi_{xx} + U(x)\psi = E\psi \quad (3.3.19)$$

albo

$$\psi(x, E_n) \in \mathcal{H}$$

dla widma dyskretnego, albo

$$\int_E^{E+\Delta E} \psi(x, E') dE' \in \mathcal{H}$$

dla continuum. Rozważmy przypadek jednowymiarowego równania Schrodingera 3.3.19 na osi $x \in -\infty, +\infty$ s a potencjałem $U(x)$.

Dla punktów widma dyskretnego teoria dobrze opisana w [25], patrz też strona domowa S. Leble, skrypt Chaos i solitony.

3.3.1 Deformacje algebraiczne.

Ścisłe określenie DT może być dane jeżeli operator Hamiltona jest półograniczony. Niech też $U(x) \geq 0$ [26]. Jak pokazano wyżej jedyna faktoryzacja operatora (3.3.19) wprowadza ubrany (dressed partner) operator $U[1] = U + 2\sigma_x$. Partner-potencjał jest nieosobliwy jeśli ϕ się nie zeruje. Możliwe:

a) dodatkowo (faktoryzacja funkcji w [26]) ϕ jest całkowalna z kwadratem i operator $\partial - \sigma$ odwzoruje każdy punkt widma dyskretnego, do punktu widma dyskretnego za wyjątkiem najniższego, który znika: funkcja dąży do zera.

b) odwrotna ("prop") funkcja ϕ^{-1} jest całkowalna z kwadratem. Odwrotna transformacja.

c) Izospektralna transformacja : ani ϕ ani ϕ^{-1} nie jest całkowalna z kwadratem, operator D_λ działa jako izomorfizm.

Algebraiczne deformacji potencjałów o formie niezmienniczej, patrz [26]. Z omawianymi problemami faktoryzacji macierzy i operatorów różniczkowych można zapoznać się głębiej, korzystając z literatury, np. "Darboux transforms on Band Matrices, Weights and associated Polynomials", Mark Adler and Pierre van Moerbeke, a także na stronie domowej profesora Lva Berkovicha, <http://www.ssu.samara.ru/~berkovich/>

Rozdział 4

Faktoryzacja operatorów różnicowych.

4.1 Ewolucja w pierścieniu różnicowym

Zapiszmy teraz równanie ewolucji

$$\psi_t = L\psi. \quad (4.1.1)$$

Powyższe równanie zawsze jest powiązane z równaniem

$$L\psi = \lambda\psi. \quad (4.1.2)$$

Jeśli do rozważań dodamy inne równanie liniowe

$$\psi_y = M\psi, \quad (4.1.3)$$

to mamy punkt wyjścia do równania nieliniowego (w reprezentacji Laxa).

$$L_y - M_t = [L, M]. \quad (4.1.4)$$

Załóżmy, że mamy pierścień różniczkowy, w którym istnieje transformacja T , będąca automorfizmem i spełniająca zależność

$$T(ab) = T(a)T(b). \quad (4.1.5)$$

Typowy i ważny przykład takiej transformacji - transformacja przesunięcia

$$T\psi(x) = \psi(x+h). \quad (4.1.6)$$

Innym przykładem może być transformacja obrotu.

Uwaga. Można udowodnić, że

$$T\psi(x) = e^{hD}\psi(x). \quad (4.1.7)$$

Twierdzenie Rozwiązanie ogólne jednorodnego równania

$$(T - a)y(x) = 0 \quad (4.1.8)$$

ma postać

$$y(x) = \phi(x)e^{\frac{x}{h} \ln a} \quad (4.1.9)$$

Dowód opiera się na relacji

$$T(e^{bx}y(x)) = e^{b(x+h)}Ty(x). \quad (4.1.10)$$

Twierdzenie Rozwiązanie niejednorodnego równania

$$(T - a)y(x) = f(x) \quad (4.1.11)$$

jest wzór

$$y(x) = - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{a^{j+1}} g(x + jh), \quad (4.1.12)$$

jeśli ten szereg jest zbieżny w przestrzeni $H_k(R^1)$ [?].

Przedstawmy operator L z równania (4.1.1) w postaci

$$L = \sum_{m=-M}^N U_m T^m, \quad (4.1.13)$$

gdzie funkcje U_m reprezentują pewne potencjały. Przykładem operatora (4.1.13) może być różnicowy analog operatora

$$L = - \frac{d^2}{dx^2} + U(x), \quad (4.1.14)$$

który jest typowym operatorem Sturm–Liouville’a, występującym w mechanice kwantowej (również w teorii falowodów, w zagadnieniach przewodnictwa cieplnego). Operator różniczkowy może być przedstawiony za pomocą przybliżenia jako operator różnicowy. Korzysta się z tego faktu, gdy rozwiązuje się zagadnienia numerycznie [27]. Aby takie przejście było możliwe, musi w nim istnieć granica, przekształcenie musi być stabilne.

Operator L chcemy przekształcić w operator \tilde{L} :

$$\tilde{L} = \sum_{m=-M}^N \tilde{U}_m T^m. \quad (4.1.15)$$

Mamy zatem przejścia $U_m \rightarrow \tilde{U}_m$, czyli tzw. operację ubierania (dressing operation). Za pomocą takich operacji można z prostego równania i jego rozwiązania otrzymać inne, bardziej skomplikowane, zagadnienie. Potrzebny jest wzór na przejście $U_m \rightarrow \tilde{U}_m$. Funkcję ψ (czyli rozwiązanie równań (4.1.1) i (4.1.2)) poddamy transformacji Darboux. Mamy dwie drogi, można transformację Darboux “z plusem” lub “z minusem”

$$\tilde{\psi} = D^{\pm} \psi. \quad (4.1.16)$$

Zdefiniujemy operatory σ^+ i σ^- :

$$\sigma^{\pm} = \varphi (T^{\pm 1} \varphi)^{-1}, \quad (4.1.17)$$

gdzie φ również jest rozwiązaniem równań (4.1.1) i (4.1.2). Transformacje Darboux definiujemy następująco

$$D^{\pm} \psi = \psi - \sigma^{\pm} T^{\pm 1} \psi. \quad (4.1.18)$$

W dalszej części rozważamy operację D^+ , korzystamy z operatora σ^+ , który będziemy oznaczać “w skrócie” σ . Jeśli równanie (4.1.17) przemnożymy z prawej strony przez czynnik $T\varphi$, otrzymujemy

$$\sigma T \varphi = \varphi, \quad (4.1.19)$$

a stąd wynika, że

$$T \varphi = \sigma^{-1} \varphi. \quad (4.1.20)$$

Obliczmy $T^2 \varphi$:

$$T^2 \varphi = T(T \varphi) = T(\sigma^{-1} \varphi). \quad (4.1.21)$$

Skorzystaliśmy z (4.1.20). Uwzględniając automorfizm (4.1.5) i kontynuując obliczanie (4.1.21), zapiszemy

$$T^2 \varphi = T(\sigma^{-1}) T(\varphi) = T(\sigma^{-1}) \sigma^{-1} \varphi. \quad (4.1.22)$$

Teraz w podobny sposób obliczamy $T^3 \varphi$:

$$T^3 \varphi = T(T^2 \varphi) = T(T(\sigma^{-1})) T(\sigma^{-1}) T(\varphi) = T^2(\sigma^{-1}) T(\sigma^{-1}) \sigma^{-1} \varphi. \quad (4.1.23)$$

Zdefiniujmy operator mnożenia kolejnych potęg $T(\sigma^{-1})$:

$$B_m(\sigma) = \prod_{k=0}^{m-1} T^k(\sigma^{-1}). \quad (4.1.24)$$

Można wprowadzić różnicowy wielomian Bella, bardzo podobny do wielomianu różniczkowego, stosowanego dla operatorów różniczkowych.

Na podstawie zależności (4.1.20), (4.1.22) i (4.1.23) można zapisać

$$T^m \varphi = B_m(\sigma) \varphi. \quad (4.1.25)$$

Twierdzenie Darboux – Matveeva

$$\tilde{\psi}_t^+ = \sum_{m=-M}^N \tilde{U}_m^+ T^m \tilde{\psi}^+. \quad (4.1.26)$$

Poszczególne współczynniki \tilde{U}_m^+ przyjmują postaci

$$\tilde{U}_{-M}^+ = U_{-M}, \quad (4.1.27)$$

$$\tilde{U}_{-m}^+ = \sum_{l=0}^{m+M} [U_{-M+l} - \sigma^+(TU_{-M+l-1})B_{-M+l}^+(\sigma^+)(B_m^+(\sigma^+))^{-1}], \quad (4.1.28)$$

$$\tilde{U}_N^+ = \sigma^+(TU_N)(T^N \sigma^+)^{-1}. \quad (4.1.29)$$

Dla operatora σ^+ określonego wzorem (4.1.17), zachodzi

$$\sigma_t^+ = \sum_{m=-M}^N [U_m B_m^+(\sigma^+) - \sigma^+ T(U_m) B_{m+1}^+(\sigma^+) \sigma^+]. \quad (4.1.30)$$

Uwaga 1

W przypadku $N = M = 1$ równanie (4.1.30) jest różnicowym odpowiednikiem równania Burgersa, które służy do opisu fal uderzeniowych.

Zaletą przedstawionej metody jest duża stabilność numeryczna. Metoda pozwala wygenerować rozwiązania równań Laxa - też na drodze różnicowej. Ogólnie można powiedzieć, że metoda polega na dokonaniu przejścia od równania różniczkowego do równania różnicowego, które dają się optymalnie rozwiązywać numerycznie.

Uwaga 2

Wzory podobne do powyższych otrzymuje się dla drugiej transformacji “-”

$$D^- \psi = \tilde{\psi}. \quad (4.1.31)$$

Uwaga 3

W transformacji D^- mamy

$$\tilde{\psi} = \psi - \sigma^- T^{-1} \psi, \quad (4.1.32)$$

gdzie

$$\sigma^- = \varphi(T^{-1} \varphi)^{-1}, \quad (4.1.33)$$

więc

$$\tilde{\psi} = \psi - \varphi(T^{-1} \varphi)^{-1} T^{-1} \psi. \quad (4.1.34)$$

Rozważmy przypadek abelowy

$$T\psi(x) = T\psi(x+a); \quad T^{-1}\psi(x) = \psi(x-a) \quad (4.1.35)$$

Niech transformacja będzie ustalona z dokładnością do stałej

$$-a\tilde{\psi}(x) = \psi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x-a)}\psi(x-a). \quad (4.1.36)$$

Korzystając ze wzoru Taylora, można dokonać przybliżenia

$$f(x-a) \simeq f(x) - af'(x). \quad (4.1.37)$$

Powyższe przybliżenie wykorzystujemy w członach $\varphi(x-a)$ i $\psi(x-a)$ i dostajemy

$$\begin{aligned} -a\tilde{\psi}(x) &= \frac{\psi[\varphi(x) - a\varphi'(x)] - \varphi[\psi(x) - a\psi'(x)]}{\varphi(x) - a\varphi'(x)} = -a \frac{\psi(x)\varphi'(x) - \varphi(x)\psi'(x)}{\varphi(x) - a\varphi'(x)} \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} a \left[\psi'(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\psi(x) \right], \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

zatem

$$\tilde{\psi}(x) = - \left[\psi'(x) - \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\psi(x) \right] \xrightarrow{a \rightarrow 0} (\delta_x - \sigma^-)\psi(x), \quad (4.1.39)$$

gdzie

$$\sigma^- = \varphi'(x)/\varphi(x). \quad (4.1.40)$$

Całe rozumowanie można powtórzyć dla transformacji "+", we wzorach pojawiają się plusy zamiast minusów.

Podsumowując, jednym z celów metody jest uzyskanie różnicowego odpowiednika operatora L .

Uwaga 4

Odpowiednikiem równania KdV jest równanie

$$u_t = u_m u_{m-1} - u_m u_{m+1}. \quad (4.1.41)$$

Równanie to pojawia się w zagadnieniach związanych z fizyką plazmy, falami Langmuire'a.

Wiemy, że transformacja Darboux jest algorytmem o skończonej liczbie transformacji. Wartości własne i wektory własne uzyskuje się za pomocą procedury przybliżonej. Przejdźmy do operacji nieskończonych. Jeżeli istnieje faktoryzacja macierzy za pomocą takich dwóch macierzy, z których jedna spełnia warunek $\det B = 1$, a druga - $\det R = 1$, to można powiedzieć, że mnożąc macierz B przez Q z prawej strony, tzn. $Q^{-1}B$, stąd macierz A ma połączenie z macierzą B . Taki sposób jest możliwy do przeprowadzenia pod warunkiem, że macierz B jest nieosobliwa.

Stwierdzenie Proces Grama-Schmidta jest faktoryzacją jednoznaczną macierzy A , jeśli A jest macierzą kwadratową i istnieje macierz odwrotna.

Połączenie macierzy prowadzi do otrzymania algorytmu. Niech istnieje ψ , wówczas można stworzyć jako wyrażenie poprzez ψ .

Aby poprawić jakość faktoryzacji i przyspieszyć algorytm można zastosować dwa następujące zabiegi:

- 1) przesunięcie wartości własnych (85)
- 2) deflacja macierzy- stosowanie odpowiednich wzorów i równań w taki sposób, aby uzyskać jak najlepsze zbieżności i skuteczniejsze oprogramowanie obliczeniowe [13].

Rozdział 5

Faktoryzacja operatorów różniczkowych. Różniczkowe wielomiany Bella.

5.1 Wielomiany operatorów różniczkowych w pierścieniach

Obliczenia symboliczne i idea podejścia opiera się na odpowiednim algorytmie (operacje o skończonej ilości). Uzyskanie algorytmu poprzez faktoryzację, która ma bezpośredni związek z relacjami splątania i operatorów drabinkowych. Krok za krokiem, z różnych stron badamy to podejście. Operowanie wzorami nie zawsze może być jawne (tj. przez wyrażenie funkcją elementarną lub funkcją specjalną) lub przybliżone (oparte na wielomianach).

Osobne miejsce zajmują wielomiany (przypadek urwanych szeregów). Takie przypadki są badane szczególnie. Faktoryzacja wielomianu to znalezienie takich wielomianów, że ich iloczyn jest równy danemu. W tym wypadku rozwiązanie nietrywialne nie może zawierać wielomianu o tym samym stopniu, co wielomian faktoryzowany.

Uzyskanie odpowiednich wzorów opiera się na pojęciu rekurencji, następnie wykonaniu kolejnych transformacji, tak aby otrzymać potrzebne wzory, wielomiany i inne formacje.

1. Pierścień różniczkowy K

Rozwój pojęcia grupy, półgrupy doprowadziło do powstania pojęcia pierścienia z takimi operacjami jak dodawanie, mnożenie, różniczkowanie (D) (patrz wstęp i rozdz. 1).

Założenia:

1)

$$D(a + b) = Da + Db,$$

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

$$a, b \in K$$

2) Istnieje operacja

” $*$ ”

nazywana inwolucją. Przykładem jest sprzężenie zespolone.

$$(a^*)^* = a$$

(dla każdego a)

$$(a + b)^* = a^* + b^*$$

(operacja jest liniowa)

$$(ab)^* = b^* a^*$$

3)

$$(Da)^* = -Da^*$$

4) operatory

$$D^n$$

tworzą bazę w K-module

$$\Rightarrow$$

$$D^n \in Diff(K)$$

5) dla dowolnego elementu

$$S \in K$$

istnieje taki element

$$\varphi,$$

że

$$D\varphi = S\varphi. \tag{5.1.1}$$

Z tego wynika, że z powodu inwersji

$$D\phi = \phi S$$

(istnieje rozwiązanie i dla elementu S istnieje odwrotny element

$$\varphi^{-1}.$$

W zastosowaniu oznacza to najprościej zbiór macierzy. Jeśli macierz zależy od parametru, to każdy element macierzy jest różniczkowy.

5.2 Wielomiany Bella

$$B_n(S)$$

Mogą znaleźć zastosowanie w obliczeniach symbolicznych.

1)

$$B_0(S) = e$$

(element jednostkowy)

$$B_0^+(S) = e$$

$$B_n(S) = DB_{n-1}(S) + B_{n-1}(S) \cdot S, n = 1, 2, \dots, n \tag{5.2.2}$$

$$B_n^+(S) = -DB_{n-1}(S) + SB_{n-1}^+ \tag{5.2.3}$$

Stwierdzenie 1

Jeżeli

$$\varphi \in K$$

i

$$D\varphi = S\varphi$$

, który jest rozwiązaniem równania, wtedy

$$D^n \varphi = B_n(S) \varphi$$

(126)

Pozwala to wyliczyć i następnie zróżniczkować przez odpowiedni wielomian. Jeśli

$$\varphi$$

to element pierścienia, to macierz

$$\varphi_x = S\varphi$$

.

$$(127) \quad \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \beta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$(128) \quad \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \delta_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$(129) \quad \varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

Czy istnieją dwa niezależne liniowo wektory? Jeśli tak, to wtedy istnieje

$$\varphi$$

jako odwrotna macierz.

Układ dwóch równań różniczkowych I-go rzędu jest równoważny do równania II-go rzędu.

$$D^n \phi = (-1)^n \phi B_n^+(S), n = 1, 2 \dots n \quad (5.2.4)$$

Powstaje prawy i lewy wielomian Bella. Można przedstawić relacje pomiędzy tymi wielomianami w postaci

$$B_n^*(S) = B_n^+(S^*) \quad (5.2.5)$$

Uwaga

Jeżeli wprowadzi się operator

$$L_S = D - S,$$

wtedy

$$B_{n+1}^+ = -L_S B_n^+(S). \quad (5.2.6)$$

Przykłady

$$B_1(S) = S$$

$$B_1^+ = S$$

$$B_2(S) = DB_1(S) + B_1(S)S = S' + S^2$$

Wprowadzamy

$$B_{n,i}(S)$$

tak, że

$$B_{n,0} = e$$

(

$$n = 1, 2, \dots, n$$

). Liczymy wielomiany

$$B_{n+1}(S) = \sum_{i=0}^n B_{n,i} D^{n,i} S$$

$$B_{n,1} = S$$

$$B_{n,2} = S^2 + nDS$$

$$B_{n,3} = S^3 + nS'S + (n-1)SDS + \binom{n}{2} D^2 S$$

Następne rozważania dotyczyć będą dzielenia operatorów różniczkowych.

5.2.1 Faktoryzacja równań operatorów różniczkowych. Uogólnione równanie Rökktiego.

1)

$$L = \sum_{n=0}^N a_n D^n \tag{5.2.7}$$

gdzie:

$$D$$

to uogólniony operator różniczkowania,

$$a_n$$

to elementy pierścieni

$$a_n \in K.$$

2)

$$L = ML_S + r$$

(działanie z prawej strony),

$$L = L_S M^+ + r^+$$

(działanie z lewej strony),

$$L_S = D - S.$$

$r,$

r^+

to reszty z dzielenia)

Stwierdzenie 2 Równanie

$$r = \sum_{n=0}^N a_n B_n(S) \quad (5.2.8)$$

jest wynikiem równania (126). Na mocy stwierdzenia 1 otrzymujemy stwierdzenie 2.

$$M = \sum_{n=0}^{N-1} b_n D^n \quad (5.2.9)$$

gdzie

$$b_n = \sum_{k=n+1}^N a_k B_{k-1,n}(S),$$

przy

$$n = 0 \dots N - 1$$

$$S = (D\varphi) \varphi^{-1}$$

Otwiera to drogę do faktoryzacji.

Stwierdzenie 3

Aby operator

L

można było podzielić z prawej strony przez

$L_S,$

to musi zostać spełniony warunek

$$r = \sum_{n=0}^N a_n B_n(S) = 0 \quad (5.2.10)$$

Jeżeli powyższe równanie zostanie spełnione, to

$$L = M L_S \quad (5.2.11)$$

gdzie

$$M = \sum_{n=0}^{N-1} b_n D^n$$

zostało sformułowane w stwierdzeniu 2.

Dla przypadku, kiedy

$$N = 2$$

otrzymujemy

$$a_0 + a_1 S + a_2 B_2(S) \tag{5.2.12}$$

oraz

$$r = a_0 + a_1 S + a_2 (S' + S^2) = 0 \tag{5.2.13}$$

)

które jest uogólnionym równaniem Rökkiatiego.

Z powyższego równania widać brak większego wpływu nieabelowości na przeprowadzone działania.

Rozpoczynając od

$$r = 3, 4, \dots$$

dostajemy odpowiednie równanie typu Rökkiatiego (

$$r = \sum a_n B_n(S) = 0$$

)

Twierdzenie

Niech

$$\varphi$$

jest rozwiązaniem równania

$$L\varphi = 0.$$

Wtedy operator

$$L$$

określony wzorem (133) przedstawia się w postaci

$$L = M L_S \tag{5.2.14}$$

co oznacza, że

$$r = 0,$$

gdzie

$$S = (D\varphi) \varphi^{-1}$$

stanowi rozwiązanie uogólnionego równania Rökkiatiego postaci

$$r = \sum_{n=0}^N a_n B_n(S) = 0$$

.

Uwaga

Istnieje alternatywna możliwość

$$M^+ = \sum_{n=0}^{N-1} b_n^+ D^n \tag{5.2.15}$$

gdzie

$$b_n^+ = \sum B_{k-n-1}^+(S) a_k$$

oraz

$$r^+ = \sum B_k^+ a_k = 0. \tag{5.2.16}$$

5.2.2 Transformacja Darboux. Uogólnione równanie Burgersa.

Twierdzenie
Jeżeli funkcja

$$\psi$$

jest rozwiązaniem równania ewolucji

$$D_0\psi = L\psi$$

(144)
oraz

$$D_0\varphi = L\varphi$$

, (

$$D_0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$$

)
i istnieje

$$\varphi^{-1}$$

wtedy

$$\tilde{L} = L_S\psi = D\psi - S\psi \quad (5.2.17)$$

)
gdzie

$$S = (D\varphi)\varphi^{-1}$$

jest rozwiązaniem równania.

$$D_0\tilde{\psi} = \tilde{L}\psi$$

, gdzie

$$\tilde{L} = \sum_{n=0}^N \tilde{a}_n D^n \quad (5.2.18)$$

oraz

$$\tilde{a}_N = a_N$$

$$\tilde{a}_k = a_k + \sum_{n=k}^N a_n B_{n,n-k} + (Da_n - Sa_n) B_{n-1,n-1-k},$$

$$k = 0, \dots, N-1$$

Twierdzenie to oznacza, że budowanie modelu następuje na podstawie jawnych rozwiązań. Automatycznie rozwiązuje się równanie takie, że jeżeli

$$D_0S = Dr + [r, s] \quad (5.2.19)$$

wtedy

$$L_S$$

spląta operator

$$D_0 - L$$

tak , że

$$L_S (D_0 - L) = (D_0 - \tilde{L}) L_S \tag{5.2.20}$$

a funkcja

$$S = (D\varphi) \varphi^{-1}$$

rozwiązuje równanie, która jest ogólnym równaniem Burgersa.

Rozdział 6

Operatory całkowe, faktoryzacja równań całkowych

6.1 Operatory całkowe

Równaniem całkowym nazywamy równanie, w którym poszukiwana funkcja występuje pod znakiem całki. Rozważmy następujące równanie całkowe

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s) ds. \quad (6.1.1)$$

Można je przepisać w postaci

$$f(x) = K \cdot \varphi = \hat{K}\varphi. \quad (6.1.2)$$

Równanie to nazywa się równaniem Fredholma I rodzaju, operator \hat{K} nosi nazwę operatora Fredholma, a funkcja $K(x, s)$ zawiera informacje dotyczące działania operatora \hat{K} , jest to tzw. jądro całkowe tego operatora. Rozwiązanie równania polega na znalezieniu funkcji φ przy danych postaciach funkcji $K(x, s)$ i $f(x)$. Innym przykładem równania całkowego jest równanie Fredholma II rodzaju

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s) ds = f(x). \quad (6.1.3)$$

W szczególnym przypadku, jeśli w równaniach (6.1.1) i (6.1.3) funkcja $K(x, s)$ jest tożsamościowo równa zero dla $x < s$, otrzymamy tzw. równanie Volterry I rodzaju

$$f(x) = \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds = \hat{K}\varphi \quad (6.1.4)$$

oraz równanie Volterry II rodzaju

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds = f(x) \quad (6.1.5)$$

a operator \hat{K} nazywamy operatorem Volterry.

Równania Fredholma i Volterry należą do tzw. *problemów źle uwarunkowanych* (ill-posed problems).

Jeśli funkcja $K(x, s)$ jest ciągła na odcinku $[a, b]$, to można udowodnić, że istnieje rozwiązanie równania (6.1.3). Znajduje się je metodą iteracji (metoda kolejnych przybliżeń).

Istnieją związki pomiędzy operatorami całkowymi i operatorami różniczkowymi, istnieje więc droga od liniowych równań różniczkowych zwyczajnych do liniowych równań całkowych.

Rozważmy pewien operator \hat{T} :

$$\hat{T}\psi(x) = \psi(x + a). \quad (6.1.6)$$

Rozwijając funkcję ψ w punkcie x w szereg Taylora, zapiszemy

$$\psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi^{(n)}(x)a^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a\delta)^n}{n!} \psi(x), \quad (6.1.7)$$

gdzie symbol δ oznacza różniczkowanie. Z drugiej strony funkcję $\psi(x)$ możemy przedstawić za pomocą transformaty Fouriera

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{\psi}(k) dk, \quad (6.1.8)$$

zatem

$$\psi(x+a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ika} e^{ikx} \hat{\psi}(k) dk. \quad (6.1.9)$$

Porównując (6.1.6) i (6.1.9) można powiedzieć, że mamy do czynienia z pewnym operatorem całkowym. W ogólności operatory całkowe pokrywają wszystko, operatory różniczkowe i różnicowe również można wyrazić przez operatory całkowe.

21.12.2004

Uzupełnienie i kontynuacja poprzedniego wykładu. Rozważamy równania całkowe. Równanie Fredholma I rodzaju można zapisać w postaci

$$\lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (6.1.10)$$

Równanie to ze względu na zastosowania nazywa się niekiedy równaniem radaru lub równaniem tomografii. W zagadnieniach związanych z badaniem fal radarowych oraz z tomografią poszukuje się gęstości φ badanego ośrodka, aby określić ewentualne niejednorodności. Funkcja f opisuje falę odbitą od analizowanego obiektu. Bardziej złożone jest równanie Fredholma II rodzaju

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (6.1.11)$$

Można je w skrócie zapisać następująco

$$(1 + \lambda \hat{K}) \varphi = f, \quad (6.1.12)$$

przy czym

$$\hat{K} \varphi = \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds. \quad (6.1.13)$$

Jeśli $f = 0$, wówczas wzór (6.1.13) przyjmie postać

$$-\frac{1}{\lambda} \varphi(x) = \hat{K} \varphi(x). \quad (6.1.14)$$

Powyższe równanie jest całkowym równaniem spektralnym (równaniem na wartości własne). Jeśli jądro całkowe $K(x,s)$ jest funkcją ciągłą, to operator \hat{K} ma widmo dyskretne (ale nieskończone). Zdefiniujemy operator odwrotny (czyli tzw. rezolwentę) do operatora $(1 + \lambda \hat{K})$:

$$\varphi = (1 + \lambda \hat{K})^{-1} f. \quad (6.1.15)$$

Jeśli $\lambda \neq \lambda_n$, to $\exists (1 + \lambda \hat{K})^{-1}$. Oznacza to, że jeśli λ nie należy do widma operatora \hat{K} , to istnieje rezolwenta tego operatora. Mówimy o tzw. **alternatywie Fredholma** - albo λ jest rozwiązaniem równania jednorodnego (6.1.14), albo istnieje rezolwenta.

Uwaga

Rozwiązanie równania Fredholma I rodzaju jest niestabilne. Różne funkcje podcałkowe mogą prowadzić do tej samej wartości całki. Zwiększenie liczby kroków przy całkowaniu numerycznym może spowodować pogorszenie zbieżności.

6.2 Metody regularyzacji

1. “Obcinanie” zagadnienia - rozwiązanie otrzymuje się poprzez stosowanie skończonych, “urwanych” szeregów Fouriera.

Korzysta się z transformaty Fouriera, ale w szeregu uwzględnia się skończoną ilość członów N , liczba ta nosi nazwę parametru regularyzacji. Wraz ze wzrostem N rosną błędy, występuje niestabilność. Parametr regularyzacji dobiera się tak, aby zminimalizować błędy. Stosuje się metodę minimalnej entropii S . Postępowanie to można nazwać “walką o zwiększenie stosunku sygnału do szumu”.

2. Regularyzacja Tikhonova

Równanie Fredholma I rodzaju zastępuje się równaniem II rodzaju poprzez dodanie “małego” członu

$$\epsilon \varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (6.2.16)$$

Rozwiązanie $\varphi_\epsilon(x)$ zależy od parametru ϵ , który jest parametrem regularyzacji. Na podstawie metod wariacyjnych uzyskuje się optymalną wartość parametru regularyzacji ϵ_0 , odpowiada ona minimum pewnego funkcjonału. Otrzymujemy optymalne rozwiązanie $\varphi_{\epsilon_0}(x)$.

Są więc dwie metody regularyzacji, trzeba wybrać odpowiednią do danego zagadnienia.

Jak rozwiązać równanie Fredholma II rodzaju? (Prezentowana poniżej metoda nie umożliwia rozwiązywania równania I rodzaju). Chcemy rozwiązać równanie (6.1.11), w szczególności (6.2.16). Zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń. Zakładamy, że jądro $K(x, s)$ jest ograniczone w kwadracie $[a, b; a, b]$.

Przybliżenie 0 – w równaniu pomijamy całkę

$$\varphi_0(x) = f(x). \quad (6.2.17)$$

Przybliżenie 1 – uwzględniamy całkę, w całce korzystamy z przybliżenia zerowego

$$\varphi_1(x) = -\lambda \int_a^b K(x, s) f(s) ds + f(x) = -\lambda \hat{K} f + f = (1 - \lambda \hat{K}) f. \quad (6.2.18)$$

Przybliżenie 2 – korzystamy z przybliżenia pierwszego

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= -\lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_1(s) ds + f(x) = f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \left(f(s) - \lambda \int_a^b K(s, t) f(t) dt \right) ds \\ &= (1 - \lambda \hat{K} + \lambda^2 \hat{K}^2) f. \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

...

Przybliżenie n – korzystamy z poprzednich przybliżeń

$$\varphi_n(x) = -\lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds + f(x). \quad (6.2.20)$$

Realizacja metody kolejnych przybliżeń prowadzi do rozwiązania w postaci szeregu

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda \hat{K})^n f. \quad (6.2.21)$$

Tw. Fredholma

Szereg iteracyjny (6.2.21) jest zbieżny, jeśli $\lambda \neq \lambda_n$ dla ciągłego jądra $K(x, s)$ w kwadracie $[a, b; a, b]$.

Uwaga 1

Równanie różniczkowe liniowe może być przetransformowane do równania całkowego Volterry.

Uwaga 2

Dla równania Volterry

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds = f(x) \quad (6.2.22)$$

szereg (6.2.21) jest zbieżny przy dowolnym λ (operator Volterry nie ma wartości własnych). Założenie – $K(x, s)$ jest ciągle w kwadracie $[a, b; a, b]$.

Wszystko to stanowi punkt wyjścia do teorii służącej do rozwiązywania równań różniczkowych.

6.3 Przykład zagadnienia odwrotnego

Jednowymiarowe równanie Schrödingera ma postać

$$-\Psi'' + U(x)\Psi = E\Psi. \quad (6.3.23)$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu. Zagadnienie spektralne z tym równaniem należy do klasy zagadnień Sturm-Liouville'a. Dla prostoty zapisu zastosowano przeskalowane jednostki atomowe. Funkcja $U(x)$ wyraża potencjał, E jest parametrem spektralnym i opisuje energię. W mechanice kwantowej funkcja falowa $\Psi(x)$ opisuje stany kwantowe, określa prawdopodobieństwo. Funkcja $\Psi(x)$ określa stan kwantowy, jeśli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx < \infty. \quad (6.3.24)$$

Zagadnienie proste polega na tym, że mając dane $U(x)$, należy uzyskać rozwiązania

$$\Psi(x) \in \mathcal{H}, \quad (6.3.25)$$

czyli należące do przestrzeni Hilberta, oraz takie rozwiązania $\Psi_E(x)$, że

$$\int_E^{E+\Delta E} \Psi_E(x) dE = \Psi_{E, \Delta E}(x) \in \mathcal{H}, \quad (6.3.26)$$

a zatem

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_{E, \Delta E}(x)|^2 dx < \infty. \quad (6.3.27)$$

Wzór (6.3.25) jest związany z tzw. widmem dyskretnym, $\Psi \sim e^{-\kappa_n x}$, $E_n = -\kappa_n^2$. Widmo dyskretne opisuje stany związane. Wzór (6.3.26) określa widmo ciągłe, $\Psi_E \sim e^{ikx}$, $E = k^2$. Widmo ciągłe opisuje stany ciągłe, np. w przypadku $U(x) \equiv 0$ widmo ciągłe ma zakres $E \in [0, \infty]$.

Fizycznie w zagadnieniu mogą występować i stany związane i ciągłe. Przykład - atom wodoru. Gdy w atom uderza jakaś cząstka, może nastąpić wzbudzenie elektronu (na wyższy stan związany) lub też elektron może zostać wybity z atomu (widmo ciągłe).

Z zagadnieniem odwrotnym mamy do czynienia wtedy, gdy na podstawie pewnych danych (np. pomiarowych) chcemy znaleźć pewne wielkości (np. potencjał opisujący oddziaływanie w procesach rozproszeniowych). Zagadnienie odwrotne może być źle uwarunkowane (ill-posed problem) wg Hadamarda. W takich zagadnieniach istotne są informacje *a priori*, czyli pewne dane, które "z góry" znamy, np. badamy rozpraszanie fali w jakimś ośrodku, ale wiemy coś o rozkładzie gęstości w tym ośrodku.

Zagadnienie matematyczne (ogólne) wg Hadamarda:

1. Rozwiązanie nie istnieje, w zagadnieniu jest zbyt dużo równań.
2. Równań jest zbyt mało, brakuje informacji, które umożliwiłyby rozwiązanie problemu.
3. Rozwiązanie jest niestabilne, małe zmiany w sformułowaniu zagadnienia powodują duże zmiany w rozwiązaniu. Taki problem występuje np. w równaniu Fredholma I rodzaju.

Zagadnienie dla równania (6.3.23) zawiera:

1. Widmo dyskretne κ_n

$$a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \psi_n e^{\kappa_n x}. \quad (6.3.28)$$

2. Widmo ciągłe. Mamy falę padającą, opisywaną członem e^{ikx} (zakładamy, że fala nadlatuje z kierunku $x < 0$ i podąża w kierunku x dodatnich). Możemy obserwować efekty rozpraszania

$$\psi = e^{ikx} + v(k)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (6.3.29)$$

Powyższy wzór mówi, że po stronie $x < 0, x \rightarrow -\infty$ mamy zarówno falę padającą jak i odbitą (opisywaną członem z wykładnikiem $-ikx$). Funkcja $v(k)$ opisuje współczynnik odbicia. Natomiast po stronie $x > 0, x \rightarrow \infty$ mamy tylko falę przechodzącą

$$\psi = w(k)e^{ikx}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (6.3.30)$$

Funkcja $w(k)$ opisuje współczynnik przejścia. Współczynniki normuje się tak, aby

$$|v|^2 + |w|^2 = 1. \quad (6.3.31)$$

Celem jest znalezienie potencjału $U(x)$. Wprowadzamy funkcję

$$F(x) = \sum_m a_m \exp(-\kappa_m x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k) \exp(ikx) dk. \quad (6.3.32)$$

Znajdujemy postać $F(x+y)$, przechodzimy z $F(x+y)$ do $F(x,y)$ i tworzymy równanie całkowe

$$K(x,y) + F(x,y) + \int_x^{\infty} K(x,s)F(s,y) ds = 0. \quad (6.3.33)$$

Można powiedzieć, że zagadnienie odwrotne $\{\kappa_n, a_n, v(k)\}$ pozwala odtworzyć funkcję F i odpowiednie równanie całkowe. Równanie (6.3.33) jest podobne do równania Volterry, w równaniu tym należy znaleźć funkcję $K(x,s)$. Potencjał $U(x)$ znajduje się ze wzoru

$$U(x) = 2 \frac{dK(x,x)}{dx}. \quad (6.3.34)$$

Gelfand i Levitan (1951) oraz Marchenko (1954) wykazali, że rozwiązanie równania (6.3.33) istnieje. Od ich nazwisk równanie nazywa się równaniem GLM, powstała teoria GLM.

Uwaga

Potencjał może zależeć od czasu: $U = U(x,t)$.

Droga do równania KdV. Odpowiedni warunek zgodności operatorów

$$L_t = [L, A], \quad (6.3.35)$$

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + U \quad (6.3.36)$$

$$A\Psi = \Psi_t, \quad x \rightarrow \infty \quad (6.3.37)$$

Uzupełnienie i kontynuacja poprzedniego wykładu. Tworzymy algorytmy do rozwiązywania różnych zagadnień. Wprowadzamy różne operatory, korzystamy z różnych równań, np. algebraicznych.

6.4 Metoda “ubierania”

V. E. Zakharov, “On the dressing method”

Zagadnienia odwrotne należą do problemów źle uwarunkowanych (ill-posed problems) zgodnie z klasyfikacją Hadamarda. Przykłady zagadnień odwrotnych - obliczanie szukanych wielkości na podstawie danych pomiarowych. W zagadnieniu prostym mamy równania z danymi współczynnikami i chcemy na ich podstawie coś obliczyć. W zagadnieniu odwrotnym trzeba wyznaczyć współczynniki (np. lepkości, przewodnictwa cieplnego). Poszukuje się gęstości (niejednorodności) przestrzeni poprzez badanie fali odbitej. Dotyczy to problemów związanych z tomografią, radarem, lidarem.

Wracamy do poszukiwania informacji o oddziaływaniach (np. jądrowych) na podstawie równania Schrödingera, które dla widma ciągłego można zapisać w postaci

$$-\delta_x^2 \psi + U(x)\psi = k^2 \psi, \quad (6.4.1)$$

a dla widma dyskretnego

$$-\delta_x^2 \psi + U(x)\psi = -\kappa^2 \psi. \quad (6.4.2)$$

Symbol δ_x^2 oznacza dwukrotne różniczkowanie względem x . Rozwiązaniem równania (6.4.1) będzie funkcja $\psi(x, k)$ i będzie ona opisywać widmo ciągłe, natomiast funkcje $\psi(x, -\kappa_n)$, będące rozwiązaniami równania (6.4.2), będą przedstawiać stany związane. Rozważmy rozpraszanie elektronów na atomach. Elektron uderzający w atom może przez ten atom przelecieć, może zawrócić, lub też może zostać związany. Załóżmy, że elektrony nadlatują z kierunku przeciwnego do kierunku osi x . Funkcję $\psi(x, k)$ można zapisać następująco

$$\psi(x, k) = \begin{cases} e^{-ikx} + v(k)e^{ikx} & \text{dla } x > 0 \\ w(k)e^{-ikx} & \text{dla } x < 0. \end{cases} \quad (6.4.3)$$

Człon e^{-ikx} opisuje falę padającą, a składniki $v(k)e^{ikx}$ oraz $w(k)e^{-ikx}$, odpowiednio, falę odbitą i falę przechodzącą. Dla widma dyskretnego wprowadzamy unormowanie

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, -\kappa_n)|^2 dx = 1 \quad (6.4.4)$$

i definiujemy współczynniki

$$a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\kappa_n x} \psi(x, -\kappa_n). \quad (6.4.5)$$

Na podstawie wyników, które otrzymujemy badając rozpraszanie, uzyskujemy funkcje $F(x)$:

$$F(x) = \sum_m a_m \exp(-\kappa_m x) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(k) \exp(ikx) dk. \quad (6.4.6)$$

Znajdujemy postać $F(x+y)$, przechodzimy z $F(x+y)$ do $F(x, y)$ i tworzymy równanie całkowe GLM

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_x^{\infty} K(x, s)F(s, y) ds = 0, \quad (6.4.7)$$

lub w skrócie

$$K + F + K^*F = 0, \quad (6.4.8)$$

gdzie $*$ oznacza działanie operatora całkowego.

Twierdzenie

Mając dane z rozpraszania, dostajemy funkcję $K(x, y)$. Szukany potencjał otrzymujemy z zależności

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (6.4.9)$$

Równanie (6.4.7) łączy K i F , odwzorowuje dane z rozpraszania, pozwala uzyskać potencjał. Równanie GLM nie stanowi zagadnienia źle uwarunkowanego (*ill-posed*). Prowadzi ono do pewnego zagadnienia Cauchy'ego (zagadnienie z warunkiem początkowym).

Jak zrobić przejście do teorii równań różniczkowych nieliniowych? Przykładem równania różniczkowego nieliniowego jest równanie KdV, opisujące ruch długich fal na płytkiej wodzie. W równaniu tym pojawia się kolejny parametr - czas, $U \rightarrow U(x, t)$. Teoria GGKM: znaleziono wzory na współczynniki $a_m(t)$ oraz funkcję $v(x, t)$ na podstawie warunków z $a_m(0)$ i $v(x, 0)$.

Idea metody ubierania - każda funkcja F generuje funkcję K i potencjał, ale trudno jest rozwiązać pojawiające się równanie całkowe. Wygenerowano równanie solitonowe - poprzez "obcięcie" v . Jeśli założymy, że $v = 0$, dostajemy solitony, nieskończony ciąg rozwiązań szczególnych. Korzysta się z metody algebraicznej. Jeśli jądro całkowe można faktoryzować, uwzględnia się tylko skończoną ilość członów. Poszczególne człony oznaczone są indeksem $m = 1, \dots, N$. Otrzymujemy tzw. rozwiązanie N -solitonowe. Jako jądro traktujemy funkcję F .

Rozważmy przykład - równanie Fredholma II rodzaju

$$\varphi(x) + \lambda \int_A^B F(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (6.4.10)$$

Założmy, że jądro F ma postać

$$F(x, s) = a(x) b(s). \quad (6.4.11)$$

Jest to przykład jądra zdegenerowanego. Ogólnie jądro można opisać następująco

$$F(x, s) = \sum_{i=1}^N a_i(x) b_i(s). \quad (6.4.12)$$

Jeśli suma jest skończona, jądro jest zdegenerowane. Jeśli suma jest nieskończona, może reprezentować dowolną funkcję. Podstawiamy (6.4.11) do (6.4.10):

$$\varphi(x) + \lambda a(x) \int_A^B b(s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (6.4.13)$$

Niewiadomą jest $\varphi(x)$. Całkę zastąpimy stałą C :

$$\varphi(x) = -\lambda a(x) C + f(x). \quad (6.4.14)$$

Korzystamy z powyższej zależności w (6.4.13) i mamy

$$-\lambda a(x) C + \lambda a(x) \int_A^B b(s) [-\lambda C a(s) + f(s)] ds = 0, \quad (6.4.15)$$

a stąd

$$-C + \int_A^B b(s) [-\lambda C a(s)] ds + \int_A^B b(s) f(s) ds = 0, \quad (6.4.16)$$

a dalej

$$C \left(1 + \lambda \int_A^B b(s) a(s) ds \right) = \int_A^B b(s) f(s) ds. \quad (6.4.17)$$

Znane są f , a i b więc możemy znaleźć C :

$$C = \frac{\int_A^B b(s) f(s) ds}{1 + \lambda \int_A^B b(s) a(s) ds}. \quad (6.4.18)$$

W ogólniejszym przypadku

$$F(x, s) = \sum_{i=1}^N a_i(x) b_i(s), \quad (6.4.19)$$

przy czym zakładamy, że poszczególne $a_i(x)$ są liniowo niezależne. Korzystając z (6.4.19) w (6.4.10), mamy

$$\varphi(x) + \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) \int_A^B b_i(s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (6.4.20)$$

Pojawiło się N całek, zastępujemy je stałymi C_i :

$$\varphi(x) = -\lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) C_i + f(x). \quad (6.4.21)$$

Korzystamy z powyższej zależności w (6.4.20) i mamy

$$-\lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) C_i + \lambda \sum_{i=1}^N a_i(x) \int_A^B b_i(s) \left[-\lambda \sum_{j=1}^N a_j(s) C_j + f(s) \right] ds = 0, \quad (6.4.22)$$

a stąd (dzięki liniowej niezależności a_i)

$$-C_i + \int_A^B b_i(s) \left[-\lambda \sum_{j=1}^N C_j a_j(s) \right] ds + \int_A^B b_i(s) f(s) ds = 0. \quad (6.4.23)$$

Wyrażenie (6.4.23) opisuje układ N równań algebraicznych na współczynniki C_i . Po rozwiązaniu tego układu współczynniki należy podstawić do wzoru (6.4.21) i otrzymuje się rozwiązanie równania Fredholma przy ogólnym jądrze zdegenerowanym (6.4.19).

Uwaga

Zastosowana została metoda faktoryzacji jądra, można jej używać w przypadku dowolnego jądra. Można uzyskać przybliżone rozwiązanie równania Fredholma z dowolnym F . Jeśli jądro jest przedstawione jako nieskończona suma, uwzględnia się skończoną ilość wyrazów sumy.

Rozważmy przypadek N -solitonowy:

$$F(x, t) = \sum_{m=0}^N a_m(t) e^{-\kappa_m x}. \quad (6.4.24)$$

Czynniki $e^{-\kappa_m x}$ są liniowo niezależne. Współczynniki $a_m(t)$ mają postać

$$a_m(t) = a_0^{-8\kappa_m^3 t}. \quad (6.4.25)$$

Tworzymy funkcję $F(x, y, t)$:

$$F(x, y, t) = \sum_{m=0}^N a_m(t) e^{-\kappa_m(x+y)}, \quad (6.4.26)$$

przy czym y jest jedynie parametrem. Zależność (6.4.26) wykorzystujemy w równaniu analogicznym do (6.4.7).

Metoda zagadnień odwrotnych ma istotne znaczenie, jest stosowana np. w mechanice kwantowej. Wracamy do metody ubierania. Mamy równanie

$$K + F + K^* F = 0. \quad (6.4.27)$$

Rozważmy parę operatorów \hat{M} i M . Uwzględniamy je w równaniu (6.4.27):

$$\hat{M}K + MF + (\hat{M}K)^*F + K^*(MF) = 0. \quad (6.4.28)$$

Operator M nazywamy operatorem nagim (ang. bare), a \hat{M} operatorem ubranym (dressed). Rozważmy przypadek, gdy

$$MF = 0. \quad (6.4.29)$$

Funkcja F zawiera informacje o danych, np. ze zjawiska rozpraszania. O ile wszystkie funkcje są odpowiednio “porządne”, wyrażenie (6.4.28) przy warunku (6.4.29) prowadzi do zależności

$$\hat{M}K = 0, \quad (6.4.30)$$

pod warunkiem, że operator \hat{M} istnieje.

Stwierdzenie

Jeżeli dla danego operatora M istnieje operator \hat{M} , wówczas z relacji (6.4.29) wynika (6.4.30).

Przykład

Niech

$$M = \hat{M} = \delta_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (6.4.31)$$

$$F = F(x, y, t). \quad (6.4.32)$$

Stwierdzenie

Zbiór par M, \hat{M} tworzy przestrzeń liniową (czyli kombinacja liniowa tych par też należy do odpowiedniej przestrzeni). Można napisać równanie analogiczne do (6.4.28), a następnie dodać te równania stronami.

Niech

$$M = (\delta_x + \delta_y). \quad (6.4.33)$$

Podziałamy tym operatorem na równanie (6.4.27) (czyli na równanie (6.4.7)) i dostaniemy

$$MK(x, y) + MF(x, y) + \delta_x \int_x^\infty K(x, s)F(s, y) ds + \int_x^\infty K(x, s)\delta_y F(s, y) ds = 0. \quad (6.4.34)$$

Ponieważ w składniku z pierwszą całką występuje różniczkowanie względem zmiennej, będącej dolną granicą całkowania, zapiszemy

$$\delta_x \int_x^\infty K(x, s)F(s, y) ds = -K(x, x)F(x, y) + \int_x^\infty (\delta_x K(x, s)) F(s, y) ds. \quad (6.4.35)$$

Rozważmy całkę

$$I = \int_x^\infty (\delta_s K(x, s)) F(s, y) ds = - \int_x^\infty K(x, s)\delta_s F(s, y) ds - K(x, x)F(x, y). \quad (6.4.36)$$

Skorzystaliśmy z “całkowania przez części”. W równaniu (6.4.34) uwzględniamy (6.4.35) i wprowadzamy I (przez dodanie i odjęcie)

$$\begin{aligned} MK(x, y) + MF(x, y) - K(x, x)F(x, y) + \int_x^\infty (\delta_x K(x, s)) F(s, y) ds \\ + \int_x^\infty K(x, s)\delta_y F(s, y) ds + I - I = 0. \end{aligned} \quad (6.4.37)$$

Jako $+I$ podstawiamy środkowy człon wyrażenia (6.4.36), a w składniku $-I$ za I podstawiamy prawą część wyrażenia (6.4.36)

$$MK(x, y) + MF(x, y) - K(x, x)F(x, y) + \int_x^\infty (\delta_x K(x, s)) F(s, y) ds + \int_x^\infty K(x, s) \delta_y F(s, y) ds + \int_x^\infty (\delta_s K(x, s)) F(s, y) ds + \int_x^\infty K(x, s) \delta_s F(s, y) ds + K(x, x)F(x, y) = 0. \quad (6.4.38)$$

Porządkując składniki, otrzymamy

$$(\delta_x + \delta_y)K(x, y) + MF(x, y) + \int_x^\infty [(\delta_x + \delta_s) K(x, s)] F(s, y) ds + \int_x^\infty K(x, s) (\delta_y + \delta_s) F(s, y) ds = 0. \quad (6.4.39)$$

Powstał operator

$$\hat{M} = M = \delta_x + \delta_y. \quad (6.4.40)$$

11.01.2005

Każde zagadnienie polegające na “wyciąganiu” informacji z pewnych danych pomiarowych stanowi zagadnienie odwrotne. Metoda ubierania jest metodą algebraiczną. Równaniem bazowym jest w niej równanie całkowe GLM

$$K(x, y) + F(x, y) + \int_x^\infty K(x, s)F(s, y) ds = 0 \quad (6.4.41)$$

a w krótszym zapisie

$$K + F + K^*F = 0, \quad (6.4.42)$$

przy czym $*$ oznacza mnożenie z całkowaniem. Znajdując funkcję K można znaleźć potencjał

$$U(x) \sim \frac{dK(x, x)}{dx}. \quad (6.4.43)$$

Równanie (6.4.41) jest równaniem Volterry II rodzaju, które w ogólnym przypadku ma postać

$$\varphi(x) + \lambda \int_a^x K(x, s)\varphi(s) ds = f(x). \quad (6.4.44)$$

Metoda kolejnych przybliżeń prowadzi do rozwiązania w postaci szeregu

$$\varphi(x) = K^{n*}f(x). \quad (6.4.45)$$

W przypadku równania Fredholma rozwiązanie istnieje zawsze poza przypadkiem, gdy λ odpowiada wartości własnej. Natomiast w przypadku równania Volterry rozwiązanie zawsze istnieje.

Stwierdzenie *

Jednorodne równanie Volterry posiada tylko rozwiązanie zerowe ($f = 0 \Rightarrow \varphi = 0$). Operator Volterry nie ma wartości własnych.

Równania całkowe odpowiadające równaniom różniczkowym to zazwyczaj równania Volterry. Dowód na to, że równania różniczkowe przechodzą w całkowe można znaleźć w książce Adama Piskorka “Równania całkowe”. Wiele teorii dotyczącej obliczeń symbolicznych można znaleźć w czasopiśmie *Journal of Symbolic Computations* oraz *Inverse Problems*.

Rozważmy równanie

$$\hat{M}K + MF + (\hat{M}K)^*F + K^*(MF) = 0. \quad (6.4.46)$$

Funkcja F zawiera dane opisujące rozpraszanie, K zawiera potencjał. Można w ten sposób badać również inne oddziaływania.

Operatory M i \hat{M} to, odpowiednio, operator nagi i ubrany.

Stwierdzenie 1

Założmy, że operator M w działaniu na funkcję F daje zero

$$MF = 0. \quad (6.4.47)$$

Wówczas, jeśli istnieje operator \hat{M} , to

$$\hat{M}K = 0. \quad (6.4.48)$$

Wynika to ze stwierdzenia *.

Uwaga

Operator M nazywa się ubieralnym.

Połączenie wyników rozpraszania z potencjałem wykorzystano w teorii równań nieliniowych, w których występuje dodatkowy parametr, np. czas, $U = U(x, t)$. W mechanice kwantowej - jeśli potencjał zależy od czasu, pozwala to na sterowanie układem. Ogólnym równaniem fizyki matematycznej jest równanie ewolucji. Problem, w którym potencjał jest funkcją czasu, można rozwiązać, ponieważ operator pochodnej względem czasu δ_t jest ubieralny. Zbiór operatorów ubieralnych tworzy przestrzeń liniową.

Stwierdzenie 2

Uogólnienie stwierdzenia 1, dodanie czasu

$$MF(x, y, t) = 0 \Rightarrow \hat{M}K(x, y, t) = 0. \quad (6.4.49)$$

Jest to krok w kierunku równań nieliniowych. Metoda zagadnień odwrotnych w połączeniu z operatorowymi parami Laxa jest stosowana do rozwiązywania zagadnień nieliniowych (GGKM 1967). Poszukuje się funkcji U .

Niech funkcja ψ będzie jednocześnie rozwiązaniem dwóch równań

$$(\delta_t - LU)\psi = 0, \quad (6.4.50)$$

$$(\delta_y - AU)\psi = 0. \quad (6.4.51)$$

Jeśli pochodne względem t i względem y komutują ($\delta_t\delta_x = \delta_x\delta_t$), wówczas

$$A_t - L_y = [A, L]. \quad (6.4.52)$$

Parę operatorów spełniającą powyższą zależność nazywa się parą Laxa.

5Stwierdzenie 3

Jeśli mamy dwa operatory N i \hat{N} , takie, że istnieje rozwiązanie równania (6.4.46) (op. N jest obieralny) i jeśli operator N tworzy parę Laxa z operatorem M , to operatory \hat{N} i \hat{M} również tworzą parę Laxa. Jeśli para operatorów N i M tworzy równanie nieliniowe, to para \hat{N} i \hat{M} tworzy samo równanie.

Przykład

$$N = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \delta_x^2 - \delta_y^2. \quad (6.4.53)$$

Chcemy "ubrać" operator N , zadziałamy nim na równanie GLM (6.4.46). Po drodze wykorzystamy z całkowania przez części. Otrzymamy operator

$$\hat{N} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \delta_x^2 - \delta_y^2 + U(x), \quad (6.4.54)$$

gdzie

$$U(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x). \quad (6.4.55)$$

W operatorze ubranym pojawiła się funkcja U . W przypadku operatora pierwszego rzędu (6.4.33) operator ubrany był taki sam jak nagi (6.4.40). Istnienie operatora \hat{N} oznacza, że operator N jest ubieralny.

Uogólnienie. Niech

$$L_0 = l_0(x, t, \dots) \partial_x^n. \quad (6.4.56)$$

Rozważmy operator D o następującej strukturze

$$DF = \alpha \partial_t F + L_0 F - FL_0^+, \quad (6.4.57)$$

gdzie L_0^+ jest operatorem samosprzężonym do L i działa z prawej strony.

Stwierdzenie

Operator o strukturze (6.4.57) jest ubieralny. Operator ubrany \hat{D} ma postać

$$\hat{D}K = \alpha \partial_y K + LK - KL_0^+, \quad (6.4.58)$$

gdzie

$$L = L_0 + \tilde{L}, \quad (6.4.59)$$

przy czym

$$\tilde{L} = \hat{l}_0 \partial_x^{n-1} + \dots \quad (6.4.60)$$

$$\hat{l}_0 \sim (\partial_x - \partial_y)^i K|_{y=x}. \quad (6.4.61)$$

Przykład

$$L_0 = \partial_x^2 \quad \Rightarrow \quad L = \partial_x^2 + U. \quad (6.4.62)$$

Rozwiązuje się równanie

$$MF = 0, \quad (6.4.63)$$

spełnione będzie również równanie

$$\hat{M}K = 0. \quad (6.4.64)$$

Powstaje pewna klasa rozwiązywalnych równań, związana z odpowiednią przestrzenią liniową.

Rozważmy operatory D_1 i D_2

$$D_1 F = \alpha_1 \delta_{t_1} F + L_0^{(1)} F - FL_0^{(1)+}, \quad (6.4.65)$$

$$D_2 F = \alpha_2 \delta_{t_2} F + L_0^{(2)} F - FL_0^{(2)+}. \quad (6.4.66)$$

Operatory te prowadzą do równania Laxa

$$\alpha_1 \delta_{t_1} L_0^{(2)} - \alpha_2 \delta_{t_2} L_0^{(1)} + [L_0^{(1)}, L_0^{(2)}] = 0. \quad (6.4.67)$$

Jeśli odpowiednio dobierzemy postaci operatorów różniczkowych $L_0^{(1)}$ i $L_0^{(2)}$ oraz przyjmiemy, że $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = -1$, $t_1 = y$ i $t_2 = t$, to otrzymamy równanie Kadomtseva-Petviashvili (1971)

$$\delta_x (u_t + 6uu_x + u_{xxx}) + \alpha^2 u_{yy} = 0. \quad (6.4.68)$$

W przypadku $\alpha^2 = -1$ mamy równanie KP1, natomiast gdy $\alpha^2 = 1$ mówimy o równaniu KP2. Równanie Kadomtseva-Petviashvili jest uogólnieniem równania Kortewega - de Vriesa (KdV)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0. \quad (6.4.69)$$

Wymienione równania wykorzystywane są do opisu niestabilności plazmy, do badania fal na powierzchni wody.

6.5 Symetria równania różniczkowego

O symetrii można mówić np. wtedy, gdy w dwóch różnych układach wykonujemy to samo doświadczenie i otrzymujemy te same wyniki.

Transformacje Lorentza opisują transformacje czasoprzestrzeni. Symetrię względem transformacji Lorentza posiadają równania Maxwella. W wielu zagadnieniach pole elektromagnetyczne jest jedynym źródłem przesyłania informacji. Zbiór transformacji Lorentza stanowi grupę Lorentza, po dodaniu transformacji przesunięcia, mówimy o grupie Poincarego. Nie ma grupy ruchów w czasoprzestrzeni szerszej od grupy Poincarego.

Są różne drogi do wprowadzenia pojęcia symetrii. Rozważmy równanie

$$F(x, y) = 0. \quad (6.5.1)$$

Funkcja F może określać pewną krzywą $y(x)$, $y = f(x)$. Istotne jest, co się stanie, gdy w płaszczyźnie xy dokona się transformacji, zdefiniuje się nowe współrzędne

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y). \quad (6.5.2)$$

W wyniku transformacji powstanie nowa funkcja $F'(x', y')$. O symetrii mówimy wtedy, gdy po transformacji forma funkcji F się nie zmieniła

$$F' = F. \quad (6.5.3)$$

Jako przykład weźmy funkcję

$$F = y - kx - b. \quad (6.5.4)$$

W tym przypadku krzywa odpowiadająca równaniu (6.5.1) będzie opisywana funkcją liniową $y = kx + b$ a jej wykres byłby prostą. Kształt tej krzywej nie uległby zmianie, gdyby osie układu współrzędnych przesuwano wzdłuż x lub y , zachodzi więc symetria względem transformacji przesunięcia, można wprowadzić klasę przesunięć.

Przejdźmy do symetrii równań różniczkowych, dalszy ciąg rozważań.
Zajmujemy się teraz równaniami liniowymi. Wprowadzenie równań liniowych opiera się na symetrii względem przeskalowania.

Przykład 1: Szukamy funkcji $y(x)$, będącej rozwiązaniem równania

$$F(y, y', y'', \dots, x) = 0. \quad (6.5.5)$$

Rząd najwyższej pochodnej określa rząd równania. Wprowadźmy transformację przeskalowania amplitudy funkcji $y(x)$

$$\tilde{y} = \alpha y. \quad (6.5.6)$$

Stała α nosi nazwę parametru separacji. Ze wzoru (6.5.6) wynika, że

$$y = \alpha^{-1} \tilde{y}. \quad (6.5.7)$$

Funkcja y zależy od zmiennej x , która nie podlega transformacji. Równanie (6.5.5) przepiszemy w postaci

$$F(\alpha^{-1} \tilde{y}, \alpha^{-1} \tilde{y}', \alpha^{-1} \tilde{y}'', \dots, x) = 0. \quad (6.5.8)$$

Równanie (6.5.5) posiada symetrię względem transformacji (6.5.6), jeśli funkcja F pozostaje nie zmieniona

$$F(\alpha^{-1} \tilde{y}, \alpha^{-1} \tilde{y}', \alpha^{-1} \tilde{y}'', \dots, x) = F(\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}'', \dots, x). \quad (6.5.9)$$

Gdy funkcja F nie zmienia się, mówimy o niezmienniczej formie równania. Symetria równania względem transformacji przeskalowania oznacza, że równanie jest liniowe. Dla przykładu przyjrzyjmy się równaniu

$$y'' + xy + y = 0. \quad (6.5.10)$$

Zmiana amplitudy funkcji y (czyli przemnożenie jej przez stałą) nie wpływa na postać równania i kształt tej funkcji, zatem równanie jest liniowe (niezmiennicze ze względu na transformację przeskalowania).

Przykład 2. Przyjrzyjmy się równaniu

$$-y'' + x^2y = \lambda y. \quad (6.5.11)$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego, opisuje drgania układów mechanicznych, cząsteczek, jest stosowane również w fizyce ciała stałego. Równanie to ma formę (6.5.5). Dokonajmy transformacji odbicia współrzędnej x

$$\tilde{x} = -x. \quad (6.5.12)$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\tilde{x}^2 = x^2. \quad (6.5.13)$$

Ponieważ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\tilde{x}}{dx} \frac{dy}{d\tilde{x}} = -\frac{dy}{d\tilde{x}}, \quad (6.5.14)$$

stąd

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (-1)^2 \frac{d^2y}{d\tilde{x}^2} = \frac{d^2y}{d\tilde{x}^2}. \quad (6.5.15)$$

Można więc zapisać

$$F(y, y'', x) = -y'' + x^2y - \lambda y = F\left(y(\tilde{x}), \frac{d^2y(\tilde{x})}{d\tilde{x}^2}, \tilde{x}\right). \quad (6.5.16)$$

Funkcja F w nowych współrzędnych będzie miała tę samą formę. Rozwiązanie również będzie miało w nowych współrzędnych taką samą formę jak we współrzędnych przed transformacją. Rozwiązania będą się pokrywać, można powiedzieć, że w wyniku transformacji nie zmienia się równanie i nie zmienia się klasa rozwiązań. Jeśli $y(x)$ jest rozwiązaniem równania (6.5.11), to $y(\tilde{x})$ jest rozwiązaniem równania

$$-\frac{d^2y(\tilde{x})}{d\tilde{x}^2} + \tilde{x}^2y(\tilde{x}) = \lambda y(\tilde{x}). \quad (6.5.17)$$

Zatem $y(-x) \in U_{rozw}$, gdzie U_{rozw} oznacza przestrzeń rozwiązań równania (6.5.11).

Możemy wymienić dwa typy transformacji:

1. Transformacje ciągłe, zależne od parametru, dotyczące y .
2. Transformacje dyskretne, dotyczące x .

Ogólnie symetrię można określić jako niezmienniczość równania względem transformacji pewnej klasy.

Wprowadza się algorytmy, które mają na celu doprowadzenie do symetrii funkcji F , czyli do symetrii równania.

Rozważmy funkcję $y(x, t)$. Wprowadźmy transformację współrzędnych

$$x' = f(x, t), \quad t' = g(x, t) \quad (6.5.18)$$

Wyjściowe równanie

$$F(y, y_x, y_t, \dots, x, t) = 0 \quad (6.5.19)$$

przejdzie w

$$F\left(y(x', t'), \frac{\partial y(x', t')}{\partial x'}, \frac{\partial y(x', t')}{\partial t'}, \dots, x', t'\right) = 0. \quad (6.5.20)$$

Szukamy odpowiedniej postaci funkcji f i g . Wprowadźmy transformacje nieskończenie małe

$$x' = x + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \dots, \quad (6.5.21)$$

$$t' = t + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \varepsilon} + \dots \quad (6.5.22)$$

W rozwinięciach funkcji $f(x, t, \varepsilon)$ i $g(x, t, \varepsilon)$ w szeregi uwzględniliśmy tylko dwa pierwsze składniki. Okazuje się, że łatwiejsze jest poszukiwanie pochodnych niż samych funkcji f i g

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = X(x, y). \quad (6.5.23)$$

Znalezienie odpowiednich funkcji pozwala odpowiedzieć na pytanie, jaką symetrię posiada dane równanie. MACSYMA - [http://www.symbolicnet.org/systems](http://www.symbolicnet.org/systems/macsyms) ■ [acsyma.html](http://www.symbolicnet.org/systems/macsyms/html) - jeden z pakietów publicznych symbolicznych, może być wykorzystany dla definicji symetrii równań.

Występowanie symetrii prowadzi do pewnej klasy rozwiązań. Z symetrii korzysta się zwłaszcza przy rozwiązywaniu trudnych zagadnień

6.6 Metoda ubierania via problem Riemanna-Hilberta : wymiar 1+1

6.6.1 Zagadnienie Riemanna- Hilberta z parametrem

Rozważmy następujące równanie na krzywej $L \in Z$ na płaszczyźnie zespolonej

$$\phi_+(k) \phi_-(k) = G_0(k) \quad (6.6.24)$$

gdzie $k \in L$ jest parametrem, zaś

$$G_0(k),$$

$$\phi_{\pm}$$

są macierzami,

$$\phi_+$$

jest funkcją analityczną wewnątrz krzywej

$$L,$$

a

$$\phi_-$$

jest funkcją analityczną na zewnątrz krzywej

$$L.$$

Faktoryzacja (6.6.24) nie jest jednoznaczna. M jest macierzą kwadratową jeśli istnieje

$$\phi_+^1 = \phi_+ M, \quad \phi_-^1 = M^{-1} \phi_-, \quad (6.6.25)$$

$$M_{\pm}^{-1}$$

Brakuje tutaj unormowania. Wybieramy

$$\phi_{\pm} \rightarrow I \quad (6.6.26)$$

w obszarze analityczności.

Warunki (6.6.24), (6.6.26) określają zagadnienie Riemanna-Hilberta. Rozwiązanie jest teraz jednoznaczne. Z warunku (6.6.26) wystarczy określić funkcję

$$\phi_{\pm}$$

Rozważmy dalej macierz

$$E(x, k)$$

taką, że

$$G(x, k) = E(x, k) G_0(k) E^{-1}(x, k) \quad (6.6.27)$$

To pozwala przejść od równania (6.6.27) do wyrażenia (6.6.24) przez faktoryzację nowej macierzy.

$$\phi_-^{-1}(x, k) \phi_+(x, k) = G(x, k) \quad (6.6.28)$$

Różniczkujemy powyższe równanie względem x , co przybiera postać:

$$-\phi_-^{-1}\phi_x-\phi_-^{-1}\phi_+ + \phi_-^{-1}\phi_{+x} = G_x = E_x G_0 E^{-1} - E G_0 E^{-1} E_x E^{-1}$$

gdzie

$$\phi_{+x} = \phi_- G_x + \phi_{-x} \phi_-^{-1} \phi_+ = \phi_- (E_x G_0 E^{-1} - E G_0 E^{-1} E_x E^{-1}) + \phi_{-x} \phi_-^{-1} \phi_+$$

natomiast niech

$$E_x = U_0 E$$

jest rozwiązaniem równania ewolucyjnego

$$U_n \psi = \psi_n.$$

$$U = \phi_- (U_0 E G_0 E^{-1} - E G_0 E^{-1} U_0 + \phi_{-x} \phi_-^{-1} \phi_+)$$

$$\phi_{+x} = U \phi_+ - \phi_+ U_0$$

zaś

$$U = \phi_+ U_0 \phi_+^{-1} + \phi_{+x} \phi_+$$

Dla nowych funkcji

$$\psi_{\pm x} = \phi_{\pm} E,$$

zatem nowe rozwiązanie przyjmuje postać

$$\psi_{\pm x} = U \psi_{\pm}$$

(tzw. procedura „dressing”), gdzie

$$U_0 \rightarrow U.$$

Uwaga

$$U_0$$

może być „0”.

Uwaga Zagadnienie Riemanna- Hilberta może zostać uogólnione.

$$\phi_{\pm}$$

mogą mieć punkty

$$k = k_i$$

, w których wyznacznik

$$\det \phi_{\pm} = 0$$

gdy

$$\phi_+ = 0,$$

to w

$$\phi_-$$

jest punkt nieosobliwy, dążący do nieskończoności

∞

i

$$\phi_-^{-1} \phi_+ = G$$

.

6.6.2 Zagadnienie Riemanna- Hilberta z zerami

Rozważmy np. potencjał U solitonowy.

Przykład Rozważmy macierze U

$$2 \times 2$$

$$\psi_x = U\psi \tag{6.6.29}$$

$$U = -ik\sigma_3 + Q$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & u \\ -u & 0 \end{pmatrix}$$

Jeżeli rozważymy dodatkowe równanie

$$\psi_t = V\psi \tag{6.6.30}$$

$$\psi_{xt} = \psi_{tx} \tag{6.6.31}$$

$$U_t - V_x = [U, V] \tag{6.6.32}$$

$$iu_t - u_{xx} + 2|u|^2 u = 0 \tag{6.6.33}$$

Z połączenia wzorów (6.6.29), (6.6.30) i (6.6.31) można otrzymać równanie (6.6.32). Równanie (??) można zastosować do zagadnienia Riemanna- Hilberta, ale potrzebne jest

$$\psi_{\pm}(x, t, k)$$

Jak odtworzyć zagadnienie Riemanna- Hilberta?

Rozważmy Q jako potencjał macierzowy w zagadnieniu spektralnym

$$\psi_x = U\psi,$$

$$I = \psi E^{-1}$$

gdzie:

$$E = \exp\{-ikx\sigma_3\}.$$

Poprzez wstawienie

$$\psi$$

do (97) otrzymuje się

$$J_x = -ik[\sigma_3, J] + QJ \tag{6.6.34}$$

Rozważmy:

$$J_{\pm} \rightarrow I$$

to funkcje Josta.

Ślad macierzy U wynosi zero (Q też jest zerowe).

$$TrU = 0$$

$$\det J_{\pm} = 1$$

Przejście

$$\psi \rightarrow J$$

pozwala na rozwiązanie prostszych funkcji asymptotycznych.

$$J_- = J_+ E S E^{-1}$$

$$\psi_- = S \psi_+$$

gdzie

$$S(k) = \begin{pmatrix} a(k) & -\bar{b}(k) \\ b(k) & \bar{a}(k) \end{pmatrix}$$

$$\det S(k) = 1$$

, a

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Drugi warunek na macierz jest zawarty w równaniach:

$$J_{\pm}^+ = J_{\pm}^+(x, k)$$

$$S^+ = S^{-1}$$

(6.6.35)

Do rozwiązania zagadnienia potrzeba więcej informacji o funkcji Josta.

Można przedstawić wyrażenie (6.6.34) w postaci równań unitarnych (6.6.35)

$$(J_-)_{11}(x, t) = 1 + \int_{-\infty}^x \int \int d\xi U(\xi) (J_-)_{21}(\xi, k)$$

$$(J_-)_{12}(x, t) = - \int_{-\infty}^x \int \int d\xi \bar{U}(\xi) (J_-)_{11}(\xi, k) \exp[zik(x - \xi)]$$

gdym

$$Imk > 0$$

. (113)

Podobne operacje można wykonać dla drugiej kolumny.

$$J_+^{[2]}$$

analityczna w

$$Imk > 0$$

.
Wtedy

$$\phi_+ = (J_-^{[1]}, J_+^{[2]})$$

która jest rozwiązaniem równania spektralnego (6.6.24).

$$\Phi_+ = (J_-^{[1]}, J_+^{[2]}) - (aJ_+^{[1]} + be^{zikx}J_+^{[2]}, J_+^{[2]})$$

Zagadnienia:

1. Operatory drabinkowe, obniżanie i podnoszenie wartości własnych.

$$[M, A^\pm] = \pm A^\pm,$$

$$M\psi_m = m\psi_m, \quad \psi_m \in \mathcal{H}$$

\mathcal{H} - przestrzeń Hilberta.

$$A^-\psi_m = D_m\psi_{m-1},$$

$$A^+\psi_m = C_m\psi_{m+1}.$$

$$(A^-)^\dagger = A^+$$

czyli operatory są hermitowsko sprzężone. Wyprowadzić wzory na C_m, D_m .

2. Faktoryzacja dowolnej macierzy 2x2. W tym - A=QR, gdzie Q jest macierzą ortogonalną a R jest górna trójkątną. Podać wzory jawne na elementy macierze Q i R.
3. Faktoryzacja λ - macierzy Rozważmy λ macierz $D_\lambda = p\lambda - \sigma$ gdzie

$$p^2 = p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

która spląta wielomiany pierwszego rzędu:

$$(A_1\lambda + B_1)(p\lambda - \sigma) = (p\lambda - \sigma)(A\lambda + B).$$

Wtedy

$$A_1p = pA, \quad B_1p - A_1\sigma = -\sigma A + pB, \quad B_1\sigma = \sigma B.$$

Naprzykład:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zagadnienie dotyczy relacji splątania. Należy umieć znaleźć b_1, a_1 .

4. Metoda QR. Wygenerowanie łańcucha całkownego. Zastosowania.
5. Zagadnienie RH (Riemanna-Hilberta) i procedura ubierania. Prosty przykład skalarny.
6. Faktoryzacja operatora równania Bessela w polu liczb zespolonych

$$B_\nu = x^2 D^2 + xD + x^2 - \nu^2.$$

(np. $\nu = 1$).

7. Transformacja Darboux dla operatora Bessela (lub operatora oscylatora harmonicznego) przez faktoryzację .
8. Jak rozwiązać równanie Burgersa

$$u_t + uu_x + u_{xx} = 0?$$

9. Faktoryzacja operatora różnicowego drugiego rzędu $T^2\psi + a(x)T + b(x)$. Przykład.
10. Sformułowanie zagadnienia odwrotnego dla jednowymiarowego równania Schrödingera

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi + u(x)\psi = E\psi.$$

11. Symetria równania różniczkowego. Z badać, jaką symetrię ma równanie

$$-\psi'' + u\psi = \lambda\psi.$$

Bibliografia

- [1] M. Kubale Cztery algorytmy które wstąpiły światem. Piśmo PG, Politechnika Gdańska, Gdańsk, 2011.
- [2] Poradnik inżyniera, Matematyka. Konsultant: T. Trajdos, Warszawa, 1986.
- [3] L. Infeld, T. E. Hull, *The factorization method*, Rev. Mod. Phys. 23 (1951) 21-68
- [4] A. Joseph, *Self-adjoint ladder operators* (I), Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 829-837
- [5] C. A. Coulson, A. Joseph, *Self-adjoint ladder operators* (II), Rev. Mod. Phys. 39 (1967) 838-849
- [6] A. Joseph, *Self-adjoint ladder operators* (III), Rev. Mod. Phys. 40 (1968) 845-871
- [7] U. Fano, D. Green, J. L. Bohn, T. A. Heim, *Geometry and symmetries of multi-particle systems* J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 32 (1999)
- [8] G. M. Fichtenholz, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, tom 3, PWN, Warszawa, 1997
- [9] G. Drwal, R. Grzymkowski, A. Kapusta, D. Słota. Mathematica. Podstawy. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego. Gliwice 1995
- [10] G. Drwal, R. Grzymkowski, A. Kapusta, D. Słota. Mathematica. Programowanie I zastosowania. Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego. Gliwice 1995
- [11] Mathematica. Wolfram Research. <http://www.wri.com>
- [12] Smith B.T. et al., Matrix eigenvalue routines - EISPACK guide, Lectures Notes in Computer science, v 6, Springer-Verlag (1992).
- [13] Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem, Clarendon press, Oxford (1965).
- [14] Deift P.A. Li L.C. Tomei C. Matrix factorizations and integrable systems, Comm. Pure Appl. Math. 42, (1989) 443-521.
- [15] Symes W.W. Hamiltonian group actions and integrable systems Physica 1D, 1980, pp. 339-374.
- [16] Symes W.W. The Q-algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice Physica, 4D, 1972, pp.275-280.
- [17] Deift P.A. Li L.C. Nanda T. Tomei C. The Toda flow on a generic orbit is integrable Comm. Pure Appl. Math. 39 1986. pp 183-232.
- [18] Deift P.A. Nanda T. Tomei C. Differential equations for the symmetric eigenvalue problem, SIAM J.Num Anal. 20 pp. 183-232.
- [19] Deift P.A. Li L.C. Generalized affine Lie algebras and the solution of a class of flows associated with the QR eigenvalue algorithm, Comm. Pure Appl. Math. 39 1986. pp 183-232.(?)
- [20] Flaschka H., The Toda Lattice I. Phys. Rev. B, 9, 1974, pp 1924-1925.

- [21] Golub, E., and van Loan C., Matrix Computations, John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.
- [22] Moser, J. Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential-an integrable system, Lecture notes in physics 38, J. Moser, ed., Springer-Verlag, 1975, pp. 467-497.
- [23] A.M. Perelomov Generalized Coherent States and its Applications (Springer-Verlag, New York, 1986).
- [24] Kovacic, J. J. 1986, An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations.
- [25] Matveev V.B. Salle M.A. Darboux transformations. Springer 1990. *J. Symb. Comp.* **2**, 3-43.
- [26] D. Gomez -Ullate, N. Kamran, R. Milson, The Darboux transformation and algebraic deformations of shape-invariant potentials *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 1789-1804.
- [27] Salejda W. Tyc M. Just M. Algebraiczne metody rozciązywania równania Schrodingera PWN, Warszawa, 2002.
- [28] E. Doktorov, S. Leble, Dressing method in mathematical physics. Springer, 2007.
- [29] Serguei P Tsarev, An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator. Proceedings of the 1996 international symposium on Symbolic and algebraic computation http://scholar.google.ru/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=dey5ZnMAAAAJ *citation_for_view=dey5ZnMAAAAJ:u-x6o8ySG0sC*

6.7 Załącznik. Przykładowe publikacje

Journal of Symbolic Computation Volume 1, Number 1, March, 1985

Editors Symbolic Computation (An Editorial) . . .	1-6
Etienne Paul Equational Methods in First Order Predicate Calculus	7-29
Elmar Eder Properties of Substitutions and Unifications	31-46
B. Chazelle and H. Edelsbrunner Optimal Solutions for a Class of Point Retrieval Problems	47-56
Erich Kaltofen Fast Parallel Absolute Irreducibility Testing	57-67
Richard Pavelle and Paul S. Wang MACSYMA from F to G	69-100
V. P. Gerdt and A. B. Shvachka and A. Yu. Zharkov Computer algebra application for classification of integrable non-linear evolution equations	101-107
K. S. Kölbig Explicit Evaluation of Certain Definite Integrals Involving Powers of Logarithms	109-114
W. Bibel and K. Aspetsberger A Bibliography on Parallel Inference Machines	115-118

Journal of Symbolic Computation Volume 1, Number 2, June, 1985 A. W. Biermann Automatic Programming: A Tutorial on Formal Methodologies 119-142

Gregory Butler Effective Computations with Group Homomorphisms	143-158 (or 143-157??)
David R. Barton and Richard Zippel Polynomial Decomposition Algorithms . . .	159-168
Allan Borodin and Ronald Fagin and John E. Hopcroft and Martin Tompa Decreasing the Nesting Depth of Expressions Involving Square Roots . . .	169-188
Richard Zippel Simplification of Expressions Involving Radicals	189-210
John P. Fitch Solving algebraic problems with REDUCE 211-228 (or 211-227??)	
Fritz Schwarz An Algorithm for Determining Polynomial First Integrals of Autonomous Systems of Ordinary Differential Equations	229-234 (or 229-233??)

Miguel Navarro-Saad and Kurt Bernardo Wolf Applications of a Factorization Theorem for Ninth-order Aberration Optics . . .	235–240 (or 235–239??)
D. Coppersmith and J. H. Davenport An Application of Factoring	241–243