

S.B. Leble

Skrypt dla studentów Wydziału FTiMS

PG, stworzonego przez notatki studenckie, podziękowanie dla Michała
Kulczykowskiego, Piotra Markuszewskiego, Michała Ryszka, Jana Tuziemskiego,
Marcina Traczyka, Michała Lewandowskiego, Andrzeja Pałnickiego, Kajetana
Wojtackiego, Grzegorza Łukasika.

Teoria Względności i Grawitacji

26 maja 2014

Politechnika Gdańska
Gdańsk 2006

Spis treści

1	Teoria względności I	1
1.1	Wstęp	1
1.1.1	Układy odniesienia, współrzędne	1
1.1.2	Definicja odległości i synchronizacja zegarów w IUO ...	1
1.1.3	Notki historyczne	2
1.2	Propagacja fal elektromagnetycznych.	3
1.2.1	Układ równań Maxwella.....	3
1.3	Równania falowe.....	5
2	Teoria względności II	7
2.1	Wyprowadzenie Transformacji Lorentza	7
2.2	Geometria czasoprzestrzeni	10
2.3	Kowariantność, tensory i metryka.....	11
2.3.1	Tensory w przestrzeni Euklidesa.....	11
2.3.2	Tensory w przestrzeni Minkowskiego	12
2.4	Kinematyka relatywistyczna i cztero-wektory.	13
2.5	Mechanika relatywistyczna.....	15
2.6	Prędkość względna.....	16
2.7	Przestrzeń Łobaczewskiego.	18
3	Teoria względności III.	21
3.1	Szczególne teorie względności w dowolnych współrzędnych. ...	21
3.2	Kolejność wydarzeń.....	21
3.3	Ruch przyspieszony	22
3.4	Czym jest położenie i czas?	22
3.5	Propagacja fali elektromagnetycznej.	23
3.6	Inercjalne układy odniesienia.	23
3.7	Efekt Dopplera	24
3.8	Prędkość względna.....	25

4	Uwagi matematyczne	27
4.1	Pojęcie grupy	27
4.2	Przestrzeń liniowa.....	27
4.3	Odległość to norma różnicy wektorów.	27
4.4	Obrót.	28
4.5	Transformacje infinityzmalne.	28
4.6	Algebra Liego	28
4.7	Zasada kowariantności.	28
4.8	Algebra tensorów.	29
4.9	Nieskończenie małe transformacje grupy Lorentza	29
4.10	Przestrzeń Riemanna.	29
4.11	Równanie geodezyjnej	31
4.12	Grupa Ruchów	32
4.12.1	Równania Killinga	32
4.13	Grupy Lorentza i Poincare.....	33
5	W stronę teorii grawitacji I	35
5.1	Tensor masy	35
5.2	Przykłady	36
5.2.1	Nieoddziałujące cząstki materii.....	36
5.2.2	Tensor masy dla cieczy doskonałej	38
5.3	Elektrodynamika - tensor masy.....	40
5.3.1	Tensor energii dla pola elektromagnetycznego	40
5.3.2	Masa i energia	41
6	Geometria różniczkowa	43
6.1	Transformacje przestrzennych i czasowych współrzędnych	43
7	Przestrzeń Riemanna	47
7.1	Rozmaitość Riemanna	47
7.2	Linia geodezyjna równoległe	48
7.3	Równoległe przenoszenie wektorów	49
7.4	Różniczkowanie kowariantne	52
7.5	Transformacja Nawiasów Christoffela	53
8	Tensory krzywizny Riemanna	57
8.1	Tensor Krzywizny	57
8.1.1	Wprowadzenie	57
8.1.2	Kilka własności	58
8.1.3	Inne tensory krzywizny. Kontrakcje.	58
9	Teoria grawitacji I	59
9.1	Podstawy Teorii Grawitacji Newtona.....	59
9.1.1	Prawo Galileusza.	59
9.1.2	Interpretacja geometryczna	59

9.2 Uwagi o pomiarach spektralnych	60
10 Teoria grawitacji II	61
10.1 Równanie Grawitacji Einsteina	61
10.2 Porównanie z teorią Newtona. Warunki brzegowe	62
10.3 Rozwiązanie równań Einsteina w pierwszym przybliżeniu. Wyznaczenie stałej	63
10.4 Pole grawitacyjne izolowanej cząstki punktowej	67
10.5 Ruch peryhelium planet	71
10.6 Prędkość propagacji pola grawitacji	76
10.7 Perspektywa.	78
10.8 Odchylenie promienia światła w polu grawitacji (w pobliżu Słońca)	79
10.9 Przesunięcie ku czerwieni	80
Literatura	83

Teoria względności I

1.1 Wstęp

1.1.1 Układy odniesienia, współrzędne

1. Położenie ciała w przestrzeni w danej chwili czasu i układzie odniesienia. Definicja przez pomiary.

W mechanice klasycznej stan cząstki punktowej określany jest współrzędnymi położenia i pędu w inercyjnym układzie odniesienia (IUO). Koniecznym jest pomiar dt .

Względność położenia i CZASU [11].

1.1.2 Definicja odległości i synchronizacja zegarów w IUO

Wiki:

Śynchronizacja (z starogr. synchronos - równoczesny) - koordynacja w czasie, co najmniej dwóch zjawisk (procesów), tzn. dążenie do równoległego, niezależnego ich przebiegu, skoordynowanego w czasie lub do jednoczesnego ich zakończenia. Pojęcie synchronizacji występuje w fizyce, informatyce, elektronice, telekomunikacji, robotyce, multimediami (np. synchronizacja dźwięku z obrazem), muzyce i ekonomii (synchronizacja cykli koniunkturalnych).”

W formalizmie Szczególnej Teorii Względności występuje problem synchronizacji zegarów, które służą do pomiaru czasu.

$$\epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{u}_E) = \frac{1}{2} (1 + b\mathbf{u}_E \mathbf{n}).$$

W ramach tej teorii można mówić o synchronizacji absolutnej i synchronizacji standardowej, zwanej również synchronizacją Einsteina-Poincaré:

* Synchronizacja standardowa nazywana także synchronizacją Einsteina-Poincaré, gdzie prędkość światła w obu kierunkach jest taka sama. W tym przypadku $b = 0$, więc

$$\mathbf{c} = \mathbf{n}, \epsilon = \frac{1}{2}$$

i otrzymujemy standardową postać transformacji Lorentza.

Fock:

Odległość.

1, Skala pomiarowa (metr fizyczny, secunda - zegar)

2, Triangulacja:

wiki:

”Triangulacja - metoda pomiaru osnów geodezyjnych, polegająca na określeniu wielkości wszystkich kątów i jednej długości w sieci składającej się z trójkątów. Pomiar służy, po obliczeniu i wyrównaniu wyników pomiarów, określeniu współrzędnych geodezyjnych wszystkich punktów sieci triangulacyjnej. W zależności od dokładności (klasy sieci) boki w triangulacji wynoszą od 2 do 25 kilometrów.”

3. Radiolokacja

Wiki:

Żadiolokacja - technika umiejscawiania, śledzenia oraz określania położenia obiektów powietrznych, naziemnych, kosmicznych w przestrzeni przy pomocy fal elektromagnetycznych. Jest działem radiokomunikacji.”

Radiolokacja wykorzystuje prostoliniowość rozchodzenia się fal elektromagnetycznych oraz zjawisko ich odbicia od przeszkód. W radiolokacji stosuje się fale radiowe o długościach od kilku metrów do kilku milimetrów. Przykładem urządzenia radiolokacyjnego jest radar.

Wszystko - w geometrii Euklidesowskiej, jnaczej - sprzeczność ...

Podkreślić; Wszystkie prawa geometrii jako experimentalne!

3. światło (EM fale) - jako bazowe. W tym sensie - długość - ilość długości fal.

Pomiary prędkości światła - konieczność zastosowania sposobów niezależnych od tej wiedzy!

Jeśli założyć że prędkość w obu kierunkach taka sama - wystarczy mierzyć tylko czas w jednym punkcie. (okres drgań cząsteczki, etc)

Więc jeśli τ - ten czas,

$$c = \frac{2r}{\tau}, \text{ gdzie } r \text{ mierzono bezpośrednio,}$$

więc - czynnik przeliczenia odległości - czas.

Porównanie wskazań zegarów na odległości r za pomocą sygnałów, patrz też [3]..

1.1.3 Notki historyczne

Transformacja Lorentza

http://en.wikipedia.org/wiki/history_of_Lorentz_transformations

<https://archive.org/details/stathorielectrom00loregoog>

1. [?] Abstrakt:

The book presents ideas by H. Poincaré and H.Minkowski according to those the essence and the main content of the relativity theory are the following: the space and time form unique four-dimensional continuum supplied by

the pseudo-Euclidean geometry. All physical processes take place just in the four-dimensional space. Comments to works and quotations related to this subject by L. de Broglie, P.A.M. Dirac, A. Einstein, V. L. Ginzburg, S. Goldberg, P. Langevin, H.A. Lorentz, L. I. Mandel'stam, H. Minkowski, A. Pais, W. Pauli, M. Planck, A. Sommerfeld and H. Weyl are given in the book. It is also shown that the special theory of relativity has been created not by A. Einstein only but even to greater extent by H. Poincaré. The book is designed for scientific workers, post-graduates and upper-year students majoring in theoretical physics.

2. [?] Abstrakt:

The ways in which A. Einstein and D. Hilbert independently arrived at the gravitational field equations are traced. A critical analysis is presented of a number of papers in which the history of the derivation of the equations is viewed in a way "that radically differs from the standard point of view". The conclusions of these papers are shown to be totally unfounded.

2. [?]. Abstrakt:

"The paper relates the history of the discovery of the gravitational field equations by A. Einstein and D. Hilbert in November 1915. New insight into the subject was gained from the proof-sheet, discovered in 1997 in the University of Göttingen archive, of Hilbert's talk he made on 20 November 1915 and published in March 1916. The history of the development of the general theory of relativity prior to the discovery of the generally covariant gravitational field equations is also discussed."

1.2 Propagacja fal elektromagnetycznych.

1.2.1 Układ równań Maxwella

Zatem podsumujmy: równania Maxwella (w próżni) w postaci różniczkowej, w języku operatora ∇ , tworzą układ:

równanie Coulomba:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (1.1)$$

łączy pole elektryczne $\text{vec}E$ i gęstość ładunku ρ . Prawo Biota-Savarta-Laplace'a oraz brak ładunków magnetycznych:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.2)$$

dla wektora indukcji magnetycznej $\text{vec}B$, prawo Faradaya:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.3)$$

równanie Ampère'a-Maxwella:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1.4)$$

gdzie: $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ - gęstość prądu elektrycznego.

Korzystając z własności równań (1.1) i (1.4), możemy wyprowadzić zasadę zachowania ładunku elektrycznego. Policzmy najpierw dywergencję równania (1.4)

$$\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{B}] = \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\nabla \cdot \mathbf{j}), \quad (1.5)$$

pamiętając jednak, iż:

$$(\nabla, [\nabla \times \mathbf{B}]) = ([\nabla \times \nabla], \mathbf{B}) = 0. \quad (1.6)$$

Otrzymamy:

$$0 = \frac{1}{c} \frac{\partial(4\pi\rho)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\nabla \cdot \mathbf{j}) \quad (1.7)$$

Porządkując powyższe równanie a następnie dzieląc przez czynnik $\frac{4\pi}{c}$, dostajemy:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.8)$$

Równanie (1.8) przedstawia *prawo zachowania ładunku elektrycznego w postaci różniczkowej* (= równanie ciągłości). Prawo to nie jest założeniem *a priori*, lecz bezpośrednio wynika więc z równań Maxwella, co zresztą udowodniliśmy. Jest ono spełnione (w postaci (1.8)) dla modelu ciągłego rozkładu ładunków. Historycznie Maxwell opierał się na prawie (1.8) w- w postaci całkowej, sprawdzając niezbędność dodawania tzw. "prądów przesunięcia- członu $\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$ do równania Ampera.

Wprowadzenie pól elektrycznego i magnetycznego pozwala na niezależne rozpatrzenie ładunków jako źródeł pola, które też podlegają działaniu sił elektromagnetycznych. Dla każdego (wybranego) ładunku obecność innych ładunków wpływa na jego ruch (np., przyspieszając), co z kolei opisujemy równaniem ruchu. Aby zamknąć układ równań Maxwella (tj. dokonać pełnego opisu) konieczne jest dopisanie równań ruchu z siłą Lorentza po prawej stronie. Kiedy jednak istnieje możliwość zaniedbania przyspieszenia ładunków źródeł, korzystamy z równań Maxwella, rozpatrując opis ładunków tylko na podstawie gęstości ładunku i gęstości prądu, jako danych.

Jeżeli na ładunki próbne będą działać jednakowe siły, to rozkład pól \mathbf{E} i \mathbf{B} jest jednakowy w określonym punkcie przestrzeni. Bardzo ważne jest stwierdzenie, iż pola elektromagnetyczne mogą istnieć w obszarach, w których brak jest źródeł. Istotnym faktem jest również to, że \mathbf{E} i \mathbf{B} mogą być one nośnikami energii, pędu, momentu pędu.

Przeanalizujmy teraz matematyczną podstawę opisu pól \mathbf{E} i \mathbf{B} , mianowicie układu równań Maxwella'a (1.1 - 1.4). Ogólna liczba równań Maxwella wynosi osiem. Dwa z nich (1.2), (1.1) są równaniami, w których nie ma pochodnych po czasie. Dzięki temu możemy w dowolnej chwili wyznaczyć jedną ze składowych obu pól \mathbf{E} i \mathbf{B} , aby następnie podstawić do pozostałych, dynamicznych (tj. zawierających pochodne po czasie) równań.

Inaczej, równania (1.1) i (1.2) wprowadzają pewne więzy dla podstawowych zmiennych (tj. \mathbf{E} i \mathbf{B}), np.:

$$B_z = \int \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dz. \quad (1.9)$$

Więzy te są ważne w dowolnym czasie, a więc i w chwili początkowej. To oznacza, że tylko cztery ze składowych pól są dynamicznie niezależne, a więc można zostawić cztery równania przy uzyskaniu zależności od czasu.

Z tego wynika, że sformułowanie zagadnienia początkowego (tj. zagadnienia Cauchy'ego) dla układu równań Maxwella składa się z czterech warunków początkowych. Powróczymy do szczególnego sformułowania zagadnień matematyki stosowanej w konkretnych przykładach odpowiednich rozdziałów.

1.3 Równania falowe

Powróczmy do układu równań Maxwella (1.1 - 1.4). Równania dynamiki (zmian z czasem) łączy pole elektryczne z polem magnetycznym. Istnieje jednak możliwość ich sprowadzenia do równania dla jednej ze składowych, która opera się na liniowość tych równań oraz na niezależność współzmiennych od współrzędnych \mathbf{r}, t . Rozważmy II i IV równania Maxwella:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (1.10a)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{B} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (1.10b)$$

Różniczkując (1.10b) po czasie, po dzieleniu przez c , otrzymamy

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla \times \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (1.11)$$

Do równania (1.11) podstawmy (1.10a), uwzględniając tożsamość $-\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) + \nabla^2 \mathbf{E}$ i pierwsze równanie Maxwell'a (1.1);

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathbf{E} - \nabla(4\pi\rho) - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Powyższa równość ma postać niejednorodnego równania falowego:

$$\square \mathbf{E} = \mathbf{f}, \quad (1.13)$$

gdzie \square jest operatorem d'Alemberta (kwabłą), przy czym

$$\mathbf{f} = -4\pi \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nabla \rho \right). \quad (1.14)$$

Po rozwiązaniu równań (1.13) z uwzględnieniem (1.1) powinniśmy powrócić do jednego z równań (1.10a,1.10b) żeby wyznaczyć składowe pola \mathbf{B} naturalnie, z uwzględnieniem węza (1.2).

Alternatywą może być sporządzenie układu (1.10a,1.10b) do równania falowego dla \mathbf{B} i następnym obliczeń już składowych pola \mathbf{E} .

Teoria względności II

2.1 Wyprowadzenie Transformacji Lorentza

Podstawą, na której zbudowano tzw. „Teorię względności” była niezmienniczość równań Maxwella (1.1 - 1.4) w stosunku do przejścia od jednego inercyjnego układu odniesienia do drugiego. Mówiąc dokładniej chodzi o *kowariantności* układu równań (1.1 - 1.4) względem grupy transformacji czasoprzestrzeni z następną definicją niezmienniczego pseudoiloczynu skalarnego w nazwanej przestrzeni. Te znamienite transformacje noszą nazwę *transformacji Lorentza* i odgrywają znaczącą rolę we współczesnej fizyce. Będziemy rozważać niezmienniczość równania wynikającego bezpośrednio z układu równań Maxwella, mianowicie równanie falowe dla próżni (1.13, 8.2).

Na początku stawimy cel wyprowadzić wzory na transformację Lorentza.

Niezmienniczość formy operatora kwadra (\square) w nazwanym kontekście należy rozumieć jako niezmienną postać tego operatora w różnych, inercjalnych układach odniesienia L, L' , które poruszają się jeden względem drugiego ze stałą prędkością. Ten operator jest operatorem równania falowego; jak to zostało ustalone - równanie opisuje zjawiska falowe (np. paczki falowe). Wnikliwa analiza całej fizyki pozwala rozważać takie zjawiska jako jedyny możliwy nośnik informacji o położeniu ciał w przestrzeni. Oznaczmy współrzędne przestrzenne przez \mathbf{r}, \mathbf{r}' , a współrzędne czasowe: t, t' . Warunek niezmienniczości formy operatorów równania dla fali elektromagnetycznej w próżni dla układów L i L' możemy zapisać symbolicznie w postaci:

$$\square = \square'. \quad (2.1)$$

Uprośćmy teraz nasz problem i załóżmy, że fala rozchodzi się tylko w kierunku osi x . Uogólnienie na przypadek trójwymiarowy nie jest skomplikowanym, oraz może być dokonane za pomocą obrotów w przestrzeni \mathbf{r} . Rozważmy teraz „funkcję falową” U , fali elektromagnetycznej, może to być składowa pola elektrycznego jak i magnetycznego (zobacz jeszcze raz (1.13,)); więc

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2}. \quad (2.2)$$

Wprowadźmy funkcje, które będą przeprowadzać współrzędne „nieprimowane” na „primowane”.

$$\begin{aligned} t' &= g(x, t), \\ x' &= f(x, t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Obliczmy teraz pochodne tych funkcji złożonych:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = U_t = \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial g}{\partial t}, \quad (2.4a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U_x = \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x'} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t'} \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (2.4b)$$

Różniczkując drugi raz, otrzymamy:

$$\begin{aligned} U_{tt} &= U_{t't'} g_t^2 + 2U_{t'x'} g_t f_t + U_{t'} g_{tt} + U_{x'x'} f_t^2 + U_{x'} f_{tt}, \\ U_{xx} &= U_{x'x} f_x^2 + 2U_{t'x'} g_x f_x + U_{x'} f_{xx} + U_{t't'} g_x^2 + U_{t'} g_{xx}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Podstawiając do (2.2) dostaniemy

$$g_t f_t = c^2 g_x f_x, \quad (2.6a)$$

$$f_t^2 - c^2 f_x^2 = -c^2, \quad (2.6b)$$

$$g_t^2 - c^2 g_x^2 = 1, \quad (2.6c)$$

$$g_{tt} - c^2 g_{xx} = 0, \quad (2.6d)$$

$$f_{tt} - c^2 f_{xx} = 0. \quad (2.6e)$$

Rozpatrzmy drugie z tych równań

$$f_t^2 - c^2 f_x^2 = (f_t - c f_x)(f_t + c f_x) = -c^2. \quad (2.7)$$

Wprowadzając zmienne charakterystyczne $\xi = x - ct$, $\eta = x + ct$, mamy

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial t} - c \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (2.8b)$$

Albo, z pochodnymi zaznaczonymi jako indeksy

$$f_t - c f_x = f_\xi, \quad (2.9a)$$

$$f_t + c f_x = f_\eta. \quad (2.9b)$$

Otrzymujemy,

$$f_\xi f_\eta = -c^2. \quad (2.10)$$

Różniczkujemy ostatnie równanie po ξ ,

$$f_{\xi\xi} f_\eta + f_\xi f_{\eta\xi} = 0. \quad (2.11)$$

Równanie (2.6e) jest równoważne z $f_{\eta\xi} = 0$, dlatego

$$f_{\xi\xi} = 0.$$

W ten sam sposób dochodzimy do

$$g_{\xi\xi} = 0,$$

oraz

$$f_{\eta\eta} = 0, \quad g_{\eta\eta} = 0.$$

Ponieważ wszystkie drugie pochodne funkcji $f(\xi, \eta)$, $g(\xi, \eta)$ zerują się, funkcje te muszą być liniowe ze względu na obie zmienne, czyli możemy je zapisać w postaci

$$x' = f(t, x) = at + bx, \quad (2.12a)$$

$$t' = g(t, x) = pt + qx. \quad (2.12b)$$

Podstawmy teraz (2.12) do układu (2.6). Otrzymamy

$$p^2 - c^2q^2 = 1, \quad (2.13a)$$

$$a^2 - c^2b^2 = -c^2, \quad (2.13b)$$

$$pa = c^2qb. \quad (2.13c)$$

Założmy teraz, że układ „primowany” L' porusza się ze stałą prędkością $v < c$ względem układu L . Ruch IUO L' względem IUO L , jest jednostajnym, wystarczy wybrać jeden punkt, mianowicie $x' = 0$ (początek układu współrzędnych L'); ze wzoru $f(t, x) = at + bx = 0$, wynika że $\frac{x}{t} = v = -\frac{a}{b}$. Otrzymamy związki parametrów a, b, p, q z parametrem ruchu v :

$$a = -vb, \quad (2.14a)$$

$$p = -\frac{c^2}{v}q, \quad (2.14b)$$

które po podstawieniu do (2.13b) pozwolą na wyznaczenie

$$b = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.15)$$

Z tego, że $at + bx = x'$ mamy

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.16)$$

Analogicznie, z równania (2.13a) otrzymamy

$$q^2 = \frac{\frac{v^2}{c^2}}{c^2 - v^2}, \quad (2.17)$$

oraz

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.18)$$

Wzory (2.59) i (2.60) definiują transformację Lorentza, która łączy układy L i L' , poruszające się jeden względem drugiego ze stałą prędkością v .

Transformacja Lorentza wiąże też relacje między współrzędnymi: przestrzennymi i czasowymi. W transformacji Galileusza zakładaliśmy, że jest absolutność czasu i to, że "upływa" on jednakowo we wszystkich układach. W transformacji Lorentza jest inaczej, co oznacza inaczej zdefiniowane pomiary czasu w różnych układach odniesienia [11]. Czas jest względny.

2.2 Geometria czasoprzestrzeni

Korzystając z (2.59) oraz (2.60) łatwo zauważyć, że spełnione jest równość

$$c^2t'^2 - x'^2 = c^2t^2 - x^2. \quad (2.19)$$

Co oznacza niezmienniczość wyrażenia

$$s^2 = c^2t^2 - x^2$$

lub, analogicznie, dla różniczek,

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2, \quad (2.20)$$

jest (lokalnym) niezmiennikiem przyrostów x, t . Taka forma prowadzi do geometrii różniczkowej. Niezmienniki transformacji obrotów ($\|\mathbf{r}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$) w przestrzeni euklidesowskiej (trojwymiarowej) używamy jako normy wektora \mathbf{r} .

Podobnie, wzór (2.19) definiuje (pseudo)normę w przestrzeni która nosi nazwę pseudo-euklidesowskiej. Nowa (pseudo)norma nie spełnia klasycznych aksjomatów normy, przede wszystkim nie jest dodatnią. Naturalne uogólnienie na trzy wymiary (x, y, z) jest

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (2.21)$$

Możemy wprowadzić nową zmienną $x_0 = ct$, która ma te same jednostki fizyczne że współrzędne przestrzenne (mianowicie - $dx_0 = cdt$).

Ogólne, zmieniając oznaczenia, forma

$$ds^2 = \sum_{\nu, \mu=0}^3 g_{\nu\mu} dx_\nu dx_\mu, \quad (2.22)$$

używa się jako (pseudo)norma w przestrzeni stycznej do rozmaitości czterowymiarowej. Taka forma prowadzi do geometrii różniczkowej. Składowe tensora metrycznego $g_{\nu\mu} = \varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu}$ numerowane są literkami greckimi ($\mu, \nu =$

0, 1, 2, 3, 4.) W naszym przypadku (2.21) tensor jest diagonalny z elementami $g_{00} = \varepsilon_0 = 1$, $g_{ii} = \varepsilon_i = -1$, $i = 1, 2, 3$. Odpowiednik (2.19) daje podobny wzór. Powtórzmy że przestrzeń taka nie jest zwykłą przestrzenią Euklidesa, nazywamy ją przestrzenią pseudo-euklidesowskiej albo *przestrzenią Minkowskiego*, akceptujemy je jako przestrzeń fizyczną teorii relatywistycznej. Wprowadzimy jeszcze (pseudo) iloczyn skalarny dwóch czterowektorów a, b o współrzędnych a_μ, b_ν jako

$$\{a, b\} = a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 = \sum_{\nu, \mu=0}^3 g_{\nu\mu} a_\nu b_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon_\nu a_\nu b_\nu. \quad (2.23)$$

Dalej, słowo "pseudo" już nie dodajemy, ale pamiętamy o nim w przypadku odpowiednich pojęć cterywymiarowych. Szczególnie interwał czasowo-przestrzenny jest $\{a, a\} = a_0^2 - \mathbf{a}^2$.

Ogólne transformacja Lorentza definiuje się macierzą 4×4 $L_{\nu\mu}$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 L_{\mu\nu} x_\nu, \quad (2.24)$$

zakładając niezmienniczość iloczni skalarnego (2.23)

$$\{La, Lb\} = \sum_{\nu, \mu, \alpha, \beta=0}^3 g_{\nu\mu} L_{\nu\alpha} L_{\mu\beta} a_\alpha b_\beta = \{a, b\}. \quad (2.25)$$

stąd

$$\sum_{\nu=0, \mu=0}^3 g_{\nu\mu} L_{\nu\alpha} L_{\mu\beta} = g_{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

albo dla odpowiednich macierzy

$$L^T G L = G. \quad (2.27)$$

Taki warunek (2.27) definiuje zbiór macierzy, który tworzy pełną grupę Lorentza.

2.3 Kowariantność, tensory i metryka

2.3.1 Tensory w przestrzeni Euklidesa

Grupa ortogonalna. Transformacja

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 A_{ik} x_k, \quad (2.28)$$

Definiuje wektor iloczyn skalarny (x, y) się nie zmienia, więc

$$A^T A = I. \quad (2.29)$$

Relacja wektorów pola elektrycznego E_k i indukcji elektrycznej D_i

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k, \quad (2.30)$$

wprowadzi równanie materiałowe oraz przenikalność dielektryczną ϵ_{ik} :

Przejdźmy do innego UO po obrocie:

$$D'_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon'_{ik} E'_k, \quad (2.31)$$

daje

$$\sum_{k=1}^3 A_{ik} D_k = \sum_{k=1}^3 \epsilon'_{ik} \left(\sum_{j=1}^3 A_{kj} E_j \right), \quad (2.32)$$

bez znaków sumy

$$A_{mi}^T A_{ik} D_k = A_{mi}^T \epsilon'_{ik} A_{kj} E_j, \quad (2.33)$$

więc

$$D_m = A_{mi}^T \epsilon'_{ik} A_{kj} E_j, \quad (2.34)$$

i

$$\epsilon_{mj} E_j = A_{mi}^T \epsilon'_{ik} A_{kj} E_j, \quad (2.35)$$

skąd wynika że ϵ_{mj} są współrzędne tensora.

$$\epsilon_{mj} = A_{mi}^T A_{jk}^T \epsilon'_{ik} E_j. \quad (2.36)$$

2.3.2 Tensory w przestrzeni Minkowskiego

Teraz można wprowadzić tensory w przestrzeni Minkowskiego (patrz App. 1). Podstawowa transformacja składowych wektora A_ν w "pierwszym" układzie odniesienia daje wartości składowych tego samego wektora w "drugim" układzie

$$A'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 L_{\mu\nu} A_\nu, \quad (2.37)$$

zgodnie z (2.24), co definiuje wektor jako tensor pierwszego rzędu.

Dla tensora drugiego rzędu o komponentach $T_{\mu\nu}$ mamy

$$T'_{\mu,\nu} = \sum_{\mu',\nu'=0}^3 L_{\mu\mu'} L_{\nu\nu'} T_{\mu'\nu'}, \quad (2.38)$$

z naturalnym uogólnieniem na dowolny rząd. Różnica pomiędzy tensorami w przestrzeni Euklidesa i Minkowskiego jest operacja kontrakcji. Mianowicie pole skalarne z dwóch wektorów o składowych A_μ i B_ν otrzymujemy przez definicje (2.23), albo

$$S = \sum_{\mu=0}^3 g_{\mu\mu} A_\mu B_\mu, \quad (2.39)$$

inaczej, wprowadzając kontrawariantne komponenty wektora

$$A^\mu = g_{\mu\nu} A_\nu, \quad (2.40)$$

albo

$$S = g_{\mu\nu} A_\nu B_\mu = A^\mu B_\mu, \quad (2.41)$$

co traktujemy jako iloczyn skalarny, z podobną relacją dla tensora drugiego rzędu.

2.4 Kinematyka relatywistyczna i cztero-wektory.

Wróćmy do równania generacji fal elektromagnetycznych (1.13). Lewa strona jego jest iloczynem niezmienniczo operatora quabla i wektora pola elektromagnetycznego \mathbf{E}, \mathbf{B} . Transformacja lewej strony narzuca sposób transformacji kombinacji pochodnych gęstości prądu i ładunku lewej strony. Te wielkości proporsjonalny do typowo kinematycznych wielkości jako np. $\mathbf{j} \propto \mathbf{v}$.

Ogólna idea kinematyczna - uporządkować wszystkie zmienne fizyczne w takie grupy, żeby każda reprezentowała nektóry tensor w przestrzeni Minkowskiego. Naprzykład, podstawowe współrzędne w czasoprzestrzeni ($x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$) uwzględniają czwartą (nazywamy ją zerowej) składową ct i tworzą tensor pierwszego rzędu - wektor. Do grupy składowych prędkości $v_i = \frac{dx_i}{dt}$ więc dołączymy prędkość światła $c = \frac{dx_0}{dt}$. Powstaje ważne pytanie: co jest czasową składową p_0 pędu p_i ?. Sens tej dodatkowej składowej może być wyjaśniony przez tezę o niezmienniczości kombinacji podobnej (2.19):

$$m_0^2 c^2 = p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2, \quad (2.42)$$

oznaczonej z uwzględnieniem jednostek po prawej stronie, dlatego współczynnik c^2 został wprowadzony. W układzie spoczynkowym $p_i = 0$, więc zerowa składowa czteropędu pędu p_0 proporcjonalna niezmiennikowi $p_0 = mc$. Dla dalszej interpretacji rozważmy granicę nierelatywistyczną $v \ll 1$, co równoważne do $p \ll m_0 c$. Dla uproszczenia powróćmy do przypadku jednowymiarowego $p_2 = p_3 = 0, p_1 = p$, co daje dla pierwszego czlonu w rozwinięciu Taylora po małym parametru $p_0 c$

$$p_0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + p^2} \approx m_0 c \left(1 + \frac{p^2}{2m_0^2 c^2}\right) = m_0 c + \frac{p^2}{2m_0 c}, \quad (2.43)$$

co można odczytać jako sumę m_0c i bardzo znanej formule dla energii kinetycznej, podzielonej przez c . Dochodzimy do wniosku że wartość p_0c jest równoważna do energii ciała punktowego.

W taki sam sposób dodajemy składową zerową do wektora gęstości prądu. \mathbf{j} , mianowicie $j_0 = c\rho$. Latwo sprawdzić że prawo zachowania ładunku (1.8)

$$\frac{\partial c\rho}{\partial ct} = \frac{\partial j_0}{\partial x_0} = -\text{div}\mathbf{j} = -\sum_{k=1}^3 \frac{\partial j_k}{\partial x_k}, \quad (2.44)$$

albo

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

jest niezmienniczym w stosunku do transformacji Lorentza. Zastosujmy wzór na pochodną funkcji złożonej

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu} = \sum_{\mu,\nu,\alpha=0}^3 L_{\mu\nu} \frac{\partial j_\nu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu},$$

formuły transformacji Lorentza (2.24) i jej analog dla czterowektora składowych gęstości prądu a

$$j'_\nu = \sum_{\mu=0}^3 L_{\nu\mu} j_\mu. \quad (2.45)$$

Pochodne

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} = [GL^T G]_{\alpha\mu}$$

sa wyliczone na podstawie (2.24)

$$x_\alpha = \sum_{\mu=0}^3 L_{\alpha\mu}^{-1} x'_\mu, \quad (2.46)$$

z uwzględnieniem prostego skutku (2.26) albo (2.27)

$$L^{-1} = GL^T G \quad (2.47)$$

gdy warunek $GG = I$ został zastosowany. Więc jako wniosek końcowy mamy niezmienniczość dywergencji czterowymiarowej.

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial j'_\mu}{\partial x'_\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu}.$$

2.5 Mechanika relatywistyczna

Sformulujemy zasadę którą można zaakceptować jako bazową dla całej fizyki teoretycznej, nazwijmy je *zasadą kowariantności ogólnej*. Ona brzmi następująco (partz. Fock [2])

Podstawowe równania fizyki powinny mieć postać tensorową, mianowicie każde równanie ma być równością tensorów tego samego rzędu.

Fizyczne to oznacza że przejście do innego układu odniesienia nie powinno złamać równości.

Rozważmy przypadek dwóch układów U i U', które ruszą się jeden w stosunku do drugiego. Równania ruchu mechaniki Newtona (II prawo Newtona) w tych układach są różne jak wynika z transformacji Lorentza (2.24) (ćwiczenie). Droga do budowy równania kowariantnego, które by przechodziło do formy Newtonowskiej w granice nierelatywistycznej ($v \ll c$), bazuje się na wprowadzeniu czasu niezmienniczego

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{dt^2 - \frac{d\mathbf{r}^2}{c^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2}} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.48)$$

przes (2.23) - analog trójwymiarowy wzoru (10.64). Taka różniczka czasowa może być zinterpretowana jako różniczka czasu "własnego" cząstki punktowej bo on pokrywa się z czasem cząstki we własnym układzie odniesienia ($v = 0$). Taki czas pozwala na wprowadzenie *czterowektora prędkości*

$$\frac{dx_\mu}{d\tau} = \left\{ \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}, \quad (2.49)$$

i, po wymnożeniu przez m_0 , powrócić do czteropędu

$$p_\mu = m_0 \frac{dx_\mu}{d\tau}. \quad (2.50)$$

Wzór (2.50) daje wyrażenie dla składowych pędu przez prędkość, patrz też (2.42) żeby otrzymać pełny wyraz dla p_0 .

$$p_0 = \sqrt{m_0^2 c^2 + m_0^2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\tau}\right)^2} = m_0 c \sqrt{1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.51)$$

Dalej, wprowadzi się *czteroprzyspieszenie*

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\}, \quad (2.52)$$

po różniczkowaniu uwzględniamy (2.48), więc

$$\frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \{c, \mathbf{v}\}. \quad (2.53)$$

Jeśli pomnożyć przez masę niezmienniczą m_0 , rezultat już możemy przyrównać do *czterosiły* F_μ . Najbardziej zwarte wyrażenie dla równania ruchu cząstki punktowej wtedy jest

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu. \quad (2.54)$$

przestrzenna część tego podstawowego prawa dynamiki łączy się z Newtonskim w sposób który wynika bezpośrednio z (2.52)

$$m_0 \frac{d}{d\tau} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathbf{F}. \quad (2.55)$$

Teraz możemy wyprowadzić prawo zachowania energii cząstki punktowej, różniczkując kwadrat masy niezmienniczej

$$\frac{dm_0^2 c^2}{d\tau} = \frac{d(p_0^2 - \mathbf{p}^2)}{d\tau} = 2 \sum_{\mu=0}^3 \epsilon_\mu p_\mu \frac{dp_\mu}{d\tau} = 2 \sum_{\mu=0}^3 \epsilon_\mu p_\mu F_\mu = 2p_0 \frac{dp_0}{d\tau} - 2\mathbf{p}\mathbf{F} = 0, \quad (2.56)$$

inaczej, podstawienie wyrażenia dla p_0 z (2.51)

$$2 \frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d\left[\frac{m_0 c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right]}{d\tau} - 2m_0 \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{F} = 0, \quad (2.57)$$

doprowadzi do prawa zachowania energii

$$\frac{dmc^2}{dt} = \mathbf{v}\mathbf{F}, \quad (2.58)$$

gdzie wyrażenie

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

możemy interpretować jako energie, bo iloczyn skalarny $\mathbf{v}\mathbf{F}$ jest mocą siły \mathbf{F} .

2.6 Prędkość względna

W mechanice nierelatywistycznej prędkość względna definiuje się jako różnica prędkości u, v , mierzonych w tym samym UO. Wtedy prędkość drugiego ciała względem pierwszego definiuje się jako $w = v - u$. Taka definicja niezmiennicza w stosunku do transformacji Galileusza, ale nie w stosunku do transformacji Lorentza. Dlatego w teorii względności powinniśmy wyprowadzić inny

wzór. The fact that $w = v - u$ has no physical meaning becomes evident by examining the following example. Let the velocities u and v have opposite directions and have magnitudes near to the speed of light or equal to it. Then the "velocity" w will have a magnitude near or equal to twice the speed of light, which is evidently absurd. We shall, therefore, give a new definition of relative velocity which is in accord with the requirements of Relativity and has a direct physical meaning. Let the velocities of two bodies in some frame of reference be u and v as before. We can introduce a primed frame of reference in which the velocity of one, say the first, body vanishes. Then we can interpret the velocity v' of the second body in this frame as the relative velocity of the two bodies. We shall see that the magnitude of v' will depend symmetrically on u and v , so that the so defined relative velocity of two bodies does not depend upon which body was chosen to be at rest in the new frame.

To illustrate the physical significance of our definition we consider an example. Imagine we are observing two planes from the ground and let their velocities be \mathbf{u} (1) and \mathbf{v} (2) respectively. Assume that the first plane has radar equipment permitting a measurement of the speed of the other plane relative to itself. The velocity so measured will be the relative velocity of our definition. We must express this relative velocity in terms of the components of the velocities \mathbf{u} and \mathbf{v} of the two planes, as observed from the ground. For this purpose we write down the general formulae for a Lorentz transformation deduced in Section 10.

Mieliśmy:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.59)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.60)$$

Ogólnie [2]

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t + (b - 1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{r} - V^2t) \quad (2.61)$$

$$t' = b\left(t - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right), \quad (2.62)$$

gdzie \mathbf{V} , b , patrz (2.15). Prędkość \mathbf{u} samolotu 1, przyrównujemy do

$$V_x = u_x, \dots \quad (2.63)$$

Prędkość drugiego samolotu (2), mierzonego z Ziemi, wynosi

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2.64)$$

natomiast prędkość drugiego samolotu, mierzona z pierwszego, jest

$$\mathbf{v}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}. \quad (2.65)$$

Różniczkując wzory (2.67)

$$d\mathbf{r}' = d\mathbf{r} - \mathbf{V}dt + (b-1)\frac{\mathbf{V}}{V^2}(\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} - V^2dt) = \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \mathbf{u} + (b-1)\frac{\mathbf{u}}{u^2}(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - u^2) \right] dt \\ dt' &= b\left(dt - \frac{\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}}{c^2}\right) = b\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{c^2}\right) dt, \end{aligned} \quad (2.67)$$

Tożsamość $[A \times B] \cdot [C \times D] = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$ yields $[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]^2 = [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] \cdot [\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = u^2v^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

Stąd

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u} + (b-1)\frac{\mathbf{u}}{u^2}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - u^2)}{b\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}, \quad (2.68)$$

składowe \mathbf{v}' są wymierne funkcje składowych \mathbf{v} . Podniesienie do kwadratu daje:

$$v'^2 = \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 - \frac{[\mathbf{u} \times \mathbf{v}]^2}{v^2}}{\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^2}. \quad (2.69)$$

Proposition 1. v'^2 jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Proposition 2. Symetria względem zamiany \mathbf{u}, \mathbf{v} .

Proposition 3. Z $u^2 \leq c^2, v^2 \leq c^2$ wynika że $v'^2 \leq c^2$.

Dowód:

$$1 - \frac{v'^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)^2} \quad (2.70)$$

Uwaga 1. Jeśli $[\mathbf{u} \times \mathbf{v}] = 0$, $\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{b\left(1 - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2}\right)}$

Uwaga 2. Jeśli $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] = 0$, $\mathbf{v}' = b^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{u}$

Powstaje hipoteza o przestrzeni prędkości o charakterze geometrycznym: ścieżka do przestrzeni Łobaczewskiego.

2.7 Przestrzeń Łobaczewskiego.

Rozważmy prędkość względną dwóch ciał poruszających się z blizkimi prędkościami $\mathbf{v}, \mathbf{u} = \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (2.68). Po dzieleniu dv'^2 na c^2 mamy:

$$ds^2 = \frac{c^2 dv^2 - [\mathbf{v} \times d\mathbf{v}]^2}{c^2 - v^2} \quad (2.71)$$

Propozycja 1. dv'^2 jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

Let us put $v_x(p), \dots$

$$s = \int_{p_1}^{p_2} \sqrt{2F} dp, \quad (2.72)$$

gdzie

$$F = \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathbf{v}}^2}{c^2 - v^2} + \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}})^2}{(c^2 - v^2)^2}, \quad (2.73)$$

pochodna po p oznaczona kropką.

Określimy prostą Łobaczewskiego, jako najkrótszą krzywą, łączącą punkty p_1, p_2 . Dlatego przyrównamy zero wariacje całki (2.72), innymi słowy, napiszmy równanie Eulera-Łagrangea dla

$$L = \sqrt{2F}, \quad (2.74)$$

albo

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_x} - \frac{\partial L}{\partial v_x} = 0. \quad (2.75)$$

Analiza całek równania (2.75) (patrz [2]) dają linowe relacje między składowymi prędkości \mathbf{v} , więc wymierna transformacja Lorentza nie zmienia charakter relacji.

Długość odczynku $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mu(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad (2.76)$$

w przestrzeni prędkości odrzynamy, całkując we wzorze (2.72). Dla jednokowo skierowanych $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1$ długość (prędkość względna) jest

$$v' = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2 v_1}{c^2}} \quad (2.77)$$

Kąt się wprowadzi standardowo

$$\cos(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) = \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_2| |\mathbf{v}_1|}, \quad (2.78)$$

możno więc określić trójkąt i udowodnić, że jest to trójkąt Łobaczewskiego. Experimenty Fizeau (1851, prędkość światła w ośrodku ruchomym - wodzie en.wikipedia.org/wiki/Fizeau_experiment?) i Bradleya (zjawisko aberacji astronomicznej) potwierdzają rzeczywistość geometrii przestrzeni prędkości.

Teoria względności III.

3.1 Szczególna teoria względności w dowolnych współrzędnych.

$$\sum_0^3 \left(\frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right)^2 = \begin{cases} 0 & \text{swiatlo} \\ 1 & \text{Hamilton - Jacobi (ruch czastki punktowej)} \end{cases}$$

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial w}{\partial x_\mu} \frac{\partial w}{\partial x_\nu} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Twierdzenie:

Istnieją współrzędne Galileusza, w których $g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} e_\mu$;
 wiemy, że $R_{\mu\nu, \alpha\beta} = 0$, $g^{00} > 0$, $\sum_1^3 g^{ik} \xi_1 \xi_k < 0$.

3.2 Kolejność wydarzeń

Załóżmy że w naszej przestrzeni dzieją się 2 wydarzenia: jedno w miejscu o współrzędnej x i w czasie t oraz drugie w miejscu oznaczonym jako x' oraz t'

$$\text{I. } t_2 - t_1 > \frac{1}{c} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 > 0$$

$$T = \frac{1}{c} \sqrt{(t_2 - t_1)^2 c^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2}$$

Gdzie T jest odcinkiem czasowym.

W przypadku wydarzeń kwazijednoczesnych (czyli takich w których kolejność jest względna)

$$\text{II. } -\frac{1}{c} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| < t_2 - t_1 < \frac{1}{c} |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$$

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 < 0$$

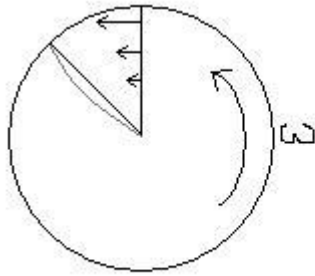
$$R = \sqrt{(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2}$$

Gdzie R jest odcinkiem przestrzennym.

Stwierdzenie: W przypadku II istnieje Układ odniesienia, w którym wydarzenia są jednoczesne, tzn

$$t'_2 - t'_1 = \beta[t_2 - t_1 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\mathbf{v}]$$

3.3 Ruch przyspieszony



$$\Delta l' = \beta \Delta l$$

Prosta w jednym układzie odniesienia jest krzywą w drugim UO, który porusza się obrotowo z częstotliwością ω

3.4 Czym jest położenie i czas?

Pierwszym etapem przy opisie rzeczywistości jest określenie zestawu podstawowych wielkości. Są to wielkości, które uzyskujemy wprost z dokonanego pomiaru/obserwacji. Na przykład prędkość jest wielkością pochodną co wychodzi wprost z jej definicji: wektorowa wielkość fizyczna wyrażająca zmianę wektora położenia w jednostce czasu.

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Wielkościami podstawowymi są: położenie (x, y, z) oraz czas t . Określa się je poprzez porównanie ze "wzorcem": położenie - przez długość fali elektromagnetycznej, czas - przez ruch okresowy - okres T fali elektromagnetycznej. Metody pomiaru odległości:

1. porównanie bezpośrednio ze wzorcem,
2. triangulacja,
3. radiolokacja.

3.5 Propagacja fali elektromagnetycznej.

$$\begin{aligned}\square\varphi &= 0 \\ \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right] \varphi &= 0 \\ ct &= f(x, y, z) \\ (\nabla f)^2 &= 1\end{aligned}$$

. Funkcja opisująca położenie czoła fali:

$$W(t, x, y, z) = 0 \Rightarrow \frac{1}{c^2}(W_t)^2 - (\nabla W)^2 = 0$$

Stwierdzenie:

$$\begin{aligned}W_x &= W_y = W_z = \text{const.} \\ x - x_0 &= c \frac{W_x}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}} (t - t_0) = c\alpha(t - t_0) \\ y - y_0 &= \dots \\ z - z_0 &= \dots \\ c^2(t - t_0)^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 &= 0 \\ c^2(t - t_0)^2 - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 &= 0\end{aligned}$$

3.6 Inercjalne układy odniesienia.

$$\begin{aligned}\bar{R} &= 0 \rightarrow \ddot{\bar{r}} = 0 \\ \bar{r} &= \bar{r}_0 + \bar{v}t\end{aligned}$$

Układ inercjalny jest to układ odniesienia, względem którego każde ciało punktowe, o zrównoważonym oddziaływaniu z innymi ciałami (suma sił = 0), porusza się bez przyspieszenia. Istnienie takiego układu jest postulowane przez pierwszą zasadę dynamiki Newtona:

I prawo Newtona $\rightarrow \exists$ Zbiór inercjalnych układów odniesienia.

Teoria Lorentza:

Istnieje klasa inercjalnych układów odniesienia, między którymi zachodzi transformacja Poincarego $x'_{\mu} = \Lambda'_{\mu\nu} x_{\nu} + a_{+\mu}$ (o szczegółach patrz niżej).

W elektrodynamice:

$$\bar{R} = 0 \rightarrow \bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{v}t$$

Bazowa zasada teorii względności:

$$\begin{aligned} & \text{równanie + warunki Cauchy'ego} \\ & t, \bar{r} \rightarrow t', \bar{r}' \rightarrow d\tau = ds \rightarrow \text{forma II prawa Newtona} \end{aligned}$$

$$m_0 \frac{d^2 x_{\mu}}{d\tau^2} = F_{\mu}.$$

3.7 Efekt Dopplera

Rozważmy ruchomy układ UO' , w którym zachodzą pewne procesy odbywające się ze stałym interwałem. Wydarzenia te będziemy obserwować z nieruchomego układu UO . Niech $r(t)$ będzie odległością pomiędzy dwoma układami w zależności od czasu t i niech t_n będzie oznaczać czas kolejnych wydarzeń w układzie UO' , dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Czasy t_n^* po jakich kolejne wydarzenia zostaną zaobserwowane w układzie UO możemy obliczyć w następujący sposób:

$$t_n^* = t_n + \frac{r(t_n)}{c} \quad (3.1)$$

Pytanie: Czy czasy obserwacji t_n^* będą zachodziły z tym samym interwałem co czasy zajścia kolejnych procesów w ruchomym układzie? Rozpatrzmy przypadek gdy nasz ruchomy układ będzie się oddalał od układu nieruchomego ze stałą prędkością v , wzdłuż jednej osi:

$$x = vt; y = 0; z = 0 \quad (3.2)$$

Na podstawie (3.1) możemy obliczyć czasy zajścia kolejnych procesów:

$$t_n = \frac{t_n^*}{1 + \frac{v}{c}} \quad (3.3)$$

Używając transformacji Lorentza wprowadzamy nowy punkt odniesienia związany ściśle z ruchomym układem:

$$x' = \frac{x - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.4)$$

$$t' = \frac{t - vx^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.5)$$

Co po inwersji daje nam wyrażenia:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.6)$$

$$t = \frac{t' + vx^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.7)$$

Niech wydarzenia w układzie primowanym będą zachodziły w czasie $t'_n = \tau n$, gdzie τ to stała będąca interwałem pomiędzy każdym kolejnym wydarzeniem.

Możemy zatem przyjąć:

$$t_n^* = (1 + v)t_n = n\tau \sqrt{\frac{1 + v}{1 - v}}, \quad (3.8)$$

co daje odczyty czasu, jako funkcje τ .

3.8 Prędkość względna

W mechanice nierelatywistycznej prędkość względna definiuje się jako różnica prędkości u, v , mierzona w tym samym UO. Wtedy prędkość drugiego ciała względem pierwszego definiuje się jako $w = v - u$. Taka definicja niezmiennicza w stosunku do transformacji Galileusza, ale nie w stosunku do transformacji Lorentza. Dlatego w teorii względności powinniśmy wyprowadzić inny wzór. The fact that $w = v - u$ has no physical meaning becomes evident by examining the following example. Let the velocities u and v have opposite directions and have magnitudes near to the speed of light or equal to it. Then the "velocity" w will have a magnitude near or equal to twice the speed of light, which is evidently absurd. We shall, therefore, give a new definition of relative velocity which is in accord with the requirements of Relativity and has a direct physical meaning. Let the velocities of two bodies in some frame of reference be u and v as before. We can introduce a primed frame of reference in which the velocity of one, say the first, body vanishes. Then we can interpret the velocity v' of the second body in this frame as the relative velocity of the two bodies. We shall see that the magnitude of v' will depend symmetrically on u and v , so that the so defined relative velocity of two bodies does not depend upon which body was chosen to be at rest in the new frame. To illustrate the physical significance of our definition we consider an example. Imagine we are observing two aeroplanes from the ground and let their velocities be u and v respectively. Assume that the first plane has radar equipment permitting a measurement of the speed of the other plane

relative to itself. The velocity so measured will be the relative velocity of our definition. We must express this relative velocity in terms of the components of the velocities u and v of the two planes, as observed from the ground. For this purpose we write down the general formulae for a Lorentz transformation deduced in Section 10. These are

Uwagi matematyczne

4.1 Pojęcie grupy

Na początku dla jasności dalszego tekstu i rozważań wprowadźmy pojęcie grupy:

Grupą nazywamy taką strukturę algebraiczną (G, \star) , gdzie G jest dowolnym niepustym zbiorem, zaś $\star: G \times G \rightarrow G$ działaniem dwuargumentowym spełniającym następujące warunki:

1. $\forall a, b, c \in G (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$, łączność działania;
2. $\exists e \in G \forall a \in G e \star a = a \star e = a$, gdzie e nazywamy elementem neutralnym działania;
3. $\forall a \in G \exists b \in G a \star b = b \star a = e$, gdzie b nazywamy elementem odwrotnym do elementu a .

Więcej informacji na temat teorii grup można znaleźć w często używanej na wydziale FTiMS PG w książce Jacka Komorowskiego *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*.

4.2 Przestrzeń liniowa.

Przestrzeń liniowa L , $a + b \in L$, $\alpha \cdot a \in L$, $\alpha \in \mathfrak{S}$

Baza: $\forall a \in L a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, $\{e_i\}$ - jest bazą;

$a = \sum_{i=1}^n a'_i e'_i$; $a'_i = \sum_{k=1}^n t_{ik} a_k$; $e'_k = \sum_{i=1}^n t_{ik} e_i$

4.3 Odległość to norma różnicy wektorów.

$\exists \|a\| \Rightarrow \|a - b\|$, istnieje norma - przestrzeń unormowana;

$\cos \gamma = \frac{(a, b)}{\|a\| \|b\|}$, $\|a\| = (a, a)^{\frac{1}{2}}$, istnieje iloczyn skalarny - przestrzeń unitarna.

4.4 Obrót.

Transformacja, która nie zmienia normy, iloczynu skalarnego.

$$(Ta, Tb) = (T^T Ta, b) = (a, b), \quad T^T T = I \Rightarrow \det T \det T^T = 1 \Rightarrow \det T = \pm 1$$

jeżeli $\det T = 1$, T - obrót, w szczególności I .

$$n=3 \quad T \in O^+(3) \quad \text{grupa} \quad \mathbf{T}_e = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Transformacje infinyzimalne.

$$T = I + \epsilon M + \dots$$

$$(I + \epsilon M^T + \dots)(I + \epsilon M + \dots) = I$$

$$I + \epsilon(M^T + M) + \epsilon^2(M^T M) + \dots = I$$

$$M^T + M = 0$$

$$M_{ik} = -M_{ki}, \quad M - \text{antysymetryczna}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & M_{12} & M_{13} \\ & 0 & M_{23} \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

4.6 Algebra Liego

Zbiór M tworzy przestrzeń liniową $M \in L$ algebry Liego $O^+(3)$.

$$M = M_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon M_{12} = \omega_1, \quad \epsilon M_{13} = \omega_2, \quad \epsilon M_{23} = \omega_3$$

$$\epsilon M = \sum_i^n \omega_i e_i$$

$$[e_i, e_k] = \epsilon_{ik\ell} e_\ell, \quad T = e^{\epsilon M}$$

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ & -1 & 0 \\ & & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{inwersja, nie należy do grupy obrotów } O^+(3).$$

Nowa transformacja $\tilde{T} = \det T \cdot T$

Jeżeli $a_i' = \sum_{k=1}^n \tilde{T}_{ik} a_k$, pseudowektor

4.7 Zasada kowariantności.

Zbiór $L \times L \ni \{a, \tilde{a}\} = a \times \tilde{a}$

$a_i e_j \times \tilde{a}_j \tilde{e}_j = a_i \tilde{a}_j (e_i \times \tilde{e}_j)$ - baza tensorowa

Transformacje do innego układu odniesienia

$$a_i \tilde{a}_j = \sum_{i', j'} t_{i' i} a_{i'} a_{j'} t_{j' j}$$

$S_{ij} = \sum_{j',i'} t_{ii'} t_{jj'} S_{i'j'}$, definicja tensora 2 rzędu.

$S_{ijk} = \sum_{j',i',k'} t_{ii'} t_{jj'} t_{kk'} S_{i'j'k'}$

Symetria tensorów.

$S_{ik} = S_{ki}$ - tensor symetryczny

$S_{ik} = -S_{ki}$ - tensor antysymetryczny

4.8 Algebra tensorów.

1. Dany rząd i gatunek tensora.
2. Dodawanie, mnożenie.
3. Kontrakcja $\sum S_{ii}$.

4.9 Nieskończenie małe transformacje grupy Lorentza

Grupa Lorentza

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad n = 4, a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

Pseudonorma $\{a, a\} = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = \sum_{ik=0}^3 g_{ik} a_i a_k$

$A^T G A = G$

$A = I + \epsilon M + \dots$

$(I + \epsilon M^T) G (I + \epsilon M) = G + \epsilon (M^T G + G M) + \dots = G$

$M^T G + G M = 0$

$G_{ik} = \epsilon_i \delta_{ik}$

$M_{ik}^T \epsilon_k \delta_{kl} = -\epsilon_i \delta_{ik} M_{kl}$

$M_{li} \epsilon_l = -\epsilon_i M_{il}, \quad l=i, \quad M_{ii} = -M_{ii} M_{ii} = 0$

$$\mathbf{G} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ \hline M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \\ M_{13} & M_{23} & 0 & M_{34} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} & 0 \end{array} \right)$$

4.10 Przestrzeń Riemanna.

Ogólnie, niech wzór

$$\phi = g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji} \quad \det ||g_{ij}|| \neq 0. \quad (4.1)$$

def. formę rzeczywistą (Riemann 1864). Uwaga: idexy górne i dolne są specjalnie dobrany (suma w.g. dolnyvh i górnych).

Elementem długości może służyć

$$ds^2 = eg_{ij}dx^i dx^j. \quad (4.2)$$

e dobrana żeby $ds^2 > 0$, więc dla wektora o kontrawariantnych komponentach ξ^i

$$\xi^2 = eg_{ij}\xi^i \xi^j. \quad (4.3)$$

def. normę. Przestrzeń z metryką (4.2) i normą (4.3) nazywa się **przestrzeń Riemanna**. Wybor UO, współrzędnych, układy Cartezjaskie

Rozważmy

$$x'^i = \phi^i(x), \det[\phi^i_{x_j}] \neq 0, \quad (4.4)$$

jeśli

$$ds^2 = g'_{ij}dx'^i dx'^j, \quad (4.5)$$

uwzględnimy

$$dx'^i = \frac{\partial \phi^i}{\partial x^k} dx^k, \quad (4.6)$$

wtedy

$$g'_{ij} = g_{sp} \frac{\partial x^i}{\partial x'^s} \frac{\partial x^j}{\partial x'^p} \quad (4.7)$$

Def.

jeśli zbiór funkcji

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \quad (4.8)$$

spełnia

$$T_{q_1 \dots q_s}^{p_1 \dots p_r} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x'^{p_1}} * * * \frac{\partial x^{i_r}}{\partial x'^{p_r}} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x'^{q_1}} * * * \frac{\partial x^{j_s}}{\partial x'^{q_s}} \quad (4.9)$$

więc g_{sp} dwa razy kowariantny tensor (Eisenhart: fundamentalny).

Różniczkując (4.7) i rozwiązując wynik względem drugich pochodnych, mamy

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x'^i \partial x'^j} + \left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\} \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^q}{\partial x'^j} = \left\{ \begin{matrix} h \\ ij \end{matrix} \right\}' \frac{\partial x^k}{\partial x'^h} \quad (4.10)$$

gdzie

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\} = g^{kh} [pq, h]; \quad [pq, h] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x_q} + \frac{\partial g_{qk}}{\partial x_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_h} \right), \quad (4.11)$$

jeśli wprowadzić g^{ik} jako uzupełnienie algebraiczne $\det||g_{ij}||$ podzielone na ten wyznacznik $\det||g_{ij}||$. Podobnie

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ pq \end{matrix} \right\}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{pk}}{\partial x_q} + \frac{\partial g_{qk}}{\partial x_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_k} \right) \quad (4.12)$$

Warunki całkowalności (4.10) dają;

$$R_{abc}^{td} \frac{\partial x^h}{\partial x'^d} = R_{ijk}^{th} \frac{\partial x^i}{\partial x'^a} \frac{\partial x^j}{\partial x'^b} \frac{\partial x^k}{\partial x'^d}. \quad (4.13)$$

gdzie

$$R_{ijk}^{th} = \frac{\partial \{ \begin{smallmatrix} h \\ ik \end{smallmatrix} \}}{\partial x^j} - \frac{\partial \{ \begin{smallmatrix} h \\ ij \end{smallmatrix} \}}{\partial x^k} + \{ \begin{smallmatrix} l \\ ik \end{smallmatrix} \} \{ \begin{smallmatrix} h \\ lj \end{smallmatrix} \} - \{ \begin{smallmatrix} l \\ ij \end{smallmatrix} \} \{ \begin{smallmatrix} h \\ lk \end{smallmatrix} \} \quad (4.14)$$

nazywa się **tensorem krzywizny Riemanna**.

Jeśli g_{ik} nie zależy od współrzędnych, $R_{ijk}^{th} = 0$ i, jak wynika z (4.13), w dowolnych współrzędnych (układzie odniesienia).

Taka przestrzeń nazywa się euklidesowskiej.

Różniczkując 4.9, dostajemy nie-tensor, ale

$$T_{j_1, \dots, j_s, k}^{i_1, \dots, i_r} = \frac{\partial T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r}}{\partial x_k} + \sum_h^{1, \dots, r} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_{h-1}, l, i_{h+1}, \dots, i_r} \{ \begin{smallmatrix} j_h \\ lk \end{smallmatrix} \} - \sum_h^{1, \dots, s} T_{j_1, \dots, j_{h-1}, l, j_{h+1}, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \{ \begin{smallmatrix} l \\ j_h k \end{smallmatrix} \}. \quad (4.15)$$

- są składowe tensora r razy kontra-, $s+1$ razy kowariantnego. Taka procedura nazywa się różniczkowaniem kowariantnym.

Przykład:

$$A_{i,k} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} - \{ \begin{smallmatrix} h \\ ik \end{smallmatrix} \} A_h \equiv \nabla_k A_i. \quad (4.16)$$

Stw.

$$g_{ik, j=0}$$

4.11 Równanie geodezyjnej

Rozważmy krzywą C :

$$x^i = \phi^i(t), \quad (4.17)$$

oraz wektor $u^i = \frac{d\phi^i(t)}{dt}$. Forma $u^i u_i$ określa typ krzywej (geodezyjnej)

$$\xi_{,j}^i \frac{dx^j}{dt} \equiv \frac{dx^i}{dt} + \xi^i \{ \begin{smallmatrix} i \\ hj \end{smallmatrix} \} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (4.18)$$

mają rozwiązanie zdefiniowane "warunkami początkowymi" dla ξ^i . Jeśli rozwiązanie istnieje, mówimy (Levy-Civita) - wektory są równoległe wzdłuż C . Definicja względna! W przestrzeni Euklidesowskiej - inaczej (bezwzględna).

Wektor o składowych $\frac{dx^i}{dt}$ jest stycznym do C . Żeby one były równoległe, **iff** C spełnia

$$\frac{dx^j}{dt} \left[\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \{ \begin{smallmatrix} i \\ hk \end{smallmatrix} \} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right] - \frac{dx^i}{dt} \left[\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \{ \begin{smallmatrix} j \\ hk \end{smallmatrix} \} \frac{dx^h}{dt} \frac{dx^k}{dt} \right]. \quad (4.19)$$

- nazywa się geodezyjnej. Forma $u^i u_i$ określa typ krzywej (geodezyjnej). Jeśli $u^i u_i = 0$, mówimy o zerowej geodezyjnej. Inaczej

$$\frac{dx^h}{dt} + \Gamma_{mn}^h u^m \frac{dx^n}{dt} \quad (4.20)$$

Jeśli s - długość łuku C , $\frac{dx^k}{ds}$ - jednostkowy, równanie na C upraszcza:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} i \\ hk \end{matrix} \right\} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (4.21)$$

- równanie geodezyjnej. Wygląda jako równanie ruchu. **Twierdzenie**

Równanie (4.21) wynika z ekstremum funkcjonału

$$\int ds \sqrt{g_{hk} \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^k}{ds}}, \quad (4.22)$$

minimalna długość krzywej,

W przestrzeni Euklidesa - prosta ($\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0$)

4.12 Grupa Ruchów

4.12.1 Równania Killinga

Rozważmy transformacje infinitesimalne

$$x'^j = x^j + \xi^j \delta t, \quad (4.23)$$

gdzie

$$\delta \phi = (\delta g^{ij}) dx^i dx^j + g^{ij} (\delta dx^i) dx^j + g^{ij} dx^i (\delta dx^j),$$

$$\delta dx^i = d \delta x^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} dx^j \delta t, \quad \delta g^{ij} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \xi^k \delta t.$$

W monografii [5]

Tw. $\delta \phi = 0$ **iff**

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \xi^k + g^{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + g^{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} = 0. \quad (4.24)$$

- Równania Killinga.

Kąt między kierunkami $d_1 x^i$ i $d_2 x^i$

def.

$$\cos \alpha = \frac{g_{ij} d_1 x^i d_2 x^j}{\sqrt{e_1 g_{ij} d_1 x^i d_1 x^j e_2 g_{ij} d_2 x^i d_2 x^j}}. \quad (4.25)$$

Podobnie $\delta \phi$ liczymy:

$$\delta g_{ij} d_1 x^i d_2 x^j = \left[\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} \xi^k + g^{ik} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + g^{jk} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \right] d_1 x^i d_2 x^j \delta t, \quad (4.26)$$

więc, na wskutek równania Killinga, $\delta \cos \alpha = 0$.

Stwierdzamy, że transformacja (4.23) jest ruchem (**iff**).

Jeśli współrzędne wybrane jako

$$\xi^i = \delta_1^i, \quad (4.27)$$

równania Killinga mają postać

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^1} = 0. \quad (4.28)$$

Wtedy g^{ij} nie zależy od x^1 i forma ϕ nie zmienia się przy

$$x'^1 = x^1 + t, x'^j = x^j. \quad (4.29)$$

Więc

Tw. Jeśli przestrzeń dopuszcza ruch infinitesimalny, to dopuszcza też grupę G_1 , dla której ξ^1 jest generatorem.

4.13 Grupy Lorentza i Poincare

Grupą Lorentza nazywamy zbiór transformacje

$$x'_i = \sum_{k=0}^3 e_k a_{ik} x_k$$

przy których nie zmienia się ds^2 .

Oznaczając formę biliniową jako ds^2 możemy zapisać go inaczej jako

$$ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 = \sum_{k=0}^3 e_k dx_k^2$$

Gdzie

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = e_2 = e_3 = -1$$

Grupa Poincarégo uwzględnia transformacje równoległego przesunięcia. Możemy zapisać

$$x'_i = a_i + \sum_{k=0}^3 e_k a_{ik} x_k$$

Gdzie $\sum_{k=0}^3 e_k a_{ik} x_k$ jest transformacją Lorentza. Względny ruch obu układów współrzędnych możemy opisać jako

$$\frac{a_{i0}}{a_{00}} = \frac{v_i}{c}$$

Oznaczając przez parametr β przez

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Możemy przejść z czasem oraz odległością do nowych współrzędnych w przestrzeni grupy Lorentza

$$t^* = \beta \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2} \right)$$

$$x_m^* = x_m - v_m t + (\beta - 1) \frac{v_m}{v^2} \sum v_k (x_k - v_k t)$$

Gdzie

$$\beta = a_n 0 = \frac{\delta t'}{\delta t} > 0$$

Uwaga:
Jeżeli

$$\mathbf{v} \parallel x \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = v_x, v_x \equiv v$$

Oraz

$$\alpha_{ik} = -a_{ik} + \frac{a_{i0} a_{0k}}{a_{00} + 1} = -a_{ik} + (\beta - 1) \frac{v'_{ik}}{v^2}$$

To

$$\alpha_{ij} \alpha_{kj} + \dots = \delta_{ik}$$

Więc macierz α jest ortogonalna,

$$\alpha^T \alpha = I$$

Gdzie I jest macierzą jednostkową.

Struktura grupy Poincare:

$$\underline{x}' = \Lambda \underline{x} + \underline{a}.$$

Stwierdzenie.

Grupa Lorentza jest podgrupą grupy Poincarégo.

W stronę teorii grawitacji I

5.1 Tensor masy

Równania ruchu będące konsekwencjami zasad zachowania zwykle mają postać

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T^{0k}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial T^{i0}}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.2)$$

gdzie T^{ik} to pewien tensor. Jeśli za T^{00} podstawimy gęstość masy, tensor ten nazywamy tensorem masy. Równanie (5.1) będzie wówczas wyrażać zasadę zachowania masy i energii, natomiast (5.2) zasadę zachowania pędu. Wyraz T^{00} jest gęstością masy z uwzględnieniem masy spoczynkowej i masy energii kinetycznej. Wyraz cT^{0i} jest gęstością strumienia masy, natomiast $c^i T^{ik}$, ($i, k = 1, 2, 3$) to gęstość strumienia pędu. Masa M i związana z nią energia w pewnej objętości dane są przez całkę

$$M = \frac{W}{c^2} = \int T^{00} dV \quad (5.3)$$

natomiast składowe pędu przez wyrażenie

$$p^i = c \int T^{i0} dV \quad (5.4)$$

Poza spełnieniem zasady zachowania masy, energii i pędu, spełniona musi być zasada zachowania momentu pędu i ruchu środka masy. Z równań (5.1) i (5.2) wynika zależność

$$\frac{\partial}{\partial x_0} (x_i T^{k0} - x_k T^{i0}) + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_m} (x_i T^{km} - x_k T^{im}) = T^{ki} - T^{ik} \quad (5.5)$$

Ma ona postać poszukiwanego równania zachowania, jeśli prawa strona równania wynosi zero. Nakłada to warunek symetryczności na tensor.

$$T^{ki} = T^{ik} \quad (5.6)$$

Wprowadza się zależności całkowe

$$M_{ik} = c \int (x_i T^{k0} - x_k T^{i0}) dV \quad (5.7)$$

$$K^i = \frac{1}{c} M^{i0} = \int (x_i T^{00} - x_0 T^{i0}) dV \quad (5.8)$$

Całki te brane po całej przestrzeni są stałe. Wyrazy M^{23} , M^{31} i M^{12} są składowymi momentu pędu układu, a wielkości M^{10} , M^{20} i M^{30} dzielone przez c interpretuje się jako iloczyn masy i początkowego położenia środka masy układu.

5.2 Przykłady

W tym rozdziale rozważymy jawną postać tensora masy w konkretnych przykładach.

5.2.1 Nieoddziałujące cząstki materii

Zacniemy od najprostszego przypadku ziarnistej materii, przez co rozumiemy zbiór nieoddziałujących cząstek o ciągłym rozkładzie prędkości. Przyjmujemy szczególne oznaczenie Θ^{ik} dla tensora masy. Przez ρ^* oznaczymy niezmienniczą gęstość masy, t.j. gęstość w tym układzie odniesienia, względem którego cząstki z określonego elementu objętości są chwilowo w spoczynku. Niech u^i będą składowymi czterowymiarowej prędkości cząstek. Przyjmujemy

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \rho^* u^i u^k \quad (5.9)$$

Z definicji Θ^{ik} jest czterowymiarowym kontrawariantnym tensorem. Składowa Θ^{00} ma postać

$$\Theta^{00} = \frac{1}{c^2} \rho^* (u^0)^2 = \frac{\rho^*}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (5.10)$$

Składowa ta musi być równa całkowitej gęstości masy, z uwzględnieniem masy energii kinetycznej. Jeśli ρ^* jest gęstością masy spoczynkowej w układzie poruszającym się z cząsteczkami, to gęstość masy spoczynkowej w "układzie laboratoryjnym" (względem którego cząsteczki się poruszają) wynosi

$$\rho_{lab} = \frac{\rho^*}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.11)$$

Dalej, jeśli ρ jest gęstością masy spoczynkowej, gęstość masy całkowitej (z uwzględnieniem energii kinetycznej) wynosi

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\rho^*}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Theta^{00} \quad (5.12)$$

Wyrażenie na gęstość jest analogiczne do wyrażenia na masę relatywistyczną cząsteczki.

$$M = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.13)$$

Pozostałe składowe tensora mają postać

$$\Theta^{0i} = \frac{1}{c} \frac{\rho^* v_i}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\rho v_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.14)$$

oraz

$$\Theta^{ik} = \frac{1}{c^2} \frac{\rho^* v_i v_k}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{c^2} \frac{\rho v_i v_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (5.15)$$

Rozważmy wyrażenie na dywergencję tensora. Otrzymamy

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial \Theta_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2} u^i \sum_{k=0}^3 \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k} + \frac{\rho^*}{c^2} \sum_{k=0}^3 u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \quad (5.16)$$

Wprowadźmy oznaczenia

$$Q^* = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k} \quad (5.17)$$

$$w^i = \sum_{k=0}^3 u^k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \quad (5.18)$$

Prawdziwe są również zależności

$$Q^* = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \quad (5.19)$$

$$w^i = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{k=0}^3 v_k \frac{\partial u^i}{\partial x_k} \right) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{du^i}{dt} \quad (5.20)$$

gdzie dt jest pochodną substancjalną. Dowodzi to, że wartość Q^* jest szybkością przyrostu masy spoczynkowej w jednostce objętości płynu, a w^i jest czterowymiarowym przyspieszeniem, którego składowe przestrzenne stają się

przyspieszeniem w przybliżeniu nierelatywistycznym. Na mocy równań ruchu wyrażenie

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial \Theta^{ik}}{\partial x_k} = \frac{Q^*}{c^2} u^i + \frac{\rho^*}{c^2} w^i \quad (5.21)$$

musi się zerować. Dodatkowe warunki

$$u^i u_i = c^2; w^i u_i = 0 \quad (5.22)$$

$$w^i u_i = 0 \quad (5.23)$$

pozwalają rozdzielić równanie

$$\frac{Q^*}{c^2} u^i + \frac{\rho^*}{c^2} w^i = 0 \quad (5.24)$$

na dwa oddzielne

$$Q^* = 0 \quad (5.25)$$

$$w_i = 0 \quad (5.26)$$

Pierwsze z nich jest równaniem ciągłości wyrażającym stałość masy spoczynkowej cząsteczek. W tym przypadku masa spoczynkowa nie zmienia się, ponieważ cząstki nie oddziałują ze sobą i nie zmienia się ich energia wewnętrzna. Drugie równanie wyraża niezmiennosc prędkości, oczywistą w przypadku nieoddziałujących cząstek. Równania ruchu mają pierwszy rząd ze względu na ρ^* i u^i . Tensor Θ^{ik} , będący funkcją tych wielkości, jest funkcją stanu układu.

5.2.2 Tensor masy dla cieczy doskonałej

W przybliżeniu nierelatywistycznym tensor naprężeń cieczy doskonałej redukuje się do wielkości skalarnej. Przyjmijmy, że tensor energii (tensor masy wymnożony przez c^2) ma postać

$$c^2 T^{ik} = (\mu^* + \frac{p}{c^2}) u^i u^k - p e_k \delta_{ik} \quad (5.27)$$

gdzie μ^* i p to skalary związane pewną zależnością funkcyjną

$$\mu^* = f(p) \quad (5.28)$$

W układzie odniesienia, względem którego chwilowa prędkość pewnego punktu płynu jest równa zero, składowa T^{00} jest równa μ^* .

$$c^2 T^{00} = (\mu^* + \frac{p}{c^2}) (u^0)^2 - p e_0 \delta_{00} = (\mu^* + \frac{p}{c^2}) \frac{c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - p \quad (5.29)$$

Jeśli $v \rightarrow 0$, to

$$T^{00} = \mu^* \quad (5.30)$$

Znajdźmy teraz równania ruchu układu. Przyjmując dla uproszczenia oznaczenie w^i z poprzedniego rozdziału oraz

$$Q = \sum_{k=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{p}{c^2} \right) u^k \right] \quad (5.31)$$

otzymujemy wyrażenie

$$c^2 \sum_{k=0}^3 \frac{\partial T^{ik}}{\partial x_k} = Q u^i + \left(\mu^* + \frac{p}{c^2} \right) w^i - e_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (5.32)$$

W przypadku braku sił zewnętrznych wyrażenie to będzie równe zero. Korzystając z równań (5.22) i (5.32) możemy uzyskać nową postać wyrażenia na Q .

$$Q = \frac{1}{c^2} \sum_{k=0}^3 u^k \frac{\partial p}{\partial x_k} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\tau} \quad (5.33)$$

Tutaj dpt jest pochodną substancjalną p a $d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt$ jest różniczką czasu własnego cząsteczki. Z porównania powyższych równań z nierelatywistycznymi równaniami hydrodynamiki wynika, że wielkość p to ciśnienie. Przyrównując do siebie dwa równania na Q otrzymujemy

$$\sum_{k=0}^3 \left[\left(\mu^* + \frac{p}{c^2} \right) \frac{\partial u^k}{\partial x_k} + u^k \frac{\partial \mu^*}{\partial x_k} \right] = 0 \quad (5.34)$$

Określmy nową wielkość przez zależność różniczkową

$$\frac{d\rho^*}{\rho^*} = \frac{d\mu^*}{\mu^* + p^2} \quad (5.35)$$

Dobierając stałą całkowania możemy uzyskać $\rho^* = \mu^*$ dla $p = 0$. Wstawiając (5.35) do (5.34) uzyskamy zależność

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial (\rho^* u^k)}{\partial x_k} = 0 \quad (5.36)$$

Wielkość ρ^* można interpretować jako niezmiennicza gęstość tej części masy spoczynkowej, która nie zmienia się w wyniku ruchu. Wprowadźmy wielkość

$$\Pi = \int_0^p \frac{dp}{\rho^*} - \frac{p}{\rho^*} \quad (5.37)$$

którą interpretuje się jako energię potencjalną jednostki masy płynu, gdzie masa oznacza część masy spoczynkowej niezmienniczej w wyniku ruchu. Wyrażając μ^* przez ρ^* i Π można zapisać tensor masy jako

$$c^2 T^{ik} = [\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^* \Pi + p)] u^i u^k - p e_k \delta_{ik} \quad (5.38)$$

podczas gdy równania ruchu przyjmują postać

$$[\rho^* + \frac{1}{c^2}(\rho^* \Pi + p)] w^i = e_i \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{c^2} \frac{dp}{d\tau} u^i \quad (5.39)$$

5.3 Elektrodynamika - tensor masy

5.3.1 Tensor energii dla pola elektromagnetycznego

Wprowadzimy następujące oznaczenia opisujące elektryczne i magnetyczne pole odnoszące się do równań Maxwella

$$\begin{cases} E_1 = F_{10} \\ E_2 = F_{20} \\ E_3 = F_{30} \\ H_1 = F_{23} \\ H_2 = F_{31} \\ H_3 = F_{12} \end{cases} \quad (5.40)$$

gdzie

$$F_{ikl} = \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_k} \quad (5.41)$$

oraz

$$\sum \frac{\partial F^{ik}}{\partial x_k} = s^i \quad (5.42)$$

przy tym należy pamiętać zaiątek między współzrędnymi kowariantnymi i kontrawariantnymi:

$$F^{ik} = e_i e_k F_{ik} \quad (5.43)$$

Jak widać wzór (5.42) przypomina postacią dywergencję. Czworowymiarowy wektor s^i ma postać:

$$\begin{cases} s^0 = 4\pi\rho \\ s^i = \frac{4\pi}{c} j_i = \frac{4\pi}{c} V_i = \frac{4\pi}{c} \rho^* u^i \quad i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (5.44)$$

Poprzez ρ oznaczona została gęstość przestrzenna ładunku, V_i oznacza trzywymiarową prędkość a j_i gęstość prądu. ρ^* oznacza niezmienniczą gęstość ładunku a u^i to czterowymiarowa prędkość. Równanie ruchu wyraża się poprzez

$$m w_i = -\frac{1}{c} \sum_{k=0}^3 F_{ik} u^k \quad (5.45)$$

Wprowadźmy oraz roważmy następujący tensor:

$$U_{ik} = -\frac{1}{4\pi} e_m F_{im} F_{km} + \frac{1}{16\pi} e_i \delta_{ik} \sum_{m,n=0}^3 F_{mn} F^{mn} \quad (5.46)$$

Przykładowo, trzywymiarowy zapis składników tensora energii pola elektromagnetycznego mają postać:

$$U^{00} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \quad (5.47)$$

$$U^{0i} = -U_{0i} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \quad (5.48)$$

5.3.2 Masa i energia

Tensor masy więc:

$$c^2 T_{ik} = c^2 \Theta_{ik} + U_{ik} \quad (5.49)$$

$$\sum_{k=0}^3 \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.50)$$

Geometria różniczkowa

6.1 Transformacje przestrzennych i czasowych współrzędnych

Teraz należy przeprowadzić analizę przestrzeni krzywoliniowej. Pamiętając jak wygląda element długości

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx_i dx_k = \rho_{ik} dx'_i dx'_k. \quad (6.1)$$

Rozważane wcześniej było równanie czoła fali $(\nabla\omega)^2 = 0$. Inaczej:

$$(\nabla\omega)^2 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2, \quad (6.2)$$

może być podstawą wyprowadzenia wzorów na transformacje Lorentza (szczególną teorię względności), patrz [2].

Jak to się zmieni gdy przejdziemy od jednego układu współrzędnych do innego, czyli gdy $x'_i = x'_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$? Zakładamy, że $J = \det\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right) \neq 0$, bowiem wtedy będzie istniała transformacja odwrotna. Należy również sprawdzić co stanie się z elementem ds^2 po transformacji.

$$dx'_i = \sum_{s=0}^3 \frac{\partial x'_i}{\partial x_s} dx_s, \quad (6.3)$$

podobnie

$$dx'_k = \sum_{p=0}^3 \frac{\partial x'_k}{\partial x_p} dx_p. \quad (6.4)$$

Wstawiając (6.3) oraz (6.4) do (6.1) otrzymujemy:

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik} \sum_{sp} \frac{\partial x'_i}{\partial x_s} \frac{\partial x'_k}{\partial x_p} dx_s dx_p \quad (6.5)$$

Podstawiając za $\sum_{ik} g_{ik} \frac{\partial x'_i}{\partial x_s} \frac{\partial x'_k}{\partial x_p} = g'_{sp}$

$$ds^2 = g'_{sp} dx_s dx_p \quad (6.6)$$

Wtedy równanie na czoło fali ma postać:

$$(\nabla\omega)^2 = \sum e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k} \right)^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^3 g^{\alpha\beta} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial x_\beta} \quad (6.7)$$

gdzie $g^{\alpha\beta} = \sum e_k \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_k} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_k}$ Mając tak zdefiniowane $g^{\alpha\beta}$ oraz $g_{\alpha\beta} = \sum e_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_k}{\partial x_\beta}$ widać że wyrażenie $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\gamma$.

$$\det g_{\alpha\beta} = \det \left(e_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_\alpha} \right) \det \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_\beta} \right) \quad (6.8)$$

Pamiętając iż drugi wyznacznik w równaniu (6.8) jest jacobianem $\det \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_\beta} \right) = J$, oraz zauważając że pierwszy czynnik zawiera w sobie mnożenie wszystkich składowych $e_0 e_1 e_2 e_3 = -1$, czyli $\det \left(e_k \frac{\partial x'_k}{\partial x_\alpha} \right) = -J$, to

$$\det g_{\alpha\beta} = -J^2 \quad (6.9)$$

Dla zmiennych czasowych ważna jest kolejność wydarzeń w czasie, oraz element długości jest większy od zera:

$$ds^2 = g_{00} dx_0^2 > 0 \Rightarrow g_{00} > 0 \quad (6.10)$$

Dla zmiennych kwiazi-czasowych ustalany jest x_0 które jest danym momentem w czasie, a element długości jest mniejszy od zera:

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} dx_i dx_k < 0 \quad (6.11)$$

Mozna rozpaść i zbadać następujące wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad (6.12)$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0 \quad (6.13)$$

$$\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad (6.14)$$

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} > 0 \quad (6.15)$$

Pamiętając iż $g_{11} < 0, g_{22} < 0, g_{33} < 0$ z powyższych zależności wynika, że $\det g < 0, g^{00} > 0$ oraz $\forall \omega_i, \sum g^{ik} \omega_i \omega_k < 0$.

Równanie poruszającej się powierzchni:

$$\omega(x, y, z, t) = 0 \quad (6.16)$$

$$\omega_x dx + \omega_y dy + \omega_z dz + \omega_\tau d\tau = 0 \quad (6.17)$$

Jeżeli dx, dy, dz zmieniają się wzdłuż normalnej do tej powierzchni to

$$dx = \frac{\omega_x}{|\text{grad}\omega|} dn$$

$$dy = \frac{\omega_y}{|\text{grad}\omega|} dn$$

$$dz = \frac{\omega_z}{|\text{grad}\omega|} dn$$

gdzie dn jest modulem przesunięcia w kierunku wektora \mathbf{n} . Zapiszmy równanie (6.17):

$$|\text{grad}\omega| dn + \omega_\tau d\tau = 0 \quad (6.18)$$

$$v = \frac{dn}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 = \frac{\omega_t^2}{|\text{grad}\omega|^2}$$

Prędkość ruchu powierzchni $\omega = 0$

$$\nabla\omega = \sum e_k \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_k}\right)^2 = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 \quad (6.19)$$

zatem $(\nabla\omega)^2 < 0$, natomiast dla innej powierzchni $(\nabla\omega)^2 > 0$.

Jeżeli

$$t = \frac{1}{c} f(x, y, z) \quad (6.20)$$

-równanie czasu, przy

$$(\nabla f)^2 < 1 \quad (6.21)$$

to t definiuje hiperpowierzchnię.

Przestrzeń Riemanna

7.1 Rozmaitość Riemanna

Ponieważ została opisana już przestrzeń lokalnie, to następnym krokiem jest rozszerzenie pojęć na przestrzeń globalną.

Zastosowane zostaną nowe oznaczenia w przestrzeni Reimana:

$\varphi - x_\alpha$

Metryka w danej przestrzeni wyraża się przez:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(x)dx^\alpha dx^\beta$$

oraz

$$ds^2 = g^{\alpha\beta}(x)dx_\alpha dx_\beta$$

gdzie $\alpha, \beta = \{0, 1, 2, 3\}$. Pamiętając, że współrzędne w nowym układzie odniesienia wyrażone są przez współrzędne w starym układzie $x'_i = x'_i(x_0, x_1, x_2, x_3)$ można zapisać różniczkę x'_i jako

$$dx'_i = \sum e_k a_{ik} dx_k = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} dx_k \quad (7.1)$$

Definicja różniczkowania kowariantnego wygląda następująco:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'_i} = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \quad (7.2)$$

gdzie współczynnikami przejści od jednego układu do drugiego są:

$$A'_i = \sum \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} A_k \quad (7.3)$$

$$A^{i'} = \sum \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} A^k \quad (7.4)$$

Następnym krokiem jest skonstruowanie wektorów w tej przestrzeni. Można zrobić to lokalnie. W takim przypadku wektory nie są swobodne, tylko każdy

ma określony punkt do którego jest przymocowany. Zatem niech (7.3) oraz (7.4) będą definicją wektora w następujący sposób:

niech x_α reprezentuje punkt

$$A'_\mu = \sum \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} A_\alpha$$

$$A^{\alpha'} = \sum \frac{\partial x_\mu}{\partial x_\alpha} A^\mu$$

7.2 Linia geodezyjna równoległe

Wprowadzamy parametr p aby uporządkować punkty w przestrzeni, np. p jest indeksem punktów x_α oraz $x_\alpha(p) = \varphi^\alpha(p)$

$x_\alpha^1(p_1), x_\alpha^2(p_2), \dots$

Aby policzyć w tej przestrzeni np. odległość trzeba scałkować ds po krzywej. Wprowadźmy

$$L = \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{\varphi}^\alpha \dot{\varphi}^\beta} \equiv \sqrt{g_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta} \quad (7.5)$$

$$dx_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dp} dp$$

$\dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dp}$ Wtedy posługując się zasadą wariacyjną definiujemy akcję:

$$S = \int_{p_1}^{p_2} L dp \quad (7.6)$$

Z tego posługując się zasadą wariacyjną otrzymuje się równanie Lagrange:

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (7.7)$$

$$F = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \quad (7.8)$$

Niech $F = \sqrt{2L}$. Parametr p można tak dobrać, by $\frac{dF}{dp} = 0$. Otrzymujemy z (7.7):

$$\frac{d}{dp} \frac{1}{\sqrt{2F}} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2F}} \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (7.9)$$

Uwzględniając, że $\frac{dF}{dp} = 0$

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (7.10)$$

Następnie, pamiętając że tensor metryczny $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ jest symetryczny

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\nu} = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta_{\alpha\nu} \dot{x}_\beta + \dot{x}_\alpha \delta_{\beta\nu}) = g_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta \quad (7.11)$$

$$\frac{d}{dp} \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_\alpha} = \frac{d}{dp} g_{\alpha\beta} \dot{x}_\beta \quad (7.12)$$

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \dot{x}_\gamma \dot{x}_\beta - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0 \quad (7.13)$$

Widać, że wyrażenie $\dot{x}_\gamma \dot{x}_\beta$ jest symetryczne, dlatego cały drugi składnik można zapisać w innej postaci:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \dot{x}_\gamma \dot{x}_\beta = \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma \quad (7.14)$$

Równanie (7.13) można zapisać w postaci

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} \right] \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0 \quad (7.15)$$

Czynnik w nawiasie kwadratowym zapiszemy jako nawias Cristofela

$$\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x_\alpha} = [\beta\gamma, \alpha] \quad (7.16)$$

Ostatecznie otrzymane równanie o następującej formie

$$g_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + [\beta\gamma, \alpha] \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0 \quad (7.17)$$

jest równaniem linii geodezyjnej $x_\beta(p)$. Równanie (7.17) opisuje warunek ekstremum drogi $\int_{p_1}^{p_2} dS$. Dalej można dane równanie przekształcić w następujący sposób

$$g^{\nu\alpha} g_{\alpha\beta} \ddot{x}_\beta + g^{\nu\alpha} [\beta\gamma, \alpha] \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0$$

$$\delta_{\nu\beta} \ddot{x}_\beta + g^{\nu\alpha} [\beta\gamma, \alpha] \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0$$

$$\ddot{x}_\nu + g^{\nu\alpha} [\beta\gamma, \alpha] \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0$$

Oznaczając poprzez symbol Clistofela wyrażenie $g^{\nu\alpha} [\beta\gamma, \alpha] = \Gamma_{\beta\gamma}^\nu$ ostatecznie uzyskane równanie (7.18) jest równaniem geodezyjnej

$$\ddot{x}_\nu + \Gamma_{\beta\gamma}^\nu \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma = 0 \quad (7.18)$$

7.3 Równoległe przenoszenie wektorów

Dany jest wektor na powierzchni zaczepiony w punkcie P . Wektor znajdujący się bardzo blisko wektora zaczepionego w punkcie P i równoległy do niego na powierzchni, można uzyskać w sposób: Rozważa się wektor zaczepiony w

punkcie P w przestrzeni. Stwarza się wektor zaczepiony w punkcie Q , który jest do niego równoległy w przestrzeni. Wektor ten leży na płaszczyźnie stycznej do powierzchni w punkcie Q . Wektor w punkcie Q jest równoległy do wektora w punkcie P .

Sposób analityczny:

y_1, y_2, y_3 - współrzędne kartezjańskie punktu w przestrzeni euklidesowej

x_1, x_2 - współrzędne powierzchni

Równania parametryczne powierzchni:

$$y_n = y_n(x_1, x_2), (n = 1, 2, 3) \quad (7.19)$$

$$ds_2 = g_{11}dx_1^2 + 2g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 \quad (7.20)$$

$$g_{ik} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial y_n}{\partial x_k} \quad (7.21)$$

A_1, A_2 - składowe kowariantne wektora w punkcie $P(x_1, x_2)$ na powierzchni
 A^1, A^2 - składowe kontrawariantne wektora w punkcie $P(x_1, x_2)$ na powierzchni

Y_n - wektor w przestrzeni o składowych kartezjańskich

$$Y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_1} A^1 + \frac{\partial y_n}{\partial x_2} A^2, (n = 1, 2, 3) \quad (7.22)$$

$$A_l = \sum_{n=1}^3 Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_l}, (l = 1, 2; n = 1, 2, 3) \quad (7.23)$$

Przy przesunięciu wektora do punktu $Q(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$ nie zmienia się składowych kartezjańskich Y_n . Otrzymuje się wektor, który nie jest już styczny do powierzchni. Wektor, który powstaje na skutek przesunięcia równoległego wektora A_l do punktu Q ma postać:

$$A_l + \delta A_l = \sum_{n=1}^3 Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k \right) \quad (7.24)$$

$$\delta A_l = \sum_{n=1}^3 Y_n \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} \delta x_k \quad (7.25)$$

Podstawiając do równań (7.24) i (7.25) równania (7.22) i (7.23) oraz zakładając:

$$\sum_{n=1}^3 \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l} \frac{g_{il}}{x_k} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_i} = \Gamma_{i,kl} \quad (7.26)$$

Otrzymuje się przyrost dowolnego wektora przy przesunięciu równoległym w postaci:

$$\delta A_l = \sum_{n,k=1}^2 \Gamma_{i,kl} A^i \delta x_k \quad (7.27)$$

Przyrost zależy tylko od wewnętrznych właściwości powierzchni, które są wyznaczone przez wyrażenie ds^2 (7.20). Teorię równoległego przesunięcia wektorów w N -wymiarowej przestrzeni rozwinął Levi-Civita.

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \quad (7.28)$$

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^N e_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial y_n}{\partial x_\beta} \quad (7.29)$$

$$e_n = \pm 1 \quad (7.30)$$

Gdy sygnatura formy kwadratowej (7.28) jest następująca (+ - - -), musi być co najmniej jedno dodatnie e_n i co najmniej trzy ujemne.

y_n - współrzędne kartezjańskie w wielowymiarowej pseudo-euklidesowej przestrzeni

$$y_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \quad (7.31)$$

Czasoprzestrzeń jest pewną hiperpowierzchnią w wielowymiarowej przestrzeni.

Y_n - wektor styczny do hiperpowierzchni o składowych kartezjańskich

$$y_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} A^\alpha, (\alpha = 0, 1, 2, 3) \quad (7.32)$$

Używając równania (7.29), otrzymano:

$$A_\alpha = \sum_{n=1}^N e_n Y_n \frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} \quad (7.33)$$

Wartość wektora, który powstaje na skutek przesunięcia równoległego wektora A_α do blisko położonego punktu Q ma postać:

$$A_\alpha + \delta A_\alpha = \sum_{n=1}^N e_n Y_n \left(\frac{\partial y_n}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta x_\beta \right) \quad (7.34)$$

Przyrost wartości wektora przy przesunięciu równoległym:

$$\delta A_\alpha = \sum_{n=1}^N e_n Y_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \delta x_\beta \quad (7.35)$$

$$\delta A_\alpha = \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} A^\gamma \delta x_\beta \quad (7.36)$$

Wyrażenia (7.35) i (7.36) można przedstawić za pomocą współrzędnych kowariantnych:

$$A^\gamma = g^{\nu\gamma} A_\nu \quad (7.37)$$

$$g^{\gamma\nu} \Gamma_{\gamma,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \quad (7.38)$$

$$\delta A_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\nu A_\nu \delta x_\beta \quad (7.39)$$

oraz współrzędnych kontrawariantnych:

$$\delta A^\nu = -\Gamma_{\alpha\beta}^\nu A^\alpha \delta x_\beta \quad (7.40)$$

Iloczyn skalarnych dwóch wektorów przy przesunięciu równoległym pozostaje bez zmian:

$$\delta(A^\nu B_\nu) = B_\nu \delta A^\nu + A^\alpha \delta B_\alpha = 0 \quad (7.41)$$

7.4 Różniczkowanie kowariantne

Pochodna kowariantna - tensor powstały w wyniku różniczkowania innego tensora. Pochodną kowariantną oznacza się w sposób:

$$\nabla_\mu A_\nu \equiv A_{\nu;\mu} \equiv \nabla_{\mu,k} A_\nu^j \equiv A_{\nu;\mu,k}^j \quad (7.42)$$

W przypadku, gdy tensor metryczny $g_{\mu\nu}$ jest stały, pochodna kowariantna pokrywa się z pochodną cząstkową.

$$g_{\mu\nu} = \text{const} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} \equiv \nabla_\mu \quad (7.43)$$

W przypadku, gdy tensor metryczny nie jest stały, obliczenie pochodnej cząstkowej tensora prowadzi do obiektu, który nie jest tensorem.

Wyprowadzenie różniczkowania kowariantnego (wykorzystujące równoległe przenoszenie wektorów): Rozważane jest pole wektorowe A_ν i zmiana wektora A_ν z punktu $P(x_\beta)$ do punktu $Q(x_\beta + \delta x_\beta)$, gdzie $g_{\mu\nu}(x)$. Zmiana wektora A_ν przy nieskończenie małym przesunięciu wektora A_ν z punktu $P(x_\beta)$ do punktu $Q(x_\beta + \delta x_\beta)$:

$$(A_\nu)_Q - (A_\nu)_P = \delta_1 A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} \delta x_\beta \quad (7.44)$$

Natomiast w wyniku przejścia równoległego z punktu P do Q'' , otrzymano:

$$(A_\nu)_{Q''} - (A_\nu)_P = \delta_2 A_\nu = \Gamma_{\mu\beta}^\mu A_\nu \delta x_\beta \quad (7.45)$$

Odejmując stronami równania, otrzymano różnicę pomiędzy zmianą wektora przy przesunięciu po krzywej a zmianą wektora przy przesunięciu równoległym - δA_ν .

$$(A_\nu)_Q - (A_\nu)_{Q''} = \delta A_\nu = \delta_1 A_\nu - \delta_2 A_\nu \quad (7.46)$$

$$\delta A_\nu = \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^\mu A_\mu \right) \delta x_\beta \quad (7.47)$$

Otrzymano pochodną kowariantną wektora kowariantnego:

$$\nabla_\beta A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\beta} - \Gamma_{\nu\beta}^\mu A_\mu \quad (7.48)$$

Analogicznie pochodna wektora kontrawariantnego ($\delta_2 A^\nu = -\Gamma_{\nu\beta}^\mu A_\nu \delta x_\beta$)

$$\nabla_\beta A^\nu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\beta} + \Gamma_{\nu\beta}^\mu A^\mu \quad (7.49)$$

Pochodna tensora drugiego rzędu:

$$\nabla_\beta T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \Gamma_{\mu\beta}^\rho T_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu\beta}^\rho T_{\mu\rho} \quad (7.50)$$

Stwierdzenie. Pochodna kowariantna tensora metrycznego jest równa zero.

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0. \quad (7.51)$$

7.5 Transformacja Nawiasów Christoffela

Pochodna kowariantna albo tensorowa różni się od zwykłej pochodnej dodatkiem w postaci symboli Christoffela:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_\mu} \right) \quad (7.52)$$

Pokażemy że w otoczeniu każdego punktu istnieje taki układ współrzędnych, że wszystkie składowe Γ są zerowe. Więc pochodne od wszystkich składowych tensora $g_{\mu\nu}$ się wyzerują (patrz (7.51)).

Aby pokazać jak transformują się symbole Christoffela przy przejściu z jednego układu odniesienia do drugiego zaczniemy od:

$$\varphi_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \quad (7.53)$$

Zastosujmy dowód z [?] Funkcja $\varphi_{\mu\nu}$ reprezentuje tensor, dlatego podlega ona tożsamości:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} - (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma)' \frac{\partial \varphi}{\partial x'_\sigma} \right) \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \quad (7.54)$$

$(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma)'$ reprezentują symbole Christoffela w układzie primowanym. Podstawiając $\varphi = x'_\sigma$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} = - (\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma)' \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} \quad (7.55)$$

Fragment odpowiadający za drugą pochodną dowodzi, że $\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma$ nie jest tensorem. Jeżeli transformacja jest liniowa to wspomniany wcześniej symbol znika a $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ zachowuje się jak tensor. Oznaczmy $\Gamma_{\alpha\beta}^\rho$ dla konkretnego punktu przez $(\Gamma_{\alpha\beta}^\rho)_0$. Symbol $(\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma)'$ zniknie gdy transformacja współrzędnych spełni taki związek:

$$\left(\frac{\partial^2 x'_\sigma}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right)_0 - (\Gamma_{\mu\nu}^\rho)_0 \left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} \right)_0 \quad (7.56)$$

Związek ten jest spełniony gdy:

$$x'_\sigma = x_\sigma - x_\sigma^0 + \frac{1}{2} (\Gamma_{\mu\nu}^\sigma)_0 (x_\mu - x_\mu^0) (x_\nu - x_\nu^0) \quad (7.57)$$

$$\left(\frac{\partial x'_\sigma}{\partial x_\rho} \right)_0 = \delta_\rho^\sigma \quad (7.58)$$

Dzięki temu składowe tensora w danym punkcie będą takie same w układzie primowanym i nie primowanym. Pochodne takiego tensora zerują się:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (7.59)$$

Układ współrzędnych w którym, pochodna w danym punkcie znika zwany jest układem lokalnie geodezyjnym. Rozważmy układ w którym symbole Christoffela znikają nie tylko w danym punkcie ale na całym obszarze. Aby istniał taki obszar musi być spełnione to równanie:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} = 0 \quad (7.60)$$

Gdzie funkcja φ :

$$\varphi = x'_0, x'_1, x'_2, x'_3 \quad (7.61)$$

Aby wszystkie równania (7.60) były zgodne, ta sama trzecia pochodna musi mieć zgodne rozwiązania, dlatego:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\Gamma_{\mu\alpha}^\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} \right)\end{aligned}\quad (7.62)$$

Lewa strony równań są sobie równe, dlatego prawe też są sobie równe. Przystawiamy prawe strony do siebie i otrzymujemy:

$$\left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\rho}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho} = 0 \quad (7.63)$$

Te równania muszą być poprawne dla (7.61) gdyż wyznacznik nie jest równy zero:

$$D = \frac{D(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)}{D(x_0, x_1, x_2, x_3)} \neq 0 \quad (7.64)$$

Sugeruje to, że wszystkie współczynniki przy $\frac{\partial \varphi}{\partial x_\rho}$ w równaniu (7.63) muszą zniknąć. Współczynniki te są postaci:

$$R_{\mu\nu,\alpha}^\rho = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\rho}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^\rho}{\partial x_\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\alpha}^\rho - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\rho \quad (7.65)$$

Dlatego można twierdzić, że iff $R_{\mu\nu,\alpha}^\rho = 0$ gdy równanie (7.60) ma rozwiązania a forma $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$ jest postaci:

$$ds^2 = (dx'_0)^2 - (dx'_1)^2 - (dx'_2)^2 - (dx'_3)^2 \quad (7.66)$$

Gdzie x'_α to rozwiązanie równania (7.60) takie, że:

$$\begin{aligned}g^{\nu\mu} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_\mu} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\nu} &= e_\alpha \delta_{\alpha\beta} \\ g_{\alpha\beta} &= \sum_0^3 e_\mu \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\beta}\end{aligned}\quad (7.67)$$

Tensory krzywizny Riemanna

8.1 Tensor Krzywizny

8.1.1 Wprowadzenie

Def: Tensor krzywizny Riemann:

$$R_{\mu,\nu\alpha}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\alpha}^{\rho}}{\partial x_{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}$$

Patrz wzór (7.65).

Za pomocą tensora krzywizny można znaleźć wyrażenie opisujące zmianę wektora przy infinityzmalnym przesunięciu równoległym po zamkniętym konturze. Weźmy wektor A_{ρ} . W punkcie początkowym ma on wartość $(A_{\rho})_0$.

$$A_{\rho} = (A_{\rho})_0 + (\Gamma_{\alpha\rho}^{\sigma})_0 (A_{\sigma})_0 (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) \quad (8.1)$$

$$\delta A_{\mu} = \int \Gamma_{\mu\nu}^{\rho} A_{\rho} dx_{\nu} \quad (8.2)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = (\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_0 + \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x_{\alpha}} \right)_0 (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) \quad (8.3)$$

Podstawiając (8.1) i (8.3) do (8.2) oraz wykorzystując fakt, iż całka konturowa po zamkniętym konturze z różniczki zupełnej znika, otrzymujemy:

$$\delta A_{\mu} = \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\rho}}{\partial x_{\alpha}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\alpha}^{\rho} \right) (A_{\rho})_0 \int (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) dx_{\nu}$$

Oznaczmy

$$Q^{\nu\alpha} = \int (x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) dx_{\nu} = \frac{1}{2} \int [(x_{\alpha} - x_{\alpha}^0) dx_{\nu} - (x_{\nu} - x_{\nu}^0) dx_{\alpha}]$$

widać, że $Q^{\mu\alpha}$ jest projekcją powierzchni ograniczonej konturem na powierzchnię współrzędnych. Ostatecznie

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} R_{\mu,\nu\alpha}^\rho A_\rho Q^{\nu\alpha}.$$

Postępując podobnie, można pokazać, że dla współrzędnych kontrawariantnych wektora zachodzi relacja

$$\delta A^\sigma = \frac{1}{2} R_{\mu,\nu\alpha}^\sigma A^\rho Q^{\nu\alpha}.$$

Można pokazać, że

$$(\nabla_\alpha \nabla_\beta - \nabla_\beta \nabla_\alpha) A_\mu = R_{\mu,\alpha,\beta}^\nu A_\nu.$$

8.1.2 Kilka własności

1. Antysymetryczność względem dwóch pierwszych indeksów
 $R_{\nu\mu,\alpha\beta} = -R_{\mu\nu,\alpha\beta}$
2. Antysymetryczność względem dwóch ostatnich indeksów
 $R_{\mu\nu,\alpha\beta} = -R_{\mu\nu,\beta\alpha}$
3. Symetria cykliczna
 $R_{\mu\nu,\alpha\beta} + R_{\mu\alpha,\beta\mu} + R_{\mu\beta,\nu\alpha} = 0$

8.1.3 Inne tensory krzywizny. Kontrakcje.

1. Tensor Ricci-(Riemanna)
Kontrakcja tensora Riemanna po dwóch indeksach daje

$$R_{\mu,\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha,\beta\nu} = R_{\mu,\beta\nu}^\beta$$

Krzywizna skalarna.

$$R = R_\nu^\nu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

2. Tensor Konserwatywny (Einsteina)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R,$$

można sprawdzić że dywergencja czterewymiarowa

$$\nabla_\nu G_{\mu\nu} = 0. \tag{8.4}$$

Teoria grawiacji I

9.1 Podstawy Teorii Grawitacji Newtona

9.1.1 Prawo Galileusza.

Masa grawitacyjna

m_g , masa inercjalna m_i .

Prawo Galileusza:

$$m_g = m_i$$

$$U = \gamma \frac{M}{R}, \quad \gamma = \frac{1}{150000000} \cdot \frac{\text{sm}^3}{\text{gs}^2}$$

$$U \sim v^2, U \ll c^2$$

$$\Delta U = -4\pi\gamma\rho, \tag{9.1}$$

$$U \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

II prawo Newtona

$$m_i \mathbf{w} = \mathbf{F} = m_g \nabla U.$$

9.1.2 Interpretacja geometryczna

Prawo Galileusza \rightarrow

$$\mathbf{w} = \nabla U.$$

można potraktować jako równanie Eulera dla zasady wariacyjnej

$$\delta \int \left(\frac{1}{2} v^2 + U \right) dt = 0.$$

Porównujemy z

$$\delta \int ds = 0.$$

gdzie

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2} dt \approx \left(c - \frac{v^2}{2c} \right) dt.$$

Założmy

$$ds = \sqrt{c^2 - 2U - v^2} dt \approx \left[c - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2}v^2 + U \right) \right] dt \implies - \text{małe pola}$$

Stała (c) nie zmienia równania Eulera, więc ono będzie takie samo jak dla

$$\delta \int \left(\frac{1}{2}v^2 + U \right) dt = 0,$$

ale brak U dla dowolnych v musi dawać

$$ds = \sqrt{c^2 - v^2} dt,$$

więc

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - dr^2.$$

Dokładniejsza teoria;

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) dr^2.$$

9.2 Uwagi o pomiarach spektralnych

Z poprzedniego rozdziału

$$g_{00} \approx c^2 - 2U,$$

Niech w punkcie \mathbf{r} o potencjale $U(\mathbf{r})$ znajduje się nieruchome źródło fali elektromagnetycznej o częstotliwości $\frac{2\pi}{T}$, fala ma (przybliżono) zespolony współczynnik

$$\exp\left[i\frac{2\pi t}{T}\right].$$

W tym UO

$$d\tau = \frac{1}{c} ds = \left(1 - \frac{U}{c^2} \right) dt$$

$$T_0 = \left(1 - \frac{U}{c^2} \right) T$$

$$\frac{U_1 - U_2}{c^2} = 2 \cdot 10^{-6}$$

Pomiary dla satelita Siriusa (potencjał na powierzchni 20 razy większy od słońca.)

Teoria grawitacji II

”There is nothing in the world except empty curved space. Matter, charge, electromagnetism and other fields are only manifestations of the curvature of space.” John Archibald Wheeler 1957!

10.1 Równanie Grawitacji Einsteina

Potencjał U spełnia $\Delta U = -4\pi\gamma\rho$,
podobną rolę odgrywa tensor $\sim g_{\mu\nu}$, który określa $R_{\mu\nu}$
(ale ma więcej składowych). Było ustalone, że

$$\nabla_{\nu}T^{\mu\nu} = 0. \quad (10.1)$$

Mieliśmy

$$\nabla_{\nu}G_{\mu\nu} = 0, \quad (10.2)$$

więc tensory powinny być proporcjonalny

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu}. \quad (10.3)$$

Równanie grawitacji Einsteina* [12]: r. 1915* . W tym samym roku równanie grawitacji opublikował Hilbert [13].

10.2 Porównanie z teorią Newtona. Warunki brzegowe

Równanie EG jest równaniem różniczkowym względem składowych tensora metrycznego $g_{\mu\nu}$. Więc jednosnaczne rozwiązanie potrzebuje warunków brzegowych. Potencjał Newtona zanika na nieskończoności, ale nie jest relatywistycznym. Zgodnie z tym i odpowiednim związkiem pomiędzy potencjałem a $g_{\mu\nu}$ możemy wybrać warunki na tensor metryczny w ∞ .

$$\begin{aligned}(g_{00})_{\infty} &= c^2, \\ (g_{0i})_{\infty} &= 0, \\ (g_{ik})_{\infty} &= -\delta_{ik}.\end{aligned}\tag{10.4}$$

$$\begin{aligned}(g^{00})_{\infty} &= \frac{1}{c^2}, \\ (g^{0i})_{\infty} &= 0, \\ (g^{ik})_{\infty} &= -\delta_{ik}.\end{aligned}\tag{10.5}$$

Tego jednak nie wystarczy. Konieczne zadanie asymptotyki

$$g_{\mu\nu} - (g_{\mu\nu})_{\infty}.\tag{10.6}$$

Poza rozkładem masy

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= 0, \\ \Gamma^{\nu} &= g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu} = 0.\end{aligned}\tag{10.7}$$

Wtedy możemy zapisać że

$$R_{\mu\nu} = \frac{-1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} + \Gamma^{\mu, \alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}.\tag{10.8}$$

Przybliżone asymptotyka $g^{\alpha\beta} \sim \frac{1}{r}$

$$R^{\mu\nu} \cong \frac{1}{2} \Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2}\tag{10.9}$$

Zachowanie $g^{\alpha\beta}$ na nieskończoności będzie determinowane przez zachowanie Ψ

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}, \bar{n}\right) \\ \bar{n} &= \frac{\bar{r}}{r}.\end{aligned}\tag{10.10}$$

Forma asymptotyczna rozwiązania propagującego się i znikającego na nieskończoności:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial r \Psi}{\partial r} + \frac{1}{c} \frac{\partial r \Psi}{\partial t} \right) = 0 \forall t. \quad (10.11)$$

Warunek razem z zanikiem $g_{\mu\nu}$ z pochodnymi dla jednoznaczne rozwiązanie równania falowego, więc - równania grawitacji.

10.3 Rozwiązanie równań Einsteina w pierwszym przybliżeniu. Wyznaczenie stałej

Korzystając z postaci tensora T dla ciała sprężystego:

$$\begin{aligned} c^2 T^{00} &= \rho + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \Pi \right) \\ c^2 T^{0i} &= \rho v_i + \frac{1}{c^2} \left(v_i \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \Pi \right) - \sum_{k=1}^3 P_{ik} v_k \right) \\ c^2 T^{ik} &= \rho v_i v_k - P_{ik} \\ c^2 T^{00} &= 0 \\ c^2 T^{0i} &= -\rho v_i \end{aligned} \quad (10.12)$$

Stosujemy przybliżenie

$$T = \rho \quad (10.13)$$

Korzystając z powyższych wyrażeń i (10.9) jesteśmy w stanie zapisać prawą stronę równania

$$R^{\mu\nu} = -\kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) \quad (10.14)$$

Korzystając z Galileuszowskich wartości g:

$$\begin{aligned} T^{00} - \frac{1}{2} g^{00} T &= \frac{1}{2c^2} \rho, \\ T^{0i} - \frac{1}{2} g^{0i} T &= \frac{1}{2} \rho v_i, \\ T^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} T &= \frac{1}{2} \rho \delta_{ik}. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Zakładając harmoniczną współrzędnych mamy w przybliżeniu:

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \Delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial t^2} \quad (10.16)$$

Zerując drugą pochodną po czasie (rozwiązanie statyczne):

$$\begin{aligned}
 g_{tt}^{\mu\nu} &= 0 \\
 \Delta g^{00} &= -\frac{\kappa}{c^2} \rho \\
 \Delta g^{0i} &= -\frac{2\kappa}{c^2} \rho v_i \\
 \Delta g^{ik} &= -\kappa \rho \delta_{ik}
 \end{aligned}
 \tag{10.17}$$

Ponieważ

$$g_{00}g^{00} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 g_{0i}g^{i0}}_{\text{maczyn}} = 1
 \tag{10.18}$$

To równanie przyjmuje postać

$$g^{00} = \frac{1}{c^2} + \frac{2U}{c^4}
 \tag{10.19}$$

Korzystając z równania na potencjał Newtonowski znajdujemy:

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= -4\pi\gamma\rho \\
 \Delta g^{00} &= -\frac{8\pi\gamma}{c^4}\rho
 \end{aligned}
 \tag{10.20}$$

Dzięki temu wyznaczona zostaje wartość stałej

$$\kappa = \frac{8\pi\gamma}{c^2}
 \tag{10.21}$$

Potencjał U może być zapisany jako:

$$U = \gamma \int \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'
 \tag{10.22}$$

Wprowadzając funkcje spełniające warunki

$$\begin{aligned}
 U_i &= \gamma \int \frac{\rho v_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\
 \Delta U_i &= 4\pi\gamma\rho v_i
 \end{aligned}
 \tag{10.23}$$

Wtedy składowe g można zapisać jako

$$\begin{aligned}
 g^{00} &= \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{2U}{c^2} \right) \\
 g^{0i} &= \frac{4}{c^2} U_i \\
 g^{ik} &= - \left(1 - \frac{U}{c^2} \right) \delta_{ik}
 \end{aligned}
 \tag{10.24}$$

Można stwierdzić że (q predkosc mniejsza niz c), W dalszej części U zamienia się na V

$$U \propto q^2, U_i \propto q^3$$

$$ds^2 = (c^2 - 2U) dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right) d\vec{r}^2 + \frac{8}{c^2} (U_1 dx_1 U_2 dx_2 U_3 dx_3) dt \quad (10.25)$$

Pozieważ

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial t} = 0 \quad (10.26)$$

Elementy g można zapisać jako

$$g_{0i} = 0$$

$$g_{00} = V^2$$

$$g_{ik} = -a_{ik} \quad (10.27)$$

Interwał czasoprzstrzenny przyjmuje postać

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dx_i dx_k$$

$$dl^2 = \sum_{i,k=1}^3 a_{ik} dx_i dx_k \quad (10.28)$$

$$\sum_i a_{im} a^{mk} = \delta_{ik}$$

$$ds^2 = V^2 dt^2 - dl^2$$

Można zapisać

$$g^{00} = \frac{1}{V^2} g^{01} = 0 g^{ik} = -a^{ik} \quad (10.29)$$

$$\sqrt{-g} = V \sqrt{a} \quad a = \text{Det} a_{ik}$$

Korzystając z symboli

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} &= \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \right) \\
(\Gamma_{\mu\nu}^{\rho})_g &\propto g_{\mu\nu} \\
(\Gamma_{ik}^n)_g &a_{ik} \\
(\Gamma_{ik}^h)_g &= (\Gamma_{ik}^h)_a \\
(\Gamma_{00}^i)_g &= VV^i \\
V^i &= a^{ik}V_k, \quad V_k = \frac{\partial V}{\partial x_k} \\
(\Gamma_{0i}^0)_g &= \frac{V_i}{V} \\
(\Gamma_{00}^0)_g &= 0 \\
(\Gamma_{ik}^0)_g &= 0 \\
(\Gamma_{i0}^k)_g &= 0
\end{aligned} \tag{10.30}$$

Wtedy wyrażenie na R przyjmuje postać

$$R_{\sigma,\mu\nu}^{\rho} = \frac{\partial \Gamma_{\sigma\mu}^{\rho}}{\partial x_{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\sigma\nu}^{\rho}}{\partial x_{\mu}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho} \tag{10.31}$$

Składowe R są dane przez

$$\begin{aligned}
(R_{i,hk}^l)_g &= (R_{i,hk}^l)_a \\
(R_{i,hk}^0)_g &= 0 \\
(R_{i,0k}^l)_g &= 0 \\
(R_{0,hk}^l)_g &= 0 \\
(R_{0,hk}^0)_g &= 0 \\
(R_{0,0k}^l)_g &= \frac{\partial}{\partial x_k} (VV^i) + VV^i (\Gamma_{ik}^l)_a - V_k V^i = V \left(\frac{\partial V^l}{\partial x_k} (\Gamma_{ik}^l)_a V^i \right) \\
(V^l)_k &= \frac{\partial V^l}{\partial x_k} + (\Gamma_{ik}^l)_a V^i \\
V_{ik} &= \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} - (\Gamma_{ik}^j)_a \frac{\partial V}{\partial x_j} = V_{ki} \\
(R_{0,0k}^i)_g &= VV_k^i \\
(R_{i,0k}^0)_g &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{V_i}{V} \right) + \frac{V_i V_k}{V^2} - (\Gamma_{ik}^j)_a \frac{V_j}{V} \\
(R_{i,0k}^0)_g &= \frac{V_{ik}}{V} \\
R_{\mu\nu} &= R_{\mu,\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\mu,0\nu}^0 + R_{\mu,lk}^l \\
(R_{ik})_g &= (R_{ik})_a + \frac{V_{ik}}{V}
\end{aligned} \tag{10.32}$$

Co ostatecznie prowadzi do wyniku (w pierwszym przybliżeniu)

$$ds^2 = (c^2 - 2V) \quad (10.33)$$

10.4 Pole grawitacyjne izolowanej cząstki punktowej

$$\begin{aligned} ds^2 &= V^2 dt^2 - dl^2 \\ dl^2 &= a_{ik} dx_i dx_k \end{aligned} \quad (10.34)$$

Wprowadzając współrzędne sferyczne:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \varphi \\ x_2 &= r \sin \theta \sin \varphi \\ x_3 &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (10.35)$$

Założenie symetrii sferycznej powoduje, że dl^2 przyjmuje następującą postać:

$$dl^2 = F^2 dr^2 + \varrho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10.36)$$

gdzie F i ϱ są funkcjami zależnymi tylko od r (współczynnik V również musi zależeć tylko od r).

Jeśli ds^2 przyjmuje powyższą postać zastosowanie operatora d'Alamberta do funkcji Ψ ma postać:

$$\square \Psi = \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{\varrho^2} \left[\frac{1}{VF} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V\varrho^2}{F} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \Delta^* \Psi \right] \quad (10.37)$$

gdzie Δ^* to operator Laplace'a na sferze

$$\Delta^* \Psi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \quad (10.38)$$

Ewidentnie czas t jest zmienną harmoniczną, dla $\square t = 0$.

Aby współrzędne x_1, x_2, x_3 również były harmoniczne konieczne jest aby $\square x_i = 0$.

Jeżeli x_i jest jedną z wielkości (10.35) to:

$$\Delta^* x_i = -2x_i \quad (10.39)$$

i warunek na harmoniczną x_i przyjmuje postać:

$$\frac{1}{VF} \frac{d}{dr} \left(\frac{V\varrho^2}{F} \right) - 2r = 0 \quad (10.40)$$

Jest to uzupełniające równanie które musi być spełnione przez V, F i ϱ oprócz równania Einsteina.

Należy sformułować symbole Christoffela dla różniczkowej formy równania (10.36). Wstawia się:

$$\begin{aligned} a_{rr} &= F^2 & a_{\theta\theta} &= \varrho^2 & a_{\varphi\varphi} &= \varrho^2 \sin^2 \theta \\ a_{\theta\varphi} &= 0 & a_{\varphi r} &= 0 & a_{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

oraz elementy kontrawariantnego trójwymiarowego tensora metrycznego:

$$\begin{aligned} a^{rr} &= \frac{1}{F^2} & a^{\theta\theta} &= \frac{1}{\varrho^2} & a^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\varrho^2 \sin^2 \theta} \\ a^{\theta\varphi} &= 0 & a^{\varphi r} &= 0 & a^{r\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Otrzymujemy 18 symboli Christoffela:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{F'}{F} \quad \Gamma_{rr}^\theta = 0 \quad \Gamma_{rr}^\varphi = 0 \quad (10.41)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{\varrho\varrho'}{F^2} \quad \Gamma_{\theta\theta}^\theta = 0 \quad \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = 0 \quad (10.42)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{\varrho\varrho'}{F^2} \sin^2 \theta \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\varphi = 0 \quad (10.43)$$

$$\Gamma_{r\theta}^r = 0 \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{\varrho'}{\varrho} \quad \Gamma_{r\theta}^\varphi = 0 \quad (10.44)$$

$$\Gamma_{r\varphi}^r = 0 \quad \Gamma_{r\varphi}^\theta = 0 \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{\varrho'}{\varrho} \quad (10.45)$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^r = 0 \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\theta = 0 \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \text{ctg } \theta \quad (10.46)$$

Elementy z primem oznaczają różniczkowanie po r .

Należy zwrócić uwagę, że każdy rząd w powyższej tabeli zawiera ujemne współczynniki przy pierwszych pochodnych $\frac{\partial V}{\partial r}$, $\frac{\partial V}{\partial \theta}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$.

$$V_{rr} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - \frac{F'}{F} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (10.47)$$

$$V_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\varrho\varrho'}{F^2} \frac{\partial V}{\partial r} \quad (10.48)$$

$$V_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\varrho\varrho'}{F^2} \sin^2 \theta \frac{\partial V}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (10.49)$$

$$V_{r\theta} = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \theta} - \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \theta} \quad (10.50)$$

$$V_{r\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\varrho'}{\varrho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (10.51)$$

$$V_{\theta\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} - \text{ctg } \theta \frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad (10.52)$$

Z drugiej strony każda kolumna z tabelki powyżej daje współczynniki stojące przy kwadracie lub iloczynie różnych pochodnych w równaniach na przestrzenną linię geodezyjną, która przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \ddot{r} + \frac{F'}{F} \dot{r}^2 - \frac{\varrho \varrho'}{F^2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) &= 0 \\ \ddot{\theta} + 2 \frac{\varrho'}{\varrho} \dot{\theta} \dot{r} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\varrho'}{\varrho} \dot{\varphi} \dot{r} + 2 \operatorname{ctg} \theta \dot{\varphi} \dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Kropka oznacza różniczkowanie względem długości łuku ($\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ itd.)
Jeśli znika tensor masy równanie grawitacyjne upraszcza się do postaci

$$(R_{\mu\nu})_g = 0 \quad (10.53)$$

ponieważ: $(R_{r\theta})_a = 0$, $(R_{r\varphi})_a = 0$, $(R_{\theta\varphi})_a = 0$ Równanie przestrzenne w przypadku statycznym redukuje się do:

$$V(R_{ik})_a + V_{ik} = 0 \quad (10.54)$$

natomiast czasowe do:

$$\Delta V = 0 \quad (10.55)$$

znajdując wyrażenie na $(R_{rr})_a$ i V_{rr} oraz wstawiając je do $V(R_{rr})_a + V_{rr} = 0$ otrzymujemy:

$$\frac{2VF}{\varrho} \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho'}{F} \right) + V'' - \frac{F'}{F} V' = 0 \quad (10.56)$$

oraz do $V(R_{\theta\theta})_a + V_{\theta\theta} = 0$ otrzymujemy:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho \varrho' V}{F} \right) - VF = 0 \quad (10.57)$$

Zatem ostatecznie $\Delta V = 0$ może być zapisane jako:

$$V'' - \frac{F'}{F} V' + \frac{2\varrho'}{\varrho} V' = 0 \quad (10.58)$$

Powyższe trzy równania są łatwe do rozwiązania. Na podstawie (10.56) i (10.58) mamy:

$$V \frac{d}{dr} \left(\frac{\varrho'}{F} \right) - \frac{\varrho'}{F} V' = 0 \quad (10.59)$$

gdzie $\frac{\varrho'}{VF} = \text{const}$

Wartość powyższej stałej jest zdeterminowana przez warunki brzegowe. W nieskończoności musi zachodzić:

$$\varrho' = 1 \quad F = 1 \quad V = c \quad (r \rightarrow \infty) \quad (10.60)$$

zatem $VF = c\varrho'$ co po wstawieniu do (10.57) i scałkowaniu daje:

$$\frac{\varrho \varrho' V}{F} - c\varrho = \text{const} \quad (10.61)$$

Wartość tej stałej może być określona przez porównanie z teorią Newtona. Jeżeli M to wartość masy punktowej musimy mieć dla dużych odległości ($r \rightarrow \infty$):

$$V^2 = c^2 - 2U \qquad U = \frac{\gamma M}{r} \qquad (10.62)$$

gdzie

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\varrho}{r} = 1$$

zatem $\varrho(c^2 - V^2) = 2\gamma M$ czyli:

$$V^2 = c^2 - \frac{2\gamma M}{\varrho} \qquad (10.63)$$

Do tej pory rozważano tylko równanie (10.57) i kombinację (10.56) oraz (10.58).

Należy teraz zweryfikować czy te dwa ostatnie mogą zostać spełnione oddzielnie. Zapisując (10.58) w postaci:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{V' \varrho^2}{F} \right) = 0$$

i z drugiej strony różniczkując (10.63) otrzymujemy: $VV' = \frac{\gamma M}{\varrho^2} \varrho'$ co w zestawieniu z $VF = c\varrho'$ daje $\frac{V' \varrho^2}{F} = \frac{\gamma M}{c} = const$, a zatem (10.58) jest spełnione. Wynika z tego, że tylko dwa spośród (10.56), (10.58), (10.57) są niezależne. Na mocy $VF = c\varrho'$ mamy:

$$F dr = \frac{c}{V} d\varrho$$

Wstawienie wartości uzyskanych dla F i V do wyrażenia ds^2 daje:

$$ds^2 = V^2 dt^2 - \frac{c^2}{V^2} d\varrho^2 - \varrho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \qquad (10.64)$$

Jeśli korzystamy tylko z równań grawitacyjnych, ale bez warunku na harmoniczność współrzędnych, wielkość ϱ pozostaje dowolną funkcją r w taki sposób, że r jest również dowolną funkcją ϱ . Dla $\frac{1}{VF} \frac{d}{dr} \left(\frac{V \varrho^2}{F} \right) - 2r = 0$ stosując $VF = c\varrho'$ otrzymujemy:

$$\frac{d}{d\varrho} \left(\frac{V^2 \varrho^2}{c^2} \frac{dr}{d\varrho} \right) - 2r = 0 \qquad (10.65)$$

wstawiając (10.63) powyższy wzór przekształca się do:

$$\frac{d}{d\varrho} \left[(\varrho^2 - 2\alpha\varrho) \frac{dr}{d\varrho} \right] - 2r = 0 \qquad (10.66)$$

gdzie $\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}$ i $\varrho \geq 2\alpha$, $V^2 \geq 0$
wstawiając ϱ jako $\varrho = \alpha(1+z)$ powyższe równanie przyjmuje postać równania Legendre'a:

$$\frac{d}{dz} \left[(z^2 - 1) \frac{dr}{dz} \right] - 2r = 0 \quad (10.67)$$

dla obszaru $z \geq 1$ rozwiązaniem ogólnym równania Legendre'a jest:

$$r = CP_1(z) + C'Q_1(z)$$

gdzie $P_1(z) = z$, $Q_1(z) = \frac{z}{2} \ln \left(\frac{z+1}{z-1} \right) - 1$ Są to funkcje Legendre'a odpowiednio pierwszego i drugiego rodzaju. Dla $z = 1$ funkcja Q_1 zmierza do nieskończoności, a zatem człon przy Q_1 pozostawiając tylko elementy proporcjonalne do z . Porównując wartości ϱ i r dla dużych z łatwo wynioskować z warunków (10.60) i (10.62), że:

$$r = \alpha z$$

a zatem $\varrho = r + \alpha$.

Wstawiając wartość ϱ do wyrażenia na ds^2 otrzymujemy:

$$ds^2 = C^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) dt^2 - \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha} \right) dr^2 - (r + \alpha)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10.68)$$

gdzie na podstawie $\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}$ wiadomo, że stała α jest proporcjonalna do wielkości masy punktowej M .

Równanie w postaci (10.64) dla ds^2 we względnych współrzędnych nieharmonicznych było pierwszy raz wyprowadzone przez Schwarzschilda i często nazywane jest od jego imienia.

10.5 Ruch peryhelium planet

Pewne szczególne rozwiązanie równań grawitacyjnych może być zastosowane do opisu pola grawitacyjnego słońca oraz planet.

Weźmy

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) dt^2 - \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha} \right) dr^2 - (r + \alpha)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (10.69)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{\gamma M}{c^2}, \quad (10.70)$$

M - masa, γ - stała Newtona, c - prędkość światła.

Wielkość α nazwana jest grawitacyjnym promieniem masy M . Jest ona, dla obiektów z naszego układu planetarnego, znacznie mniejsza niż geometryczny promień L . Dla słońca wynosi około $\alpha = 1,48\text{km}$, natomiast dla Ziemi $\alpha = 0,443\text{cm}$.

Przekształcamy teraz równanie (10.69) ze współrzędnych sferycznych do układu prostokątnego. Przepiszmy przestrzenną część (10.69)

$$dl^2 = \left(\frac{r+\alpha}{r-\alpha} \right) dr^2 + (r+\alpha)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi) \quad (10.71)$$

w postaci

$$dl^2 = \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{r^2} dr^2 + \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi), \quad (10.72)$$

dzięki czemu łatwiej nam przejść do współrzędnych kartezjańskich.

Otrzymujemy

$$ds^2 = c^2 \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) - \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{r^4} (x_1 dx + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \quad (10.73)$$

wówczas

$$g_{ik} = - \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^2 \delta_{ik} - \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{r^4} x_i x_k, \quad (10.74)$$

co daje nam

$$g_{00} = c^2 \frac{r-\alpha}{r+\alpha}; \quad g_{0i} = 0. \quad (10.75)$$

Jeżeli w równaniu (10.73) zaniedbalibyśmy czynnik α^{22} i wyższe, dostalibyśmy wyrażenie na potencjał Newtonowski

$$U = c^2 \frac{\alpha}{r} = \frac{\gamma M}{r} \quad (10.76)$$

Używając (10.74) oraz (10.75) i transformując równanie

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial\psi}{\partial x_\mu} \frac{\partial\psi}{\partial x_\nu} = \frac{r+\alpha}{r-\alpha} \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} \right)^2 - \frac{r-\alpha}{r+\alpha} \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{(r+\alpha)^2} \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right)^2 \right] \quad (10.77)$$

do współrzędnych prostokątnych, otrzymamy wartości współrzędnych kowariantnego tensora metrycznego. Mnożąc te składowe przez $\sqrt{(-g)}$, gdzie g dane jest wyrażeniem $g = -c^2 \left(1 + \frac{\alpha}{r} \right)^4$, otrzymamy

$$g^{ik} = \sqrt{(-g)} \tilde{g}^{ik} = -c \delta_{ik} + c \alpha^2 \frac{x_i x_k}{r^4} \quad (10.78)$$

oraz

$$g^{00} = \frac{1}{c} \frac{(1+\alpha)^3}{1-\alpha}; \quad g^{0i} = 0. \quad (10.79)$$

Łatwo sprawdzić, że nasze współrzędne są harmoniczne oraz spełnione jest równanie

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (10.80)$$

Znając potencjał grawitacyjny dla pola masy skupionej, możemy opisać ruch ciała w tym polu, wiedząc, że będzie ono poruszało się po linii geodezyjnej.

Jak wiemy, równania (linii) geodezyjnej spełniają

$$\delta \int ds = 0, \quad (10.81)$$

co może być przedstawione w formie

$$\delta \int L dt = 0, \quad (10.82)$$

gdzie L jest lagranżjanem i w naszym przypadku jego kwadrat jest równy

$$L^2 = c^2 \frac{r - \alpha}{r + \alpha} - \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)^2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{r + \alpha}{r - \alpha} \cdot \frac{\alpha^2}{r^4} (x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3)^2 \quad (10.83)$$

Kropki oznaczają różniczkowanie po czasie.

Aby rozwiązać ten problem zauważmy, że Lagranżjan jest sferycznie symetryczny. To znaczy, iż układ wielkości (x_1, x_2, x_3) i $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ pozostaje stały (niezmienny) względem tej samej, ortogonalnej, liniowej transformacji. W konsekwencji czego, znaczy to, że istnieją całki ruchu

$$x_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} - x_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = c_1 \quad (10.84)$$

$$x_3 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} - x_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3} = c_2 \quad (10.85)$$

$$x_1 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} - x_2 \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = c_3 \quad (10.86)$$

A więc trajektorja ciała leży na płaszczyźnie

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0 \quad (10.87)$$

Możemy przyjąć $x_3 = 0$ i $\dot{x}_3 = 0$. Najlepiej posłużyć się teraz współrzędnymi biegunowymi. Poprzednio używane przez nas współrzędne sferyczne redukują się do biegunowych, gdy przyjmiemy $\theta = \pi$ oraz $\theta = 0$. Przepisując lagranżjan we współrzędnych biegunowych, dostajemy

$$L^2 = c^2 \frac{r - \alpha}{r + \alpha} - \frac{r + \alpha}{r - \alpha} \dot{r}^2 - (r + \alpha)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (10.88)$$

Lagranżjan jest zależny do czasu i kąta φ , co daje nam

$$\dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \text{const} \quad (10.89)$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}. \quad (10.90)$$

Pamiętając, że

$$L dt = ds = c d\tau, \quad (10.91)$$

τ - czas własny (ang. proper time)

możemy przepisać (10.89) i (10.90) w postaci

$$\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \varepsilon \quad (10.92)$$

$$(r + \alpha)^2 \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu \quad (10.93)$$

Wielkość μ może być interpretowana jako moment pędu masy jednostkowej. Jeżeli przyjmiemy

$$\varepsilon = 1 + \frac{E_0}{c^2}, \quad E_0 - \text{stała} \quad (10.94)$$

nasze równania pokażą, że w przybliżeniu nierelatywistycznym

$$E_0 = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\gamma M}{r}, \quad (10.95)$$

czyli E_0 jest całkowitą energią masy jednostkowej.

Podstawiając (10.92) i (10.93) do tożsamości

$$c^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - \left(\frac{r + \alpha}{r - \alpha} \right) \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - (r + \alpha)^2 \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = c^2 \quad (10.96)$$

otrzymamy:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = c^2 \varepsilon^2 - c^2 \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right) - \frac{\mu^2 (r - \alpha)}{(r + \alpha)^3} \quad (10.97)$$

Powyższe rozważania daj nam równania na wielkości r , t i φ w funkcji τ . Nie będziemy ich ściśle wyprowadzać, zastanówmy się na trajektorię ciała i jak zależy ona od r i φ . Eliminując $d\tau$ z (10.93) i (10.97) mamy

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} (r + \alpha)^4 - \frac{c^2}{\mu^2} (r + \alpha)^3 (r - \alpha) - (r + \alpha)(r - \alpha) \quad (10.98)$$

Jak widać φ będzie się wyrażało przez całkę eliptyczną pierwszego rodzaju, odpowiednio r będzie funkcją eliptyczną zmiennej φ . Rzeczywisty okres tych

funkcji eliptycznych będzie różny od 2π , przez co orbity nie będą zamknięte. Wielomian stojący po prawej stronie ma następujące pierwiastki:

$$\text{ujemny } r = -\alpha, \quad \text{dodatni } r_0 \sim \alpha + \frac{8\alpha^3 c^2 \varepsilon^2}{mu^2}, \quad (10.99)$$

gdzie $\alpha > 0$, oraz dwa pozostałe r_1 i r_2 .

Jeżeli $\varepsilon^2 < 1$, $r_1 \wedge r_2 > 0$ i $r_1 < r < r_2$, wtedy orbita jest skończona.

Jeżeli $\varepsilon^2 > 1$, jeden z pierwiastków, np $r_2 < 0$ i $r_1 < r$, wtedy orbita dąży do nieskończoności. Dla $\varepsilon^2 = 1$ wielkość $r_2 = \infty$.

Wprowadzimy zmienną $u = 1/r$, wtedy mamy

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = & \frac{c^2(\varepsilon^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2 - 1)u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{\mu^2} - 1\right)u^2 + \\ & + \frac{2\alpha^3 c^2(2\varepsilon^2 + 1)}{\mu^2}u^3 + \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2 c^2(\varepsilon^2 + 1)}{\mu^2}\right)u^4. \end{aligned} \quad (10.100)$$

We wcześniejszych rozważaniach wprowadzaliśmy prędkość charakterystyczną q oraz długość charakterystyczną l . Ze względu na rząd wielkości, mamy

$$\varepsilon^2 - 1 \sim \frac{q^2}{c^2}; \quad \mu^2 \sim l^2 q^2; \quad \alpha \sim \frac{q^2}{c^2} l^2; \quad u \sim \frac{1}{l} \quad (10.101)$$

Stosując takie przybliżenie, możemy łatwo zauważyć, że po prawej stronie (10.100) wyrazy zawierające u w zerowej, pierwszej i drugiej potęgę są rzędu l^2 , natomiast wyrazy z u w trzeciej i czwartej potęgę są rzędu $(q^4) \cdot l^2$. Jeżeli zaniedbamy jedynie bardzo małe wielkości, czyli rzędu q^4 (lub $\alpha^2 l^2$), możemy pominąć ostatnie dwa wyrazy w równaniu (10.100). Przybliżona forma ma postać:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2(\varepsilon^2 - 1)}{\mu^2} + \frac{2\alpha c^2}{\mu^2}(2\varepsilon^2 - 1)u + \left(\frac{6\alpha^2 c^2 \varepsilon^2}{mu^2} - 1\right)u^2 \quad (10.102)$$

Pierwiastki tego wielomianu kwadratowego będą odnosiły się do wspomnianych wyżej pierwiastków r_1 oraz r_2 . Są one równe

$$u_1 = \frac{1}{r_1} = \frac{1+e}{p}; \quad u_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{1-e}{p}, \quad (10.103)$$

gdzie p i e są nowymi stałymi związanymi z ε oraz μ .

W przybliżeniu mamy

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon^2 &= \frac{\alpha}{p}(1 - e^2) \\ \mu^2 &= \alpha c^2 p = \gamma M p \end{aligned} \quad (10.104)$$

Również zapiszmy

$$\nu^2 = 1 - \frac{6\alpha}{p}, \quad (10.105)$$

a więc w przybliżeniu

$$\nu = 1 - \frac{3\alpha}{p} \quad (10.106)$$

Używając takiego podstawienia możemy przepisać równanie (10.102) w postaci

$$\frac{1}{\nu^2} \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{p}u - u^2 \quad (10.107)$$

Rozwiązaniem tego równania jest

$$u = \frac{1 + e \cos \nu\varphi}{p}. \quad (10.108)$$

Tutaj stała całkowania została tak dobrana, aby dla największej wartości u lub najmniejszej odległości r kąt $\varphi = 0$. Wyrażenie (10.108) dobrze opisuje ogólną naturę ruchu. Jeżeli $\nu = 1$ dostalibyśmy elipsę, parabolę albo hiperbolę o mimośrodku e i parametrze p (ang. semi-latus rectum). Rozważmy przypadek elipsy, a więc $e < 1$. Wektor wodzący r powraca do swojego pierwotnego położenia, gdy kąt zwiększy się nie o 2π , lecz o wartość 2π . Różnica

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\nu} - 2\pi = \frac{6\pi\alpha}{p} \quad (10.109)$$

stanowi przesunięcie peryhelium planety po jednym okresie. Tak więc orbita planety może być opisana przez elipsę wykonującą precesję.

Można zauważyć, że równania ruchu Einsteina dla planety redukują się do klasycznych równań wahadła sferycznego (10.107). Trajektorja planety ma taki sam tor jak wahadło sferyczne.

Dla wszystkich planet wartości kąta φ bardzo niewielkie. Jeżeli dla Ziemi przyjmiemy $p = 1,5 \cdot 10^{-8}\text{km}$, $\alpha = 1,5\text{km}$, przesunięcie wyniesie

$$\Delta\varphi = 6\pi \cdot 10^{-8} = 3,8''100\text{lat}. \quad (10.110)$$

Dużo większe przesunięcie obserwuje się dla Merkurego

$$\Delta\varphi = 43''100\text{lat}. \quad (10.111)$$

Wynika to ze znacząco mniejszej odległości od słońca (0,39 orbity Ziemi) oraz krótszego okresu (420 okrążeń na sto lat).

10.6 Prędkość propagacji pola grawitacji

Wychodząc z równań Einsteina:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\kappa T^{\mu\nu} \quad (10.112)$$

Charakterystyki równania Einsteina. Chcemy otrzymać równania charakterystyk, które z fizycznego punktu widzenia reprezentują prawa propagacji czoła fali grawitacyjnej. Mnożąc równanie 10.113 przez $g_{\mu\nu}$ i wykonując sumowanie otrzymujemy relację:

$$R = \kappa T \quad (10.113)$$

Zapisujemy d'Alembercian jako

$$\square\Psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \frac{\partial\Psi}{\partial x^\alpha} \right) \quad (10.114)$$

Gdzie:

$$g = \det g_{\alpha\beta} \quad (10.115)$$

Inna forma równania

$$\square\Psi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \Psi - \Gamma^\mu \frac{\partial\Psi}{\partial x_\mu} \quad (10.116)$$

Korzystając z zależności

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \\ \Gamma^\alpha &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta}) \\ \Gamma^\alpha &= -\square x_\alpha \end{aligned} \quad (10.117)$$

Przy skorzystaniu ze współrzędnych harmonicznymy możemy zapisać

$$\begin{aligned} -\square x_\alpha &= 0 \\ R_{\mu\nu} &= \frac{-1}{g} \frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Gamma^\mu + \Gamma^{\mu,\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \\ \Gamma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\nabla^\mu \Gamma^\nu + \nabla^\nu \Gamma^\mu) g^{\mu\nu} \frac{\partial\omega}{\partial x_\mu} \frac{\partial\omega}{\partial x_\nu} = 0 \end{aligned} \quad (10.118)$$

Korzystając z powyższych zależności i przechodząc do układu współrzędnych w którym (co jest zawsze możliwe, dyskusja zawarta w książce Focka)

$$\square\Psi = 0 \quad (10.119)$$

okazuje się, ponieważ równanie propagacji pola grawitacji ma tę samą postać co równanie propagacji promienia świetlnego, prędkość propagacji pola grawitacji będzie równa prędkości światła c .

10.7 Perspektywa.

One of possibility to join quantum theory and gravitation is studied in Fock papers [16]. Some interesting applications of geometrical point of view is given in „Geometric quantization of curvature energy in equipotential surfaces of ionic crystals” [17]

10.8 Odchylenie promienia światła w polu grawitacji (w pobliżu Słońca)

Zaniedbujemy człony rzędu $\frac{\alpha^2}{r^2}$ równanie na ω redukuje się do:

$$\frac{n^2}{c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - (grad \omega)^2 = 0 \quad (10.120)$$

gdzie:

$$n^2 = 1 + \frac{4\alpha}{r} \quad (10.121)$$

$$n = 1 + \frac{2\alpha}{r} \quad (10.122)$$

Równanie (1) może być formalnie interpretowane jako prawo propagacji światła w przestrzeni euklidesowej, ale w orodku o współczynniku załamania n .

Można to również otrzymać z przybliżonego wyrażenia na ds^2 :

$$ds^2 = (c^2 - 2U)dt^2 - \left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (10.123)$$

z efektywnym współczynnikiem odbicia:

$$n = 1 + \frac{2U}{c^2} \quad (10.124)$$

W poprzednich rozdziałach znaleliśmy całki ruchu:

$$\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \frac{dt}{d\tau} = \varepsilon \quad (10.125)$$

i

$$(r + \alpha)^2 = \frac{d\varphi}{d\tau} = \mu \quad (10.126)$$

a także równanie na trajektorie:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{c^2 \varepsilon}{\mu^2} (r + \alpha)^4 + \frac{c^2}{\mu^2} (r + \alpha)^3 (r - \alpha) - (r + \alpha)(r - \alpha) \quad (10.127)$$

Dla promienia światła $d\tau = 0$ i stałe w równaniach (6) i (7) stają się nieskończenie wielkie, ale ich stosunek jest skończony:

$$\frac{(r + \alpha)^3}{r - \alpha} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 \quad (10.128)$$

Wówczas równanie (8) uzyska formę:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{c^2}{\mu_1^2}(r+\alpha)^4 - (r+\alpha)(r-\alpha) \quad (10.129)$$

W miejsce stałej μ_1 wygodniej jest wprowadzić inną stałą b , o wymiarze długości, daną przez następującą relację:

$$\lim \frac{\mu}{\varepsilon} = \mu_1 = cb \quad (10.130)$$

Co prowadzi do:

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(r+\alpha)^4 - (r+\alpha)(r-\alpha) \quad (10.131)$$

i wykorzystując relację $u = \frac{1}{r}$ otrzymamy:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2}(1+\alpha u)^4 - u^2 + \alpha^2 u^4 \quad (10.132)$$

gdzie b jest tzw. parametrem zderzenia.

Elementarne relacje z geometrii płaszczyzny euklidesowej prowadzi do:

$$d = \frac{1}{\sqrt{u^2 + (du\varphi)^2}} \quad (10.133)$$

Wracając do równania (13) na drogę promienia wietlnego i pomijając małe człony otrzymamy równanie:

$$u = \frac{2\alpha}{b^2} + \frac{1}{b} \cos \varphi \quad (10.134)$$

które to można już rozwiązać elementarnymi sposobami. Analizując równanie (15) widzimy, że:

$$r_{min} = b - 2\alpha \quad (10.135)$$

Ponadto kąt o jaki odchyli się promień wietlny dany jest wyrażeniem:

$$2\delta = \frac{4\alpha}{b} \quad (10.136)$$

Dla Słońca $2\delta = 1,75''$

10.9 Przesunięcie ku czerwieni

Hubble jako pierwszy zaobserwował przesunięcie widma odległych obiektów kosmicznych ku czerwieni. Przesunięcie to było tym większe im dalej znajdowały się obiekty. W celu analizy tego zjawiska zapiszemy najpierw wyrażenie na ds^2 w postaci:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\tau}\right)^4 (c^2 dt^2 - d\vec{r}^2) \quad (10.137)$$

gdzie α jest dodatniš stałš, a τ jest dane wzorem:

$$\tau = \sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c^2}} \quad (10.138)$$

Korzystajšc z wartoci τ_0 zwišzanej z czasem t_0 i równania (19) otrzymamy:

$$\frac{\tau_0}{\tau} = \sqrt{\frac{t_0^2 - \frac{r_0^2}{c^2}}{t_0^2 + \frac{r_0^2}{c^2}}} \quad (10.139)$$

Z drugiej strony:

$$\frac{r_0}{\tau_0} = v \quad (10.140)$$

gdzie v jest prędkošiš gwiazdy.

Z równań (20) i (21) otrzymamy:

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \quad (10.141)$$

Literatura

1. P. Dirac, *General theory of Relativity*, Wiley, Sons, USA, 1975.
2. V.A. Fock, *Teoriya prostranstva, vremeni i tyagotenija*, Moskva 1955. THE THEORY OF SPACE TIME AND GRAVITATION. Pergamon Press. 1959.
3. Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation* (Physics Series) W. H. Freeman and Company in 1973.
4. M.J. Duff, L.B. Okun, G. Veneziano, *Dialogue on the number of fundamental constants*, arXiv, physics ■ 110060.
5. L. P. Eisenhart Continuous groups of transformations. Princeton, 1933.
6. The Large Scale Structure of Space-Time (Cambridge Monographs on Mathematical Physics) by Stephen W. Hawking, G. F. R. Ellis, P. V. Landshoff and D. R. Nelson (Mar 28, 1975)
7. J.D. Jackson, *Elektrodynamika klasyczna*, wyd 2, PWN, Warszawa 1987.
8. A. A. Logunov, Henri Poincare and Relativity Theory arXiv:physics ■ 408077v4 [physics.gen-ph]
9. L.B. Okun, *SI, CGSG, and ch units: metrology and special relativity*, arXiv, physics ■ 407099.
10. A. Puankare, *O nauke*, Izdatelstvo i Nauka, 1983.
11. H. Poincare, 'La Mesure du Temps', Revue de Metaphysique et de Morale (1898), 113. H. See also www.annales.org/archives/oincaEmery.doc
12. Einstein A "Die Feldgleichungen der Gravitation" Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 48 844 (1915)
13. Hilbert D "Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)" Gottingen Nachr. 3 395 (1915)
14. M. Skorko, *Fizyka*, PWN, Warszawa 1971.
15. D. Stauffer, H.E. Stanley, *Od Newtona do Mandelbrota. Wstępy do fizyki teoretycznej*, WNT, Warszawa 1996.
16. V. Fock, L'equation d'onde de Dirac et la geometrie de Riemann. (The Dirac wave equation and the Riemann geometry) J.Phys.Radium, 1929, t. 10, N 11, p. 392-405. Uber eine mogliche geometrische Deutung der relativistischen Quantentheorie. (On a possible geometric interpretation of relativistic quantum theory) Zs. Phys., 1929, Bd. 54, N 11-12, S.798-802 (With D.D.Ivanenko).
17. Paul J. F. Gandy and Jacek Klinowski. Geometric quantization of curvature energy in equipotential surfaces of ionic crystals. JOURNAL OF CHEMICAL PHYSICS VOLUME 116, NUMBER 21 1 JUNE 2002