Wprowadzenie do teorii błędów i niepewności pomiaru

na podstawie opracowania dr inż. Moniki Lewandowskiej,
wykorzystano również materiały udostępnione
przez mgr inż. Aleksandrę Mielewczyk-Gryń

Podstawowe pojęcia

POMIAR – porównanie mierzonej wielkości fizycznej z wielkością tego samego rodzaju przyjętą za jednostkę

REZULTAT POMIARU – winien zawierać trzy składowe: wartość liczbową pomiaru, niepewność oraz jednostkę

Podstawowe pojęcia

POMIARY BEZPOŚREDNIE – polegają na porównaniu wprost danej wielkości z odpowiednią miarą wzorcową

przykłady:

- pomiary wymiarów jakiegoś ciała za pomocą linijki, suwmiarki czy też śruby mikrometrycznej

- pomiar czasu trwania zjawiska/procesu za pomocą stopera

Podstawowe pojęcia

POMIARY POŚREDNIE – wartość badanej wielkości wyznaczana jest na podstawie pomiarów bezpośrednich innych wielkości fizycznych, które są związane z mierzoną wielkością znaną zależnością/prawem fizycznym

przykład:

- pomiar przyspieszenia ziemskiego za pomocą wahadła matematycznego

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad g = \frac{4\pi^2 l^2}{T^2}$$

Podstawowe pojęcia

NIEZALEŻNIE OD METODY POMIAROWEJ NIGDY NIE JESTEŚMY W STANIE BEZWZGLĘDNIE DOKŁADNIE WYZNACZYĆ RZECZYWISTEJ WARTOŚCI WIELKOŚCI FIZYCZNEJ

CZYTAJ: KAŻDY POMIAR OBARCZONY JEST PEWNYM BŁĘDEM

Podstawowe pojęcia

BŁĘDEM POMIARU określa się różnicę pomiędzy wynikiem pomiaru a rzeczywistą wartością mierzonej wielkości

$$\textit{błąd pomiaru} = x_{zmierzone} - x_{rzeczywiste}$$

ze względu na „przyczynę” zajścia błędy pomiaru dzielimy na:

- **GRUBE (OMYŁKI)**
- **PRZYPADKOWE**
- **SYSTEMATYCZNE**

Podstawowe pojęcia

BŁĘDY GRUBE – powstaję wskutek nieuwagi lub niestaranności obserwatora przy odczytywaniu lub zapisywaniu wyników, przyczyną ich może być również nagła zmiana warunków pomiaru (np. wystąpienie wstrząsów)

uwaga:

dysponując serią pomiarów łatwo wykryć wyniki obarczone błędem grubym, rezultaty takie należy najzwyczajniej usunąć

Podstawowe pojęcia

BŁĘDY SYSTEMATYCZNE – wynikają z niedoskonałości przyrządów i metod pomiarowych, można je zredukować stosując bardziej dokładne techniki pomiarowe,

błędy systematyczne często można rozpoznać, należy je wówczas uwzględnić odpowiednio korygując wyniki pomiarów,

przykład:

- waga, wskazanie bez obciągenia wynosi m_0 zamiast 0, m_0 jest zatem miarą popełnianego błędu systematycznego

Podstawowe pojęcia

BŁĘDY PRZYPADKOWE – występują zawsze, wynikają z różnych przypadków i nie dających się uwzględnić czynników (np. wahania temperatury, ruch powietrza w pobliżu przyrządu pomiarowego), równie częstą przyczyną błędów przypadkowych jest niezgodność przyjętego modelu z rzeczywistością

przykład:

chcemy zmierzyć średnicę pręta, milcząco zakładamy iż pręt jest idealnym walcem, co nie do końca jest prawdą

Podstawowe pojęcia

BŁĘDY PRZYPADKOWE – o ich istnieniu świadczy niepowtarzalność wyników pomiaru jednej i tej samej wielkości fizycznej,

uwaga:

błedy przypadkowe redukuje się poprzez wielokrotne powtarzanie pomiaru, zachodzi wówczas częściowa kompensacja błędów przypadkowych zawyżających i zaniżających wynik

Podstawowe pojęcia

NIEPEWNOŚĆ POMIARU – parametr związany z wynikiem pomiaru, równie istotny jak sam wynik pomiaru

NIEPEWNOŚĆ POMIARU - charakteryzuje rozrzut wyników pomiaru, podając szerokość przedziału, wewnątrz którego można z zadawalającym prawdopodobieństwem usytuować wartość wielkości mierzonej

Podstawowe pojęcia

NIEPEWNOŚĆ POMIARU – nie może być ona wyznaczona doskonale dokładnie, dokonuje się jej oszacowania (chociażby na bazie statystycznej estymacji)

Podstawowe pojęcia

ŻADEN POMIAR NIE JEST IDEALNIE DOKŁADNY, WSZYSTKIE POMIARY SĄ OBARCZONE PEWNĄ NIEPEWNOŚCIĄ!

FAKT TEN NIE WYNIKA WYŁĄCZNIE Z NIEDOSKONAŁOŚCI APARATURY CZY TEŻ OBSERWATORA, JEST ON NIEODŁĄCZNĄ CECHĄ KAŻDEGO POMIARU!

Regulacje prawne

- Międzynarodowa Organizacja Normalizacyjna (ISO) w roku 1995 opublikowała normy dotyczące terminologii i sposobu określania niepewności pomiarów (*„Guide to Expression of Uncertainty in Measurement”*, ISO, Switzerland 1995)
- norma ta została ustawowo przyjęta w Polsce

  w roku 1999 (*„Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik”*, Główny Urząd Miar, Warszawa 1999)
- obecnie przy opracowywaniu wyników pomiarów należy stosować się do zaleceń tejże normy, jest to wymagane prawem (podobnie jak stosowanie jednostek układu SI)

GŁÓWNY URZĄD MIAR

BIULETYN INFORMACJI PUBLICZNEJ

szukaj >

- Strona główna
- STRUKTURA I DZIAŁALNOŚĆ
- Statut i regulamin
- Kierownictwo
- Biura i samodzielne stanowiska
- Zakłady i Laboratoria
- Plan działalności GUM
- METROLOGIA
- Administracja miar
- OKRĘGOWE URZĘDY MIAR
- Wzorce i jednostki miar
- PROBIERNICTWO
- Administracja probiercza
- OKRĘGOWE URZĘDY PROBIERCZE
- PRAWO
- Dzienniki Urzędowe GUM

WYRAŻANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU. PRZEWODNIK

Książka ta, wydana w 1999 r., to polskie tłumaczenie ***Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement***. Jest to publikacja firmowana przez międzynarodowe organizacje: BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML.

Przewodnik przeznaczony jest dla pracowników:

- administracji miar,
- wyższych uczelni,
- instytutów naukowych,
- laboratoriów pomiarowych
- oraz dla studentów i producentów przyrządów pomiarowych.

Pozycja składa się z następujących rozdziałów:

- Zakres,
- Definicje,
- Pojęcia podstawowe,
- Obliczanie niepewności standardowej,
- Określanie złożonej niepewności standardowej,
- Określanie niepewności rozszerzonej,
- Podawanie niepewności,
- Skrócony przepis obliczania i wyrażania niepewności,

ponadto wyposażona jest w liczne aneksy (Zalecenia Grupy Roboczej i CIPM, Ogólne terminy metrologiczne, Podstawowe terminy i pojęcia statystyczne, Wartość "prawdziwa", błąd i niepewność, Motywacje i podstawy Zalecenia INC-1, Obliczanie

http://bip.gum.gov.pl

Regulacje prawne

- międzynarodowa norma (m. n.) zaleca posługiwanie się terminem **niepewność pomiarowa**

- w ramach m. n. termin ten definiuje się jako **parametr charakteryzujący wątpliwości dotyczące wartości wyniku pomiarowego**

- sugerowaną przez m. n. miarą niepewności pomiarowej jest **niepewność standardowa**

Regulacje prawne

m. n. definiuje dwa sposoby szacowania niepewności standardowej:

metoda typu A – wykorzystuje analizę statystyczną serii pomiarów

metoda typu B – bazuje na naukowym osądzie obserwatora

Oznaczenia

- zgodnie z m. n. niepewność standardową przyjęto oznaczać symbolem *u* (od ang. uncertainty),
- symbolu tego można używać na 3 sposoby: *u, u(x), u(stężenie molowe NaCl)*
- opis słowny zalecany w przypadku dokumentacji technicznych

przykłady:

$u = 2.0\ kg$

$u(l) = 0.5\ m$

$u(\text{natężenie prądu}) = 0.1\ A$

Metody określania *u(x)*

zgodnie z m. n. rozróżniamy **dwie sytuacje** (różnią się one zarówno pod względem natury pomiaru jak również w sposobie oceny niepewności pomiaru):

- **pomiary bezpośrednie**

- **pomiary pośrednie**

Pomiary bezpośrednie

Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

- przypuśćmy, że wykonaliśmy serię *n*-pomiarów wielkości fizycznej *x* otrzymując wyniki:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

- jeśli wyniki pomiarów nie są takie same wówczas za najbardziej zbliżoną do wartości prawdziwej przyjmujemy średnią arytmetyczną ze wszystkich pomiarów

$$x \approx \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

- stwierdzenie powyższe jest tym bardziej słuszne im większa jest liczba przeprowadzonych pomiarów

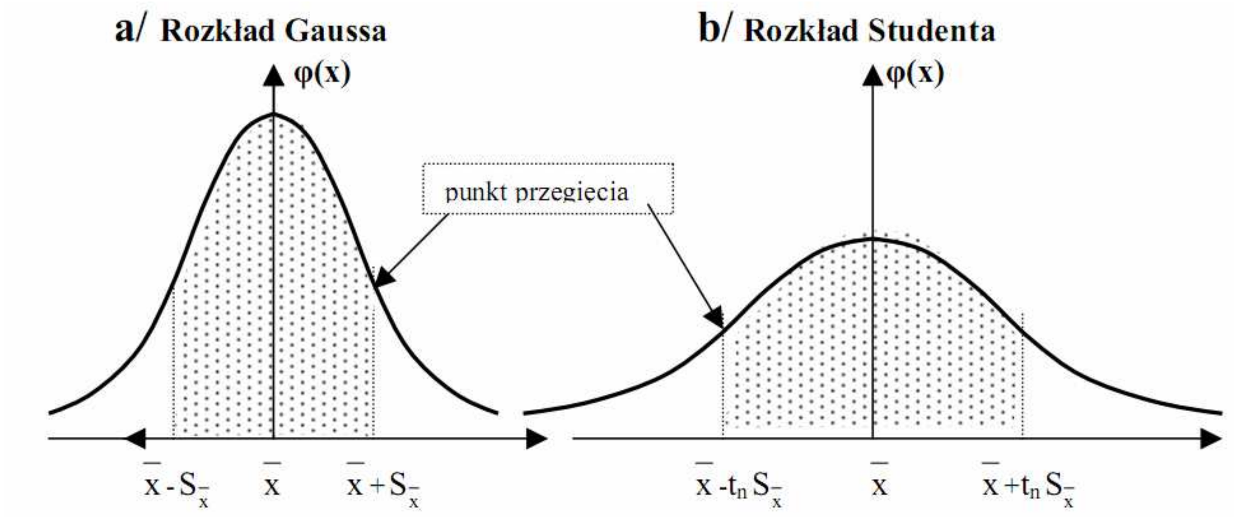
Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

- w celu określenia niepewności standardowej posługujemy się w tym przypadku sposobem **typu A** przyjmując **niepewność standardową** daną jako **odchylenie standardowe średniej**

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}}$$

- jeżeli seria zawiera zbyt mało pomiarów (*n* < *11*, niekiedy *n* < *30*), wynik dany powyższym wzorem należy „poprawić” – pomnożyć przez współczynnik z rozkładu t-Studenta, współczynnik ten zależy od liczby pomiarów oraz przyjętego poziomu ufności

Rozkłady statystyczne



- odchylenie standardowe w rozkładzie t-Studenta jest t_n-razy większe od ochylenia standardowego w rozkładzie normalnym (Gaussa)

Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

- w przypadku „ubogich” serii pomiarowych (n < 11) niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u(x) = t_n \sqrt{s_{\bar{x}}^2} = t_n \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

- parametr t_n zależy zarówno od liczności serii pomiarowej (ściśle: tzw. liczby stopni swobody) jak również od przyjętego tzw. poziomu ufności
- wartości parametru rozkładu t-Studenta dla poziomu ufności równego 0.683

n	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
t_n	1,11	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05

Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

- jeżeli wyniki pomiaru nie wykazują rozrzutu (czyli gdy $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$) lub gdy istnieje tylko jeden wynik pomiaru wówczas niepewność standardową szacujemy sposobem **typu B**,

  czytaj: bazujemy na naszym „subiektywnym" osądzie naukowym

- „subiektywizm" jest tutaj regulowany!

Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

- gdy dostępny jest tylko jeden wynik pomiaru
  lub gdy wyniki nie wykazują rozrzutu
  niepewność standardową ocenia się na podstawie:

  a) **niepewności wzorcowania przyrządów pomiarowych Δ_W**
  b) i/lub **niepewności eksperymentatora Δ_E**
  c) i/lub **niepewności tablicowej Δ_T**

- niepewność standardową jednokrotnego pomiaru wielkości *x* wyraża się wzorem:

$$u(x) = \Delta_W + \Delta_E + \Delta_T$$

Niepewność wzorcowania przyrządów analogowych

- w przypadku przyrządu analogowego o niepewności wzorcowania Δ_W w głównej mierze stanowi tzw. **klasa przyrządu**

- podawana jest ona przeważnie jako ***procent maksymalnej wartości możliwej do zmierzenia na wybranym zakresie przyrządu***

- w celu obliczania niepewności wzorcowania posługujemy się wzorem:

$$\Delta_W = \frac{\text{klasa} \times \text{zakres}}{100}$$

Niepewność wzorcowania przyrządów analogowych

- przy obliczaniu niepewności standardowej oprócz podanej poprzednio niepewności należy uwzględnić niepewność odczytu ze skali przyrządu

- przyjmuje się ją zwykle jako równą jednej działce elementarnej przyrządu

Niepewność wzorcowania przyrządów cyfrowych

- w przypadku elektronicznych przyrządów cyfrowych niepewność wzorcowania podawana jest przez producenta w instrukcji obsługi
- jest ona przeważnie kilkukrotnie większa od działki elementarnej, co więcej - zależy od zakresu pracy oraz wartości mierzonej wielkości
- informacja o niepewności wzorcowania przyrządów cyfrowych przeważnie podawana jest w postaci

$$\Delta_W = C_1\% \times \mathrm{rdg} + C_2 \times \mathrm{dgt}$$

rdg – od ang. *reading*, czytaj: aktualny odczyt

dgt – od ang. *digit*, czytaj: ostatnia wyświetlana cyfra

C_1, C_2 – stałe charakteryzyjące przyrząd mierniczy, podawane przez producenta

Niepewność eksperymentatora

- niepewność eksperymentatora Δ_E jest ważnym przyczynkiem do niepewności pomiarów jednokrotnych

- jej wielkość eksperymentator określa **samodzielnie**, bazując na własnym doświadczeniu oraz wiedzy

- przydatnymi są tutaj obserwacje dotyczące chociażby widoczności czy też stabilności pomiaru

Niepewność tablicowa

- niepewnościami obarczone są również wyniki zaczerpnięte z literatury, tablic fizycznych czy też kalkulatora
- w przypadku braku jakichkolwiek informacji o niepewności tak pozyskanej danej, przyjmujemy, że **niepewność tablicowa Δ_T** jest równa dziesięciu jednostkom ostatniego miejsca rozwinięcia dziesiętnego danej wielkości

przykłady:

przyjmując do obliczeń $g = 9.81\ m/s^2$

należy przyjąć $u(g) = 10 \times 0.01\ m/s^2 = 0{,}1\ m/s^2$

Niepewność standardowa pomiarów bezpośrednich

- podsumowując: niepewność standardową jednokrotnego pomiaru wielkości *x* obliczamy ze wzoru:

$$u(x) = \Delta_W + \Delta_E + \Delta_T$$

Uwagi (odstępstwa)

- w przypadku pomiarów wielokrotnych, w sytuacji gdy występują oba typy niepewności (zarówno rozrzut wyników jak i niepewności związane z wzorcowaniem/eksperymentatorem/wartościami tablicowymi) i żadna z nich nie może zostać zaniedbana (czytaj: są podobnego rzędu) wówczas niepewność standardową (całkowitą) oblicza się ze wzoru:

$$u(x) = \sqrt{s_{\bar{x}}^2 + \frac{\Delta_W^2}{3} + \frac{\Delta_E^2}{3} + \frac{\Delta_T^2}{3}}$$

- dowodzi się, iż zastosowanie powyższego wzoru daje 68.3% pewność, że rzeczywista wartość mierzonej wielkości *x* mieści się w przedziale

$$(\bar{x} - u(x), \bar{x} + u(x))$$

Uwagi (odstępstwa)

- do oznaczania poszczególnych składowych niepewności często stosuje się oznaczenia postaci

$$\Delta_W x,\ \Delta_E x,\ \Delta_T x,$$

w celu zaakcentowania iż dana niepewność dotyczy wielkości oznaczonej przez x

Przykład 1: Pomiar jednokrotny

- linijką jednokrotnie zmierzono wysokość h oraz szerokość d książki
- mierząc wysokość przyłożono linijkę do dobrze przyciętej okładki odczytując $h = 228\ mm$, dokładność eksperymentatora oceniono na $\Delta_E h = 1\ mm$ (linijki dobrze przylegała do książki), niepewność wzorcowania linijki wynosi $\Delta_W h = 1\ mm$
- niepewność standardowa pomiaru wysokości dana będzie jako:

$$u(h) = \Delta_E h + \Delta_W h = 1\ mm + 1\ mm = 2\ mm$$

- rezultat finalny pomiaru wysokości

$$h = (228 \pm 2)\ mm$$

Przykład 1: Pomiar jednokrotny

- mierząc szerokość książki uzyskano $d = 165\ mm$
- ze względu na obły kształt grzbietu książki dokładność eksperymentatora w tym przypadku oceniono na $\Delta_E d = 2\ mm$
- rezultat finalny pomiaru szerokości książki

$$d = (165 \pm 3)\ mm$$

Przykład 2: Pomiar jednokrotny

- za pomocą woltomierza dokonano pomiaru napięcia baterii *U*
- miernik (patrz informacja dostarczona przez producenta) pozwala mierzyć z dokładnością

$$\Delta_W U=0.002\ V$$

- podczas pomiaru zaobserwowano iż wskutek zakłóceń ostatnia cyfra „miga”, pozwalając odczytać

$$U=1.56\ V$$

- wobec powyższego przyjęto niepewność eksperymentatora jako równą

$$\Delta_E U=0.01\ V$$

- ostatecznie

$$U = (1.560 \pm 0.012)\ V$$

Przykład 3: Pomiar wielokrotny

- przeprowadzono pomiary czasu spalania zapałek
- uzyskano osiem wyników:

  T_1=15 s, T_2=16 s, T_3=13 s, T_4=14 s,

  T_5= 7 s, T_6=15 s, T_7=17 s, T_8=16 s
- wstępna analiza rezultatów pozwala odrzucić rezultat piąty jako błąd gruby

  T_1=15 s, T_2=16 s, T_3=13 s, T_4=14 s,

  T_5=15 s, T_6=17 s, T_7=16 s
- wynikiem pomiaru będzie zatem obliczona na bazie *n=7* rezultatów średnia

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = 15.1428\,\mathrm{s}$$

Przykład 3: Pomiar wielokrotny

- za istotną uznajemy niepewność wzorcowania użytego przy pomiarze zegarka, przyjmując $\Delta_W T=1\ s$
- niepewność standardową obliczamy ze wzoru

$$u(t) = \sqrt{s_{\overline{T}}^2 + \frac{(\Delta_W T)^2}{3}}$$

gdzie

$$s_{\overline{T}} = t_n \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(T_i - \overline{T}\right)^2}{n(n-1)}}$$

- jako iż próba była uboga ($n=7$), „poprawiamy" wyznaczoną wariancję (z tabeli rozkładu t-Studenta odczytujemy $t_n=1.09$)
- przeprowadzając rachunki otrzymujemy ostatecznie

T=(15.14 ± 0.94) s

Pomiary pośrednie

Niepewność standardowa pomiarów pośrednich

- w przypadku pomiarów pośrednich wielkość mierzoną *y* obliczamy korzystając ze związku funkcyjnego o ogólnej postaci

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

- symbolami x_1, x_2, ..., x_k oznaczono *k*-wielkości fizycznych mierzonych bezpośrednio
- zakładamy, że znane są wyniki pomiarów tych wielkości tj.

$$\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_k$$

oraz ich niepewności standardowe tj.

$$u(x_1), u(x_2), \ldots, u(x_k)$$

Niepewność standardowa pomiarów pośrednich

- wynik końcowy oblicza się wówczas ze wzoru

$$y \approx \bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$$

- w przypadku pomiarów pośrednich nieskorelowanych (tzn. gdy każdą z wielkości x_1, x_2, ..., x_k mierzy się niezależnie) **niepewność złożoną** wielkości y oblicza się za pomocą wzoru:

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k) \right]^2 u^2(x_j)}$$

- m. n. zaleca stosowanie indeksu „C” (od ang. *complex*) w celu podkreślenia „złożoności” tak obliczonej niepewności

Przykład 4: Niepewność złożona

- celem obliczenia energii kinetycznej wagonu kolejowego dokonano pomiarów jego prędkości *v* oraz masy *m*
- uzyskano: v = (31 ± 2) m/s,
  m = (15.0 ± 0.5) t
- obliczona wartość energii kinetycznej wagonu

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = 7207500 \text{ J}$$

- niepewność standardową pomiaru energii kinetycznej wagonu wyznaczamy stosując metodę różniczki zupełnej

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k \right) \right]^2 u^2(x_j)}$$

Przykład 4: Niepewność złożona

- w rozważanym przypadku $E_{kin} = E_{kin}(m, v)$

  a zatem

$$u_c(E_{kin}) = \sqrt{\left[\frac{\partial E_{kin}}{\partial m}(m,v)\right]^2 u^2(m) + \left[\frac{\partial E_{kin}}{\partial v}(m,v)\right]^2 u^2(v)} =$$

$$= \sqrt{\frac{v^4}{4}u^2(m) + m^2 v^2 u^2(v)} = 523397.56\ \mathrm{J}$$

- ostatecznie $E_{kin} = (721 \pm 52) \cdot 10^4\ J$

Prezentacja wyników pomiarowych

Zapis wyników pomiaru

- wyniki pomiaru zapisujemy łacznie z niepewnością oraz jednostką
- niepewność podajemy zawsze z dokładnością do dwóch cyfr, zaś liczbę cyfr znaczących wyniku dobieramy tak, aby ostatnia cyfra wyniku i niepewności były tego samego rzędu
- **zgodnie z m. n. dla niepewności standardowej zalecany jest zapis z użyciem nawiasów okrągłych „()”, zaś dla tzw. niepewności rozszerzonej zapis z użyciem symbolu „±”**
- **zwyczajowo przyjęto stosować symbol „±” przy zapisie niepewności standardowej**

Zapis wyników pomiaru

- prawidłowo zapisany wynik końcowy pomiaru wymaga z reguły zaokrąglenia
- zasada przeprowadzania zaokrąglenia jest następująca:

  a) niepewność standardową *u(x)* pomiaru wielkości fizycznej *x* zaokrąglamy do takiego miejsca, aby pozostały (maksymalnie) **dwie cyfry znaczące**

  b) wynik pomiaru zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiętnego do którego została zaokrąglona niepewność standardowa *u(x)*

Zapis wyników pomiaru

- w przypadku niepewności standardowej można stosować zaokrąglenie „do góry”, dajemy w ten sposób wyraz szczególnej trosce o poprawność i pewność pomiaru
- niekiedy (szczególnie w przypadku pomiarów jednokrotnych) niepewność standardową zaokrągla się pozostawiając jedną cyfrę znaczącą,

  przykład:

  rezultat

  $$d=(12.10\pm0.06)\ mm$$

  można zapisać jako

  $$d=(12.1\pm0.1)\ mm$$

Zapis wyników pomiaru

- dokonano pomiarów średnicy *d* metalowego pręta
- opracowując wyniki pomiarowe uzyskano:

$$d=0.00345478\ m,\ u(d)=5.468789\cdot 10^{-4}\ m$$

- rezultaty należy wstępnie zaokrąglić oraz zapisać w poprawnej (zwięzłej i przystępnej) formie
- przykłady możliwych w tej sytuacji poprawnych zapisów końcowych:

$$d = (3.45\pm 0.55)\cdot 10^{-3}\ m$$
$$d = (345\pm 55)\cdot 10^{-5}\ m$$
$$d = 345(55)\cdot 10^{-5}\ m$$

Zapis wyników pomiaru

- liczne przykłady poprawnej metody zapisu rezultatów pomiarowych można znaleźć (chociażby) w tablicach fizycznych

ładunek elektronu
$e = (1.60217653 \pm 0,00000014) \cdot 10^{-19}$ C

stała Boltzmanna
$k = R/N_A = (1.3806505 \pm 0,0000024) \cdot 10^{-23}$ J/K

stała Faradaya
$F = N_A e = (96\ 485.3383 \pm 0,0083)$ C/mol

stała grawitacyjna
$G_N = (6.6742 \pm 0.0010) \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg \cdot s^2)$

Zapis wyników pomiaru

*przykłady **poprawnego** zapisu:*

$m=100.0214\ g,\ u(m)=3.5\ mg$

$m=100.0214\ g,\ u(m)=0.0035\ g$

$m=(100.0214 \pm 0.0035)\ g$

$m=100.0214(35)\ g$

Zapis wyników pomiaru

*przykłady **niepoprawnego** zapisu:*

$m=100.0214$ g

$m=(100.021\pm0.0035)$ g

$m=100.021$ g, $u(m)=3$ mg

$m=100.021(3)$ g

Zapis wyników pomiaru

*przykłady **niepoprawnego** zapisu:*

nie podano niepewności

$m = 100.0214\ g$

ostatnie cyfry rezultatu oraz niepewności nie są tego samego rzędu

$m = (100.021 \pm 0.0035)\ g$

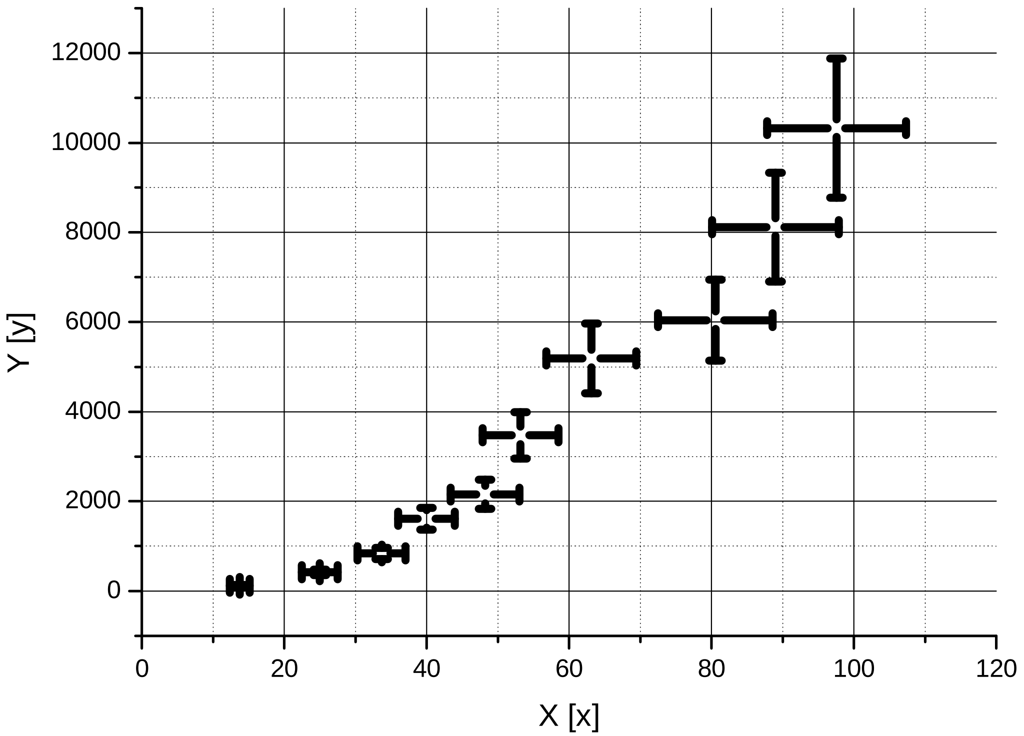
$m = 100.021\ g,\ u(m) = 3\ mg$

$m = 100.021(3)\ g$

przy zapisie niepewności podano zbyt mało cyfr

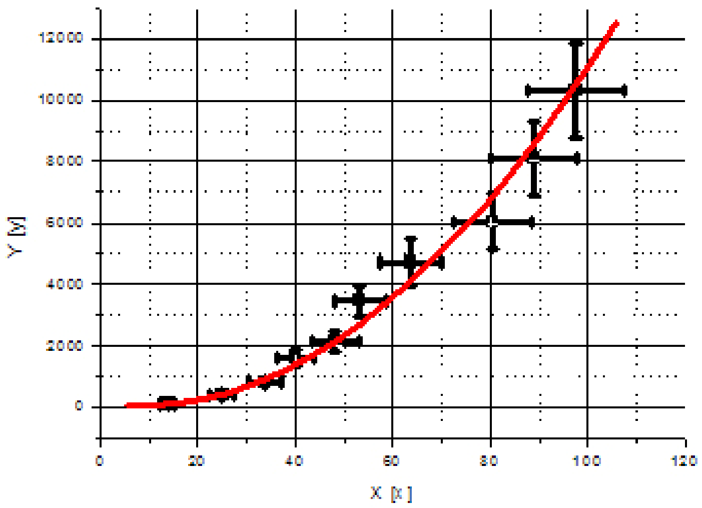
Prezentacja graficzna rezultatów pomiarowych

- w celu udogodnienia analizy rezultatów pomiarowych często sporządza się wykres zmierzonej zależności

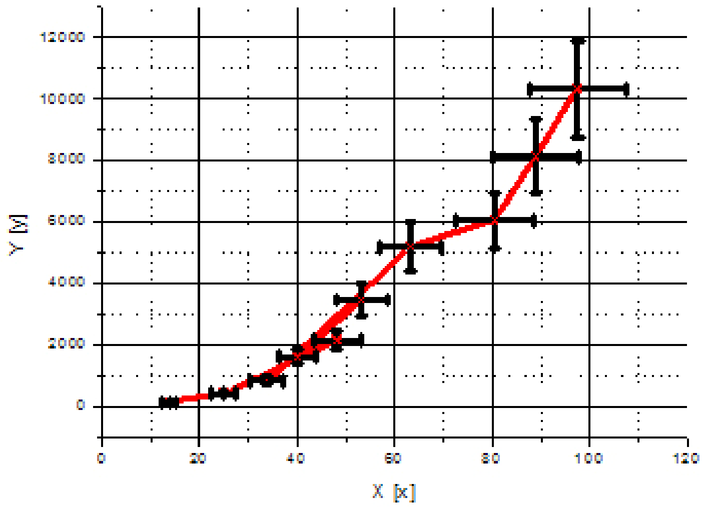


Prezentacja graficzna rezultatów pomiarowych

poprawnie



niepoprawnie



Regresja liniowa

- w sytuacjach gdy przypuszczamy, że pomiędzy mierzonymi wielkościami zachodzi zależność funkcyjna postaci

$$y = a \cdot x + b$$

  gdzie *y* oraz *x* są mierzonymi wielkościami
- regresja liniowa (której jedną z realizacji jest metoda najmniejszych kwadratów) pozwala wyznaczyć wartości współczynników *a* i *b,*

  czytaj: znaleźć równanie najlepiej dopasowanej prostej (prostej najlepiej opisującej zaobserwowaną eksperymentalnie zależność)

Metoda najmniejszych kwadratów

- w praktyce całość sprowadza się do zastosowania wzorów:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad D = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$a = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} y_i (x_i - \overline{x}) \qquad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

Metoda najmniejszych kwadratów

- niepewność standardową współczynników dopasowania wyznacza się z wzorów

$$s_y = \sqrt{\frac{s^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2}{n-2}}$$

$$u(a) = \frac{s_y}{\sqrt{D}} \qquad u(b) = s_y \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{D}}$$

Metoda najmniejszych kwadratów

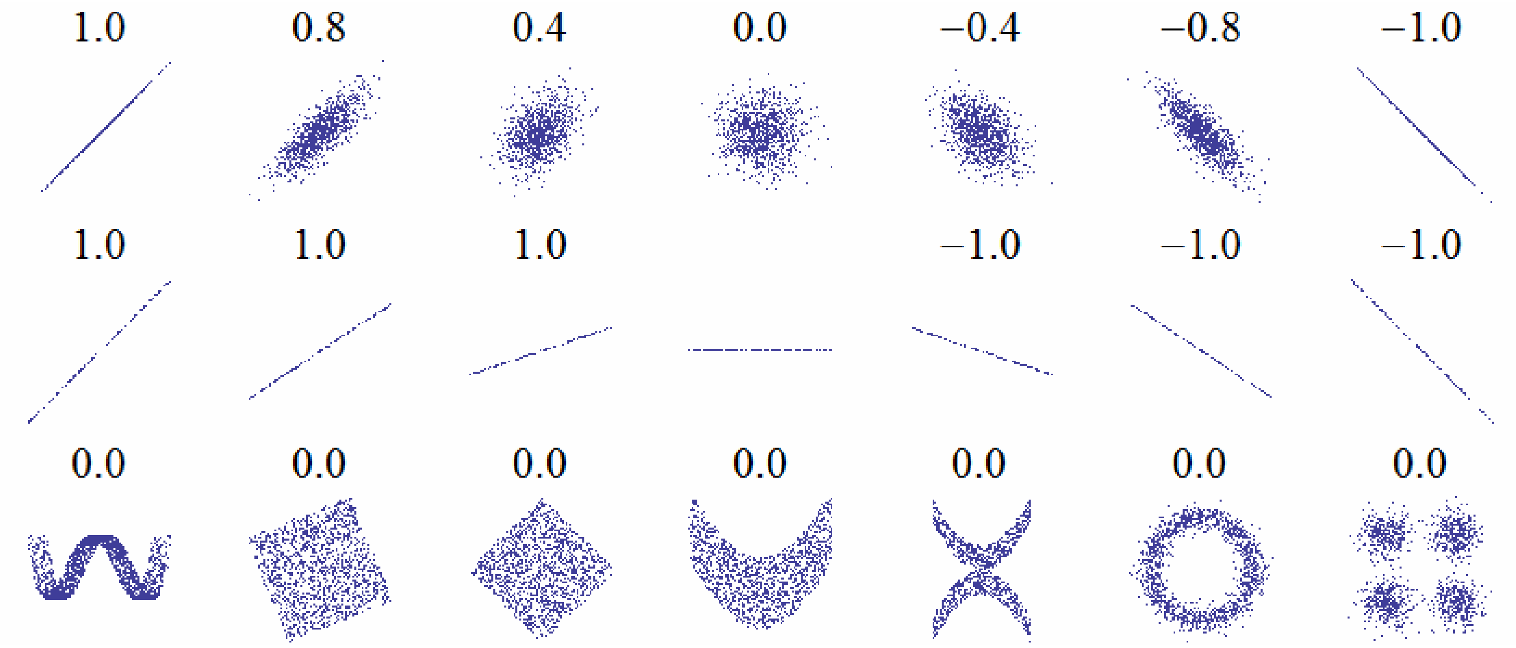
- istotnym parametrem mówiącym o „jakości" uzyskanego dopasowania jest tzw. współczynnik korelacji liniowej Pearsona dany wzorem:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2\right]}}$$

- z definicji $r \in [-1,1]$

- uzyskane dopasowanie jest tym „lepsze" im wartość r^2 jest bliższa jedności

Metoda najmniejszych kwadratów

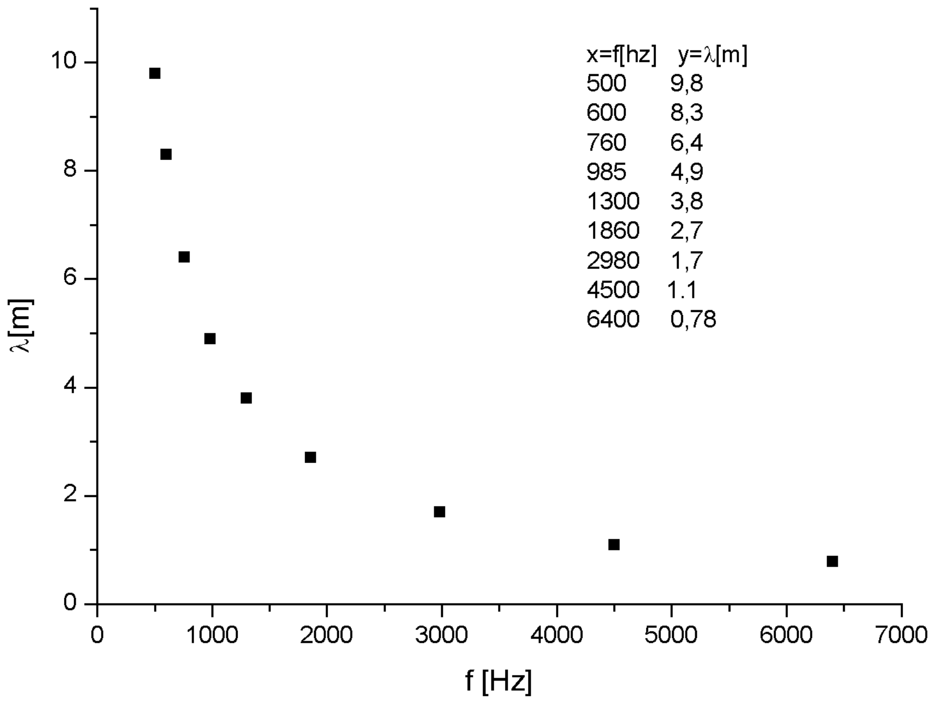


źródło: http://pl.wikipedia.org

Metoda najmniejszych kwadratów

przykład:

przeprowadzono pomiar długości fali dźwiękowej λ [m] w funkcji jej częstotliwości f [Hz]



Metoda najmniejszych kwadratów

- *wiadomo, iż badane wielkości winny być związane zależnością*

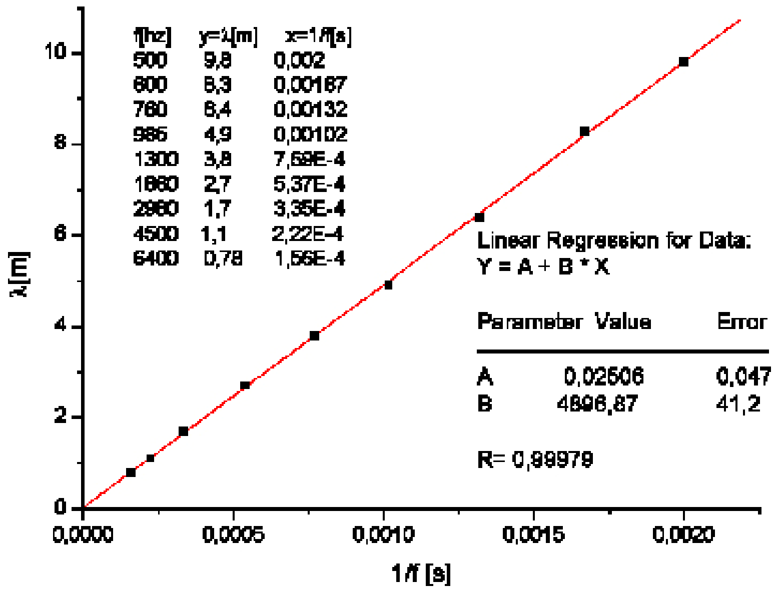
$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

przekształcając

$$\lambda = v\frac{1}{f}$$

Metoda najmniejszych kwadratów

- *ponownie wykreślono uzyskane dane pomiarowe, tym razem w długość fali λ w funkcji odwrotności częstotliwości fali 1/f*
- *jak widać (zgodnie z przewidywaniami) dane „układają się” w prostą, parametry prostej wyznaczono stosując metodę najmniejszych kwadratów*



Metoda najmniejszych kwadratów

przeprowadzone postępowanie pozwala stwierdzić, iż:

1) długość fali dźwiękowej λ jest związana z częstotliwością fali f zależnością funkcyjną postaci

$$\lambda = A + B / f$$

(o istnieniu korelacji świadczy bliska jedności wartość współczynnika korelacji R=0.99979)

2) prędkość propagacji badanej fali (patrz współczynnik proporcjonalności w obranym modelu) ma wartość

$$v = (4897 \pm 35)\ m/s$$

Metoda najmniejszych kwadratów

przeprowadzone postępowanie pozwala stwierdzić, iż:

3) uzyskano zgodną z przewidywaniami (tj. zerową) wartość współczynnika przecięcia

$$A = (0.025 \pm 0.047)\ m$$

4) przeprowadzone pomiary potwierdzają (bynajmniej nie przeczą) teoretycznej zależności

$$\lambda = v / f$$

5) prędkość fali dźwiękowej w zakresie częstotliwości od 800 Hz do 7500 Hz jest stała

Literatura / źródła

B. Kusz, *„Metody wykonywania pomiarów oraz szacowanie niepewności pomiaru”*

K. Kozłowski i R. Zieliński,
„I laboratorium z fizyki, część 1”, Wydawnictwo PG, Gdańsk 2006

„Wyrażanie niepewności pomiaru: Przewodnik”,
Główny Urząd Miar, Warszawa 1999

A. Zięba, 2001:
Natura rachunku niepewności pomiarowych a jego nowa kodyfikacja, Postępy fizyki 52, nr 5, s. 238-247

H. Szydłowski, 2000:
Międzynarodowe normy oceny niepewności pomiarowych,
Postępy fizyki 51, nr 2, s. 92-97

M. Lewandowska, *„Analiza niepewności pomiarowych”,*
http://labor.ps.pl/niepewnosci_pomiarowe.html
dostęp z dnia 7 X 2011 roku