

Uogólnione równania von Neumanna *

Marek Czachor

*Katedra Fizyki Teoretycznej i Metod Matematycznych
Politechnika Gdańska, ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk*

Spis treści

1	Wstęp	2
2	Liniowość i nielineowość mechaniki kwantowej	2
3	Czy równanie von Neumanna rzeczywiście musi być liniowe?	6
4	Równanie von Neumanna jako klasyczny układ hamiltonowski	7
5	Równanie von Neumanna czy Liouville-von Neumanna?	8
6	Wypukłość figury stanów	9
7	Dynamika stanów czystych	10
8	Problem 1: Dokładne rozwiązania nielineowych równań von Neumanna-Heisenberga	11
9	Problem 2: Jakie uogólnienia równania von Neumanna są dopuszczalne?	12
10	Kwestia dodatniości rozwiązań uogólnionych równań von Neumanna	12
11	Uogólnione równania von Neumanna w formalizmie typu Nambu	13
11.1	3-nawias	13
11.2	$(2n + 1)$ -nawias	14
12	Uogólnione równania von Neumanna całkowalne przy pomocy binarnej transformacji Darboux	17
12.1	Binarna transformacja Darboux i laxowska reprezentacja równań von Neumanna	17
13	Dwie strategie prowadzące do nietrywialnych $\rho[1]$	19
13.1	Strategia pierwsza	19
13.2	Strategia druga	21
14	Rozwiązania samorozproszeniowe	21

*Artykuł przedstawia wyniki z końca 1999 r. Od tego czasu udało się rozszerzyć metodę Darboux na o wiele szerszą klasę nielineowości. Udało się także znaleźć przykłady w pełni nieskończone wymiarowe.

15	Macierz gęstości z widmem zależnym od czasu	23
16	Równania von Neumanna dla podukładów	24
17	Zagadnienie kompletnej dodatniości dynamiki nieliniowej	26
18	Kilka otwartych problemów	29
18.1	Relatywistyczne równania von Neumanna	29
18.2	W pełni nieskończone wymiarowe przykłady rozwiązań metodą Darboux	29
18.3	Związki ze statystyką nieekstensywną	29
18.4	Całkowanie technikami Darboux innych nieliniowości	30
18.5	Transformacje typu Darboux w zastosowaniu do równań Heisenberga	30
19	Podziękowania	31

1 Wstęp

Celem poniższego opracowania jest omówienie pewnych nowych nurtów badań nad nieliniowymi równaniami operatorowymi pojawiającymi się w mechanice kwantowej lub przy próbach nieliniowych uogólnień teorii kwantowych. Skoncentrujemy się na wynikach dotyczących *dokładnych* rozwiązań równań typu von Neumanna. Nie będą nas więc interesować metody perturbacyjne w rodzaju formalnych rozwinięć w szeregi potęgowe, ani też metody wariacyjne używane do wyznaczania stanu podstawowego w teoriach Hartree.

Spora część tekstu została poświęcona podstawowym kwestiom natury fizycznej w rodzaju rozróżnienia pomiędzy równaniem Liouville’a a równaniem von Neumanna, oraz problemowi sensowności nieliniowych równań von Neumanna. W tej części praca nie pretenduje do wielkiej ścisłości matematycznej i jest raczej próbą odpowiedzi na pytania wielokrotnie zadawane przez innych fizyków przy różnych okazjach. Opinie tu przedstawione są wyrazem osobistego poglądu autora na fizyczną i formalną strukturę mechaniki kwantowej.

Pomimo, iż większość zagadnień omówionych w artykule związana jest z problemami podejmowanymi przez autora w serii prac publikowanych w latach 1996-99, sam artykuł jest nie tyle „przewodnikiem po publikacjach”, ile raczej „przewodnikiem po zagadnieniu” widzianym z perspektywy dotychczas uzyskanych wyników. Jest faktem budującym, iż wszystkie dotychczas sformułowane problemy znajdowały rozwiązania pozytywne, choć zdarzało się, iż dalszy rozwój badań korygował kierunek przyjęty na początku. Mam tutaj na myśli kwestię interpretacji rozwiązań równań von Neumanna jako macierzy gęstości, dynamik układów złożonych i ich kompletnej dodatniości, struktur Nambu i hamiltonowskich, a także konstrukcji nietrywialnych rozwiązań równań ruchu przy pomocy technik Darboux. Bez owego ostatniego wyniku nie byłoby żadnej gwarancji, iż cała konstrukcja nie jest pusta. Odkrycie rozwiązań samorozproszeniowych i zrozumienie ich konsekwencji dla teorii *liniowych* równań von Neumanna i Heisenberga z hamiltonianami zależnymi od czasu uważam za najważniejszy wynik, jaki udało się uzyskać w ramach dotychczas realizowanego programu. W tym miejscu nie mogłem się oprzeć pokusie zasygnalizowania pewnych nowych rezultatów i wskazania narzucających się kierunków dalszych badań.

2 Liniowość i nieliniowość mechaniki kwantowej

Mechanika kwantowa jest teorią liniową na przynajmniej kilka różnych sposobów. Na kilka innych sposobów jest ona jednakże również teorią nieliniową. Liniowość i nieliniowość splatają się w niej w sposób dość złożony i czasami trudny do rozdzielenia.

Zatrzymajmy się na moment przy najbardziej znanym przejawie liniowości mechaniki kwantowej — liniowości równania Schrödingera. Ujmując rzecz najprościej, równanie jest liniowe gdyż suma dowolnych dwóch rozwiązań tego równania jest również jego rozwiązaniem. Przykładowo, biorąc dwa rozwiązania zagadnień stacjonarnych¹

$$i\hbar|\dot{\psi}_1\rangle = H|\psi_1\rangle = E_1|\psi_1\rangle \quad (1)$$

$$i\hbar|\dot{\psi}_2\rangle = H|\psi_2\rangle = E_2|\psi_2\rangle \quad (2)$$

czyli

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{-iE_1t/\hbar}|\psi_1(0)\rangle \quad (3)$$

$$|\psi_2(t)\rangle = e^{-iE_2t/\hbar}|\psi_2(0)\rangle \quad (4)$$

stwierdzamy, że ich suma

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_1t/\hbar}|\psi_1(0)\rangle + e^{-iE_2t/\hbar}|\psi_2(0)\rangle \quad (5)$$

rownież spełnia

$$i\hbar|\dot{\psi}\rangle = H|\psi\rangle. \quad (6)$$

Oscylujące czynniki $e^{-i\omega_1t}$, $e^{-i\omega_2t}$ opisują dwa niezależne *klasyczne* oscylatory, gdzie rolę współrzędnych kanonicznych pełnią urojone i rzeczywiste składowe funkcje falowych². Z fizycznego punktu widzenia liniowość równania Schrödingera objawia się tu dwojako. Po pierwsze, oscylatory są *harmoniczne*. Po drugie, są *niezależne*³.

Drugim aspektem liniowości mechaniki kwantowej jest liniowość równania von Neumanna. Znane mi są trzy różne uzasadnienia tej własności. Po pierwsze, startując od równania Schrödingera (6) oraz jego wersji sprzężonej

$$-i\langle\dot{\psi}| = \langle\psi|H \quad (7)$$

¹Uwaga na temat notacji. Myśląc o funkcji falowej $\psi(x, y, z, t)$ jako o funkcji czterech *zmiennych* powinniśmy interpretować $\dot{\psi}$ jako $\partial\psi/\partial t$. Z drugiej strony oznaczenie $\partial\psi/\partial t$ często stosowane jest na oznaczenie różniczkowania po zmiennej danej w sposób jawny i odróżniane od tzw. pochodnej zupełnej. W wypadku funkcji falowej zmienne x, y, z są niezależne od t więc $\partial\psi/\partial t = d\psi/dt$. Sytuacja się nie zmienia przy przejściu do równania von Neumanna. Natomiast przy analizie relacji pomiędzy równaniem von Neumanna a równaniem Liouville'a interpretacja różniczkowania występującego w $\dot{\rho}$ staje się bardziej skomplikowana, gdyż w wypadku *klasycznego* równania Liouville'a istotne jest, iż $d\rho/dt \neq \partial\rho/\partial t$. W poniższych rozważaniach różniczkowanie oznaczane kropką rozumiane jest zawsze jako pochodna zupełna a zmienne inne niż t traktowane będą jako parametry. W nierelatywistycznej mechanice kwantowej rozróżnienie takie jest zupełnie naturalne, gdyż współrzędne tego samego wektora stanu $|\psi(t)\rangle$ mogą być parametryzowane, przykładowo, przez $\psi(\mathbf{x}, t) = \langle\mathbf{x}|\psi(t)\rangle$ (baza wektorów własnych operatora położenia) lub przez $\psi(n, t) = \langle n|\psi(t)\rangle$ (baza wektorów własnych hamiltonianu oscylatora harmonicznego).

²Przejście do kwantowej teorii pola polega, zasadniczo rzecz biorąc, na zastąpieniu owych klasycznych oscylatorów oscylatorami kwantowymi. Pole kwantowe jest układem wielu takich oscylatorów. Zauważmy, iż z tego punktu widzenia powyższe oscylatory traktowane są jako *istniejące obiekty fizyczne*. Ich status ontologiczny jest analogiczny do sieci krystalicznej, której drgania obserwujemy jako fonony, plazmy będącej nośnikiem plazmonów itd.

³Mamy tu do czynienia bardziej z patologią niż z normą. Typowe klasyczne oscylatory są harmoniczne tylko w przybliżeniu nieskończenie małych drgań. Dwa realnie istniejące oscylatory będą niezależne pod warunkiem, że pominiemy ich wzajemne oddziaływania. Fizycznie sensowne klasyczne teorie są stabilne, co znaczy, że ich przewidywania nie zależą w sposób zasadniczy od tego, czy powyższe efekty są *pomijalne*, czy też *w ogóle nie istnieją*. Dochodzimy tu do problemu nieliniowych uogólnień równania Schrödingera. Wśród współczesnych fizyków dominuje pogląd, iż liniowość jest w tym wypadku dokładna, por. S. Weinberg, *Dreams of a Final Theory* (Vintage Books, New York, 1993).

dochodzimy do

$$i\hbar\dot{\rho}_\psi = [H, \rho_\psi], \quad (8)$$

gdzie operator $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$ jest macierzą gęstości opisującą stan czysty. Warunek unormowania $|\psi\rangle$ prowadzi do

$$\text{Tr } \rho_\psi = 1, \quad (9)$$

$$\rho_\psi^2 = \rho_\psi \quad (10)$$

czyli ρ_ψ jest projektorem. Średnia dowolnej wielkości fizycznej, reprezentowanej przez operator A , może być policzona według wzoru

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}(\rho_\psi A). \quad (11)$$

Jednakże w realnych eksperymentach nie mamy do czynienia ze stanami czystymi, choćby dlatego, że *klasyczny* stan źródła cząstek (atomów, cząsteczek, itd.) nie jest dokładnie znany. Nie znamy przecież *dokładnie* temperatury panującej w laboratorium, czy położenia źródła. W praktyce wyniki eksperymentu są liczone według wzoru

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_{\text{exp}} &= \int d\rho_\psi w(\rho_\psi) \langle A \rangle_\psi \\ &= \text{Tr} \left(\int d\rho_\psi w(\rho_\psi) \rho_\psi A \right) \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie $w(\rho_\psi)$ jest rozkładem prawdopodobieństwa stanów czystych, a całkowanie oznacza uśrednianie po wszystkich klasycznych konfiguracjach źródła czyli, inaczej mówiąc, po warunkach początkowych dla dynamiki kwantowej⁴.

Jak widać, w sposób naturalny doszliśmy do pojęcia *stanu mieszanego*, czyli macierzy gęstości

$$\rho = \int d\rho_\psi w(\rho_\psi) \rho_\psi \quad (13)$$

spełniającej

$$\langle A \rangle_{\text{exp}} = \text{Tr}(\rho A). \quad (14)$$

Z *liniowości* równania (8) wnioskujemy, że macierz gęstości opisująca stan mieszany spełnia *liniowe* równanie von Neumanna

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho]. \quad (15)$$

Dodatkowym argumentem za liniowością równania opisującego dynamikę stanu mieszanego jest sama konstrukcja fizyczna prowadząca nas do pojęcia takiego stanu. Rzeczywiście, stan mieszany wprowadziliśmy jako *klasyczną* mieszaninę stanów kwantowych. Uśrednianie jest

⁴Nie chcę wnikać w subtelności matematyczne związane z całkowaniem po stanach czystych. W skończone wymiarowych problemach taka całka oznacza odpowiednią całkę po parametrach określających warunek początkowy. W podejściu Mielnika [7] zakłada się, iż istnieje miara probabilistyczna π zdefiniowana na borelowskich podzbiorach różności stanów kwantowych spełniająca, w naszej notacji, warunek $d\pi(\rho) = w(\rho)d\rho$. Próbę dynamicznego opisu takich miar probabilistycznych znaleźć można w A. Posiewnik, Int. J. Theor. Phys. **26**, 193 (1985); A. Posiewnik, *Struktura i język opisu eksperymentu fizycznego*, Uniwersytet Gdański (Gdańsk, 1992).

procedurą liniową a dynamika układu *kwantowego* nie powinna zależeć od sposobu *klasycznego* uśredniania. Wydaje się że nie ma żadnego fizycznego powodu dla wprowadzania tu jakiegokolwiek nieliniowego elementu.

Trzeci argument wygląda następująco. Standardowa procedura kwantowania polega na zastąpieniu funkcji $A = A(p, q)$ operatorami, a nawiasu Poissona $\{\cdot, \cdot\}$ komutatorem:

$$\{\cdot, \cdot\} \mapsto \frac{1}{i\hbar}[\cdot, \cdot]. \quad (16)$$

W klasycznej fizyce statystycznej rozkład prawdopodobieństwa stanów czystych $t \mapsto (p(t), q(t))$ dany jest przez funkcję $\rho = \rho(p(t), q(t), t)$ spełniającą równanie Liouville'a

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = \{H, \rho\} \quad (17)$$

gdzie $H = H(p, q)$ jest funkcją Hamiltona. Równanie (17) jest *zawsze liniowe* w ρ , nawet wtedy, gdy H generuje dynamikę nieliniową. Rzecz jasna, skwantowanie równania (17) daje *liniowe* równanie (15) (p. przypis 1).

W dalszej części tej pracy przyjrzymy się ponownie logicznej i fizycznej strukturze powyższych argumentów. Póki co, przejdźmy do *nieliniowych* aspektów zwykłej mechaniki kwantowej.

Jednym z często stosowanych chwytów rachunkowych jest możliwość liczenia zagadnień kwantowo mechanicznych w tzw. obrazach Schrödingera i Heisenberga. Technicznie rzecz ujmując możliwość ta związana jest z matematyczną strukturą wielkości obserwowalnych. Wszystkie one są średnimi postaci⁵

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_t &= \text{Tr}(\rho(t)A) = \text{Tr}(e^{-iHt/\hbar}\rho(0)e^{iHt/\hbar}A) \\ &= \text{Tr}(\rho(0)e^{iHt/\hbar}Ae^{-iHt/\hbar}) = \text{Tr}(\rho A(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

Wielkość nas interesującą, czyli $\langle A \rangle_t$, możemy otrzymać poprzez wyliczenie $\rho(t)$ lub $A(t)$ ⁶, co można uzyskać przez rozwiązanie równania Heisenberga

$$i\hbar\dot{A} = [A, H]. \quad (19)$$

Zauważmy, iż jest to skwantowana wersja równania

$$\dot{A} = \{A, H\}. \quad (20)$$

Rozpatrzmy teraz najprostszy hamiltonian opisujący anharmoniczne zaburzenie oscylatora, np.

$$\begin{aligned} H &= H(a, a^\dagger) = H(a(t), a(t)^\dagger) \\ &= \hbar\omega a^\dagger a + \hbar\epsilon((a^\dagger)^2 a + a^\dagger a^2) \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie $a = a(0)$ jest, w obrazie Heisenberga, operatorem anihilacji w chwili $t = 0$. $a(t)$ spełnia równanie Heisenberga

$$i\hbar\dot{a} = [a, H(a, a^\dagger)] = \hbar\omega a + \hbar\epsilon(2a^\dagger a + a^2), \quad (22)$$

⁵Dla uproszczenia pomijam sytuacje, gdy operator A zależy parametrycznie od czasu.

⁶Możliwości tej nie mielibyśmy, gdyby zależność średniej od ρ nie była *liniowa*. Istnienie i równoważność obu obrazów jest kolejną cechą wynikającą z liniowości mechaniki kwantowej.

które jest, oczywiście, *nieliniowe*. Nieliniowe równania w obrazie Heisenberga są typowe dla optyki kwantowej i kwantowej teorii pola. Właśnie dzięki ich nieliniowości istnieje możliwość kwantowego opisu elektrodynamiki nieliniowej.

Innym nieliniowym elementem pojawiającym się w mechanice kwantowej są tzw. granice termodynamiczne. Niech $\Psi_0^{(N)}(x, x_2, \dots, x_N, \alpha)$ będzie rozwiązaniem liniowego równania Schrödingera opisującego stan podstawowy układu N oddziałujących bozonów (α jest parametrem związanym z potencjałem oddziaływania). 1-cząstkowa gęstość prawdopodobieństwa spełnia

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^{3(N-1)}} |\Psi_0^{(N)}(x, x_2, \dots, x_N, \alpha/N)|^2 d^3x_2 \dots d^3x_N \\ & = |\Phi(x)|^2 \end{aligned} \quad (23)$$

gdzie $\Phi(x)$ jest rozwiązaniem nieliniowego równania typu Schrödingera (równanie Grossa-Pitajewskiego). Interesujące jest, jak to dopiero niedawno udowodniono [1], iż jest to wynik *dokładny*. Tak więc oddziaływania pewnego typu mogą generować dynamikę nieodróżnialną od dynamiki nieliniowej. Wrócimy jeszcze do tego zagadnienia, ale wpieryw przyjrzymy się dokładniej argumentom prowadzącym do liniowości równania von Neumanna.

3 Czy równanie von Neumanna rzeczywiście musi być liniowe?

Widzieliśmy, że równania Heisenberga bywają nieliniowe pomimo, iż związana z nimi dynamika w obrazie Schrödingera jest liniowa. Równanie von Neumanna jest bardzo podobne⁷

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, \rho], \quad (24)$$

lecz w poprzednim rozdziale przedstawiliśmy (standardowy) argument pokazujący iż liniowość równania Schrödingera zdaje się implikować liniowość równania (15).

Rozumowanie to zawierało pewien błąd logiczny [2]. Rzeczywiście, równanie (8) zostało co prawda wyprowadzone przy pomocy liniowego równania Schrödingera, ale macierz gęstości ρ_ψ z nim związana okazała się projektorem. Projektory mają wartości własne 0 oraz 1 więc, na mocy twierdzenia spektralnego, zachodzi $\rho_\psi = f(\rho_\psi)$ dla każdej funkcji spełniającej $f(0) = 0$ oraz $f(1) = 1$. Tak więc liniowe równanie Schrödingera zgodne jest z całą rodziną *nieliniowych* równań postaci

$$i\hbar\dot{\rho} = [H, f(\rho)]. \quad (25)$$

Logiczne przejście od (8) do (15) zawierało ukryte *założenie*, iż $f(x) = x$. Równanie (25) dla f rozwijalnych w szereg potęgowy jest postaci

$$i\hbar\dot{\rho} = [H(\rho), \rho]. \quad (26)$$

Żeby się o tym przekonać wystarczy zauważyć, że dla każdego naturalnego n

$$[H, \rho^n] = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \rho^{n-k-1} H \rho^k, \rho \right]. \quad (27)$$

⁷Jest to równanie Heisenberga, tyle że z czasem biegnącym „do tyłu”. Fakt, że nazywamy je równaniem von Neumanna związany jest z ograniczeniami narzuconymi na jego rozwiązanie ρ : powinno być ono hermitowskie, nieujemne i o jednostkowym śladzie, tzn. jego wartości własne powinny mieć interpretację jako prawdopodobieństwa. W klasycznej fizyce statystycznej różnica pomiędzy równaniem Liouville’a a równaniem $\dot{A} = \{A, H\}$ bierze się nie tyle z odwrócenia czasu, ile z innej interpretacji różniczkowania po czasie, p. przypis 1.

Pozostałe dwa argumenty za liniowością równania von Neumanna związane były z jego interpretacją jako kwantowej wersji równania Liouville'a. Dokładniejsza analiza tego problemu wymaga zrozumienia związków pomiędzy dynamiką macierzy gęstości a klasycznym formalizmem hamiltonowskim.

4 Równanie von Neumanna jako klasyczny układ hamiltonowski

Zacznijmy od ośrodkowej przestrzeni Hilberta, w której bazę stanowią wektory $|A\rangle$, $A \in \mathbf{N}$. Rozpatrzmy algebrę Liego \mathcal{G} utworzoną z operatorów $L_a = |A\rangle\langle A'|$ ⁸. Stałe strukturalne algebry zdefiniowane są wzorem

$$[L_a, L_b] = \Omega_{ab}^c L_c. \quad (28)$$

Macierz gęstości ρ działająca w tej przestrzeni Hilberta może być traktowana jako element \mathcal{G} , tj. $\rho = \rho^a L_a$. Naturalna metryka w \mathcal{G} związana jest z normą Hilberta-Schmidta: $\|A\|^2 = \text{Tr}(AA^\dagger)$. Zdefiniujmy tensor metryczny wzorem

$$g_{ab} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^a \partial \rho^b} \text{Tr}(\rho^2), \quad g_{ab} g^{bc} = \delta_a^c, \quad (29)$$

gdzie δ_a^c jest deltą Kroneckera. Tensory g_{ab} , g^{ab} mogą być wykorzystywane do „podnoszenia” i „opuszczania” indeksów w \mathcal{G} (czyli przechodzenia z \mathcal{G} do przestrzeni dualnej \mathcal{G}^* i odwrotnie). Dla $A, B \in \mathcal{G}$ zachodzą następujące wzory

$$A_a = \frac{\partial}{\partial \rho^a} \text{Tr}(\rho A) \quad (30)$$

$$\text{Tr}(AB) = g^{ab} A_a B_b = g_{ab} A^a B^b \quad (31)$$

$$(AB)_a = \frac{\partial}{\partial \rho^a} \text{Tr}(\rho AB) =: g_{abc} A^b B^c, \quad (32)$$

gdzie „potrójny tensor metryczny” g_{abc} związany jest ze stałymi strukturalnymi wzorem [3]

$$\Omega_{abc} = g_{abc} - g_{acb}. \quad (33)$$

Widzimy, iż równanie von Neumanna można teraz zapisać jako

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\rho}_d &= ([H, \rho])_d = g_{dbc} H^b \rho^c - g_{dbc} \rho^b H^c \\ &= \Omega_{dbc} H^b \rho^c = \rho_c \Omega_{ab}^c \frac{\partial \rho_d}{\partial \rho_a} \frac{\partial \text{Tr}(H\rho)}{\partial \rho_b} \\ &= \{\rho_d, \text{Tr}(H\rho)\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Nawias pojawiający się w (34) jest nawiasem Lie-Poissona [4]. Równanie von Neumanna jest zatem *klasycznym* równaniem poissonowskim. Rolę funkcji Hamiltona pełni średnia energia $\text{Tr}(H\rho)$. W wielu zastosowaniach wygodnie jest zastąpić bazę wektorów $|A\rangle$ bazą odpowiadającą widmu ciągłemu np. $|\mathbf{p}\rangle$ lub $|\mathbf{x}\rangle$. Powyższe wzory nie zmieniają kształtu, trzeba tylko wszędzie zamienić pochodne cząstkowe na funkcjonalne, deltę Kroneckera na deltę Diraca i odpowiednio dostosować konwencję sumacyjną. W takiej „funkcjonalnej” postaci struktura lie-poissonowska zbliżona jest do struktur hamiltonowskich pojawiających się w teorii plazmy lub klasycznej elektrodynamice.

⁸Stosujemy tu naturalną konwencję „ $AA' = a$ ”, analogiczną do spinorowej konwencji Penrose'a oraz konwencji sumacyjną.

5 Równanie von Neumanna czy Liouville-von Neumanna?

Sposób w jaki wprowadziliśmy stany mieszane w części drugiej można traktować jako *klasyczną* mechanikę statystyczną na rozmaitości stanów czystych opisywanych równaniem lie-poissonowskim (34). Dokładniej, procedura była następująca. Wystartowaliśmy od równania von Neumanna (odtąd, dla uproszczenia, przyjmuję $\hbar = 1$)

$$i\dot{\rho}_a = \{\rho_a, \langle H \rangle\}. \quad (35)$$

Współrzędne ρ_a można traktować jako współrzędne na rozmaitości stanów kwantowych. Żeby rozważać klasyczną fizykę statystyczną na tejże rozmaitości definiujemy rozkład prawdopodobieństwa $w(\rho, t)$ ⁹ Zakładając, jak zwykle, iż w jest różniczkowalną funkcją ρ_a oraz biorąc pod uwagę równanie ruchu (35), dochodzimy do równania Liouville'a

$$i\frac{\partial}{\partial t}w = \{\langle H \rangle, w\}. \quad (36)$$

Powtórzmy: Wyprowadziliśmy równanie Liouville'a jako konsekwencję równania von Neumanna dokładnie tak samo, jak standardowo wyprowadza się równanie Liouville'a z równań Hamiltona w klasycznej fizyce statystycznej. Równanie to opisuje dynamikę rozkładu prawdopodobieństwa kwantowych stanów czystych i jest liniowe w w . Jest sprawą oczywistą, że liniowość (36) w w jest całkowicie *niezależna* od liniowości równania von Neumanna i wynika wyłącznie z faktu, iż to ostatnie jest równaniem hamiltonowskim.

Zastanówmy się więc, czy sytuacja uległaby zmianie, gdyby za punkt wyjścia wziąć *kwantową* dynamikę daną równaniem (25). Okazuje się, że nic się nie zmienia! Wynika to z faktu, iż równanie (25) jest także równaniem lie-poissonowskim, z tym samym nawiasem Lie-Poissona i z funkcją Hamiltona $\langle H \rangle_f = \text{Tr}(f(\rho)H)$ [2]. Można zatem rozważać *nie liniową* dynamikę stanów daną uogólnionym równaniem von Neumanna (25), lecz stany mieszane, zdefiniowane jako rozkłady prawdopodobieństwa na rozmaitości stanów kwantowych, spełniać będą równanie Liouville'a, *liniowe* w w .

Równanie von Neumanna ma, z formalnego punktu widzenia, kształt analogiczny do równania Liouville'a, ale jest to tylko analogia. Z fizycznego punktu widzenia są to różne równania. Często stosowana nazwę „równanie Liouville-von Neumanna” należy uznać za mylącą¹⁰. Kryje się za nią mniej lub bardziej jawne założenie, iż każda macierz gęstości spełniająca $\rho^2 \neq \rho$ jest *klasyczną* mieszaniną kwantowych stanów czystych. W niektórych podejściach sformułowanie to podnoszone jest niemalże do rangi aksjomatu.

Wiadomo jednak, iż istnieje klasa stanów *kwantowych* spełniających $\rho^2 \neq \rho$ i nie mających nic wspólnego z połączonymi macierzami gęstości. Są to stany układów skorelowanych z innymi układami kwantowymi. Każde oddziaływanie pomiędzy układami kwantowymi prowadzi do powstania takich stanów. Jedynymi układami kwantowymi, których stany opisywane są przez projektorowe macierze gęstości, są układy całkowicie izolowane oraz (być może) Wszechświat jako całość. Z samej definicji są to więc układy nieobserwowalne.

W tym kontekście dobrym przykładem może być układ bozonów wspomniany w części drugiej. Istnienie oddziaływań powoduje, iż N -cząstkowe rozwiązanie $\Psi_0^{(N)}$ równania

⁹Przy analizie stanów mieszanych rozumianych jako klasyczne zmienne losowe określone na zbiorze stanów czystych interpretowaliśmy $w(\rho_\psi)$ jako rozkład prawdopodobieństwa warunków początkowych dla dynamiki kwantowej. W realnych eksperymentach takie rozkłady są zależne od czasu. Nasze równanie Liouville'a jest konsekwencją dynamiki hamiltonowskiej (równanie von Neumanna) i założenia, iż pochodna zupełna $\dot{w} = 0$.

¹⁰Krytyka ta odnosi się również do autora niniejszego opracowania, który w swych publikacjach wielokrotnie stosował termin „równanie Liouville-von Neumanna”.

Schrödingera opisuje nietrywialne korelacje pomiędzy cząstkami. Stan *jednego* takiego bozonu opisywany jest zredukowaną macierzą gęstości spełniającą warunek $\rho^2 \neq \rho$. Jak już wspominaliśmy, w granicy $N \rightarrow \infty$ gęstość prawdopodobieństwa $\langle x|\rho|x\rangle$ jest *identyczna* z rozkładem prawdopodobieństwa wynikającym z równania Grossa-Pitajewskiego. W otoczeniu stanu podstawowego zredukowana macierz gęstości będzie zależna od czasu i spełnia jakies równanie von Neumanna. Chociaż nie dysponujemy tutaj dokładnym analitycznym wynikiem, wydaje się oczywiste, iż musi to być równanie nieliniowe.

6 Wypukłość figury stanów

Powyższy podział stanów mieszanych (tj. spełniających $\rho^2 \neq \rho$) na stany „w pełni kwantowe” oraz „półklasyczne mieszaniny” prowadzi nie tylko do rozróżnienia pomiędzy równaniem von Neumanna a równaniem Liouville’a, ale również do nowego spojrzenia na status koncepcji *wypukłej figury stanów* [5, 6, 7]. Zacytujmy Mielnika: „Mając mieszany ansambl obiektów nieklasycznych, nie można wskazać jednoznacznie jego czystych składowych i jednoznacznie określić sposobu przygotowania mieszaniny. Dwie mieszaniny przygotowane na dwa różne sposoby poprzez wzięcie dwóch różnych zbiorów stanów czystych mogą być nieodróżnialne. Stwierdzenie to jest jednym z najbardziej negatywnych praw ograniczających percepcję kwantowych ансамbli: Można by je nazwać *pierwszą zasadą niemożności* teorii kwantowej i uważać za główny przejaw nieklasycznej natury mikroobektów. Powyższe prawo nie stosuje się wyłącznie do teorii ortodoksyjnej, lecz można je wyprowadzić z geometrii dowolnej figury statystycznej nie będącej sympleksem” [7].

Zbiór rozwiązań uogólnionego równania von Neumanna nie jest wypukły, gdyż wypukła kombinacja rozwiązań równania nieliniowego nie jest (poza sytuacjami szczególnymi) jego rozwiązaniem. Nie będąc zbiorem wypukłym, nie jest też sympleksem.

Mając dane rozwiązanie $\rho = \rho(t)$ nie jesteśmy w stanie rozłożyć go na stany czyste, jeżeli poprzec stany czyste rozumiemy rozwiązania będące projektorami. W konstrukcji Mielnika stany mieszane są dokładnie tym, co powyżej nazwaliśmy *półklasycznymi stanami mieszanymi*, czyli są to rozkłady prawdopodobieństwa określone na zbiorach „czystych stanów kwantowych”. W naszym lie-poissonowskim sformułowaniu nie widać żadnego powodu dla ograniczania „czystych stanów kwantowych” do projektorów.

Natrafiliśmy więc na trudność natury terminologicznej. Być może rozsądnym byłoby mówienie o dwóch rodzajach stanów czystych, a nie o stanach czystych i „kwantowych stanach mieszanych”, przeciwstawianych mieszanym stanom półklasycznym.

Traktując *wszystkie* rozwiązania spełniające $\rho = \rho^\dagger$, $\rho \geq 0$, $\text{Tr } \rho = 1$, nieliniowych równań von Neumanna jako stany czyste tworzące brzeg abstrakcyjnej wypukłej figury stanów możemy utrzymać konstrukcję Mielnika i sformalizować ideę rozróżnienia pomiędzy równaniami Liouville’a i von Neumanna ¹¹.

Można sobie na koniec zadać pytanie, jak to możliwe (fizycznie), że kombinacja wypukła $\rho = p_1\rho_1 + p_2\rho_2$ dwóch rozwiązań danego równania von Neumanna sama rozwiązaniem tego równania może nie być. Jeżeli tak jest, to „obecność” mieszaniny ρ_2 zmienia dynamikę mieszaniny ρ_1 (i odwrotnie), co może mieć miejsce jedynie wtedy, gdy obie mieszaniny w jakiś sposób na siebie oddziałują. Jest to sytuacja jak najbardziej możliwa, można się jedynie zastanawiać czy oddziaływanie takie jest *sensu stricto* nieliniowe, czy też nieliniowość

¹¹Co ciekawe, na podobny problem natrafiono przy próbach logicznej aksjomatyzacji mechaniki kwantowej. W swej pracy doktorskiej [8] Aerts zwrócił uwagę na podstawową niemożność połączenia struktury iloczynu tensorowego z tzw. aksjomatem ortouzupelnienia, prawem nakrywającym i aksjomatem atomowości. Trudność polega na kwantowo-logicznym odróżnieniu pomiędzy stanem $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ opisującym układ złożony „1+2”, a zredukowaną macierzą gęstości $\rho_1 = \text{Tr}_2|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Rozwiązaniem zaproponowanym niedawno [9] jest osłabienie aksjomatycznej definicji stanu czystego w sposób dopuszczający dołączenie zredukowanych macierzy gęstości do zbioru stanów czystych.

pojawia się „efektywnie”, w wyniku przybliżeń. Problem ten, sam w sobie bardzo interesujący, jest w gruncie rzeczy nieistotny z punktu widzenia analiz prezentowanych w niniejszym opracowaniu.

7 Dynamika stanów czystych

W konstrukcji Mielnika dynamika stanów generowana jest przez dynamikę stanów czystych, czyli przez dynamikę określoną na brzegu figury stanów. Standardowym punktem wyjścia jest więc tutaj nieliniowe równanie Schrödingera określające dynamikę *wektora stanu* i stąd, poprzez przyporządkowanie $|\Psi\rangle \rightarrow |\Psi\rangle\langle\Psi|$, lub jakieś jego uogólnienie (por. np. [7]), przechodzimy do dynamiki stanów „mieszanych”. Podejście, które proponujemy w niniejszym omówieniu, jest inne, gdyż wychodzimy od dynamiki stanu „czystego” ρ .

Za ujęciem takim kryje się pewna dodatkowa motywacja. Rozpatrzmy bowiem jakiegokolwiek nieliniowe równanie Schrödingera, np.

$$i\dot{\psi}(x) = (H_1\psi)(x) + F(|\psi(x)|^2)\psi(x) \quad (37)$$

gdzie H_1 jest liniowym hamiltonianem, a F funkcją. Równanie to ma sens o tyle, o ile sensowne jest opisywanie rozpatrywanego układu przy pomocy funkcji falowej $\psi(x)$.

Zakładając, że chcemy wprowadzić oddziaływanie dwóch obiektów opisywanych (każdy z osobna) takim równaniem nieliniowym, natrafiamy na trudność natury zupełnie zasadniczej: Na skutek oddziaływań funkcja falowa układu złożonego $\Psi(x, y)$ nie jest postaci $\psi_1(x)\psi_2(y)$, a więc żaden z układów, sam w sobie, nie jest opisywany funkcją falową. „Naturalnym” rozwiązaniem wydaje się wprowadzenie równania 2-cząstkowego

$$i\dot{\Psi}(x, y) = (H_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes H_2)\Psi(x, y) + F(|\Psi(x, y)|^2)\Psi(x, y). \quad (38)$$

Równanie takie jest lokalne (jako równanie różniczkowe). Okazuje się jednak, iż nawet dla układów nieoddziałujących i nawet dla funkcji spełniających $F(fg) = F(f) + F(g)$ warunek $\Psi(x, y) \neq \psi_1(x)\psi_2(y)$ wystarcza, żeby zredukowana macierz gęstości jednego układu zależała od hamiltonianu drugiego układu. Tak więc pomimo formalnej lokalności zachodzącej na poziomie przestrzeni konfiguracyjnej, pojawia się fizyczna nielokalność na poziomie przestrzeni fizycznej.

Rozwiązaniem problemu jest inne równanie 2-cząstkowe:

$$i\dot{\Psi}(x, y) = (H_1 \otimes \mathbf{1})\Psi(x, y) + F(\rho_1(x, x))\Psi(x, y) + (\mathbf{1} \otimes H_2)\Psi(x, y) + F(\rho_2(y, y))\Psi(x, y) \quad (39)$$

gdzie ρ_k są zredukowanymi macierzami gęstości. Lokalność fizyczną można w tym wypadku udowodnić rozpatrując dynamiki zredukowanych macierzy gęstości¹².

To jednak nie koniec kłopotów. Przejście od (37) do (39) nie jest jednoznaczne. Można wymyślać różne nieliniowości zależne od zredukowanych macierzy gęstości, które zredukują się do (37) dla stanów produktowych (czyli zredukowanych macierzy gęstości spełniających $\rho_k^2 = \rho_k$). Jedyłą szansą na uzyskanie formalizmu jednoznacznego jest odwrócenie rozumowania i przyjęcie za punkt wyjścia równań von Neumanna.

¹²Zwrócił na to uwagę jako pierwszy Polchinski w [23], potem ideę rozwinął trochę Jordan w języku lie-poissonowskim [24]. Za najogólniejsze sformułowanie problemu można chyba uznać podejście od strony 3-nawiasu [10, 26]. Socjologa nauki powinien zainteresować fenomen cytowań pracy Polchinskiego. Niemalże bez wyjątku artykuł ten cytowany jest jako jedna z dwóch prac pokazujących *konieczność* pojawienia się efektów nielokalnych w konsekwencji dynamiki nieliniowej. W rzeczywistości teza pracy była dokładnie przeciwna. Pomimo, iż praca Polchinskiego jest bardzo prosta i bardzo poprawna, znakomita większość fizyków zajmujących się podstawami nieliniowej mechaniki kwantowej nie przyjmuje do wiadomości jej zasadniczych tez.

Tak więc, chcąc nie chcąc, musimy rozpatrywać dynamikę daną równaniami von Neumanna, nawet jeżeli interesują nas jedynie stany czyste. Wygląda na to, że poszukując fundamentalnych nieliniowych uogólnień mechaniki kwantowej musimy skoncentrować się na uogólnianiu równań von Neumanna, a nie na równaniach typu Schrödingera.

Dokładniejszą analizę problemu rozszerzeń dynamik na układy wielu cząstek przedstawiamy w rozdziałach XVI i XVII.

8 Problem 1: Dokładne rozwiązania nieliniowych równań von Neumanna-Heisenberga

Jak widać, nieliniowe równania ogólnej postaci

$$i\dot{X} = [H(X), X] \quad (40)$$

pojawiają się w wielu zagadnieniach kwantowo mechanicznych. Zasadnicza trudność polega jednak na tym, że nie są znane ogólne techniki ich rozwiązywania. Sytuacja jest gorsza niż w klasycznej teorii równań różniczkowych, gdyż nieliniowości pojawiające się w (40) są „nieabelowe”. Nawet dla tak prostych nieliniowości jak wielomian pojawiający się w równaniu (22) metody znane z teorii „abelowych” równań różniczkowych w ogólności nie dadzą się zastosować. Nie znamy bowiem nieabelowych odpowiedników twierdzeń o całkowaniu przez rozkład na ułamki proste, tak jak nie wiemy, co znaczy „sprowadzenie do wspólnego mianownika” dwóch operatorów.

W najprostszych przykładach, gdy X są skończone wymiarowymi macierzami, równania redukują się do układów równań nieliniowych. Jest jednak rzeczą typową, że mamy tu do czynienia z operatorami X działającymi w nieskończone wymiarowych przestrzeniach Hilberta, jak to widzieliśmy na przykładzie oscylatora anharmonicznego. W tej sytuacji standardowe metody oparte na redukowaniu (40) do układu równań nie dają praktycznie żadnych szans na znalezienie rozwiązań, lub choćby udowodnienie ich istnienia, czy wreszcie określenie podstawowych własności rozwiązań przy założeniu, że istnieją.

Metoda binarnej transformacji Darboux, opisana w dalszej części niniejszej pracy, jest przykładem nowego typu analitycznej techniki całkowania nieliniowości nieabelowych.

Równanie (40) posiada jeszcze jedną interesującą własność pokazującą jak subtelne mogą być linie podziału pomiędzy tym co liniowe w mechanice kwantowej, a tym co nieliniowe.

Otóż założmy, że udało nam się znaleźć jakieś jawne rozwiązanie nieliniowego równania (40), $X = X(t)$. Podstawiając to rozwiązanie do nieliniowego hamiltonianu $H(X)$ uzyskujemy pewien nowy operator $H_1(t) = H(X(t))$. Nasze rozwiązanie $X(t)$ jest zatem równocześnie szczególnym rozwiązaniem *liniowego* równania

$$i\dot{Y} = [H_1(t), Y], \quad (41)$$

z hamiltonianem *zależnym od czasu*. Obserwacja ta jest być może dość banalna, ale zobaczymy później, iż można w ten sposób generować dokładnie rozwiązalne równania (41) z fizycznie sensownymi i nietrywialnymi hamiltonianami zależnymi od czasu. W wypadku równań von Neumanna i Heisenberga z hamiltonianami zależnymi od czasu zasadnicza trudność jest tej samej natury, co w przypadku nieliniowym: Jest nią nieprzemienność operatorów $H_1(t_1)$ i $H_1(t_2)$ wziętych w różnych chwilach czasu t_1, t_2 i związana z nią niemożność dokładnego przeniesienia na grunt nieabelowy wzorów znanych ze zwykłej analizy. Typową procedurą jest w tym wypadku rozwijanie rozwiązań w szereg Dysona, o którym skądinąd wiadomo, iż w wielu interesujących przypadkach nie jest zbieżny. Procedura oparta o binarną transformację Darboux prowadzi do dokładnych rozwiązań bez konieczności odwoływania się do metod perturbacyjnych.

9 Problem 2: Jakie uogólnienia równania von Neumanna są dopuszczalne?

Z pewnością nie wszystkie nieliniowe uogólnienia liniowego równania von Neumanna są fizycznie sensowne. Nie wszystkie takie równania będą prowadziły do normowalnych i nieujemnych rozwiązań ρ . Po drugie, istotne jest aby można było rozpatrywać w sposób wewnętrznie spójny układy nieoddziałujące. Chodzi o to, że w każdym realnym problemie mamy do czynienia z podukładem układu większego. Jeżeli podukład ów nie oddziałuje z otoczeniem, to jego opis przy pomocy nieliniowego równania von Neumanna powinien być niezależny od tego, czy zajmujemy się nim tak jakby otoczenie nie istniało, czy też z uwzględnieniem otoczenia. Może się zdarzyć, że taki opis jest niemożliwy.

Problem związany jest ściśle z wymogiem *kompletnej* dodatniości dynamiki nieliniowej. Zagadnieniu temu poświęcimy osobny rozdział. Analizę nieliniowego odpowiednika dynamik kompletnie dodatnich trzeba przeprowadzić w trzech krokach. Po pierwsze należy określić klasę nieliniowych dynamik zachowujących dodatniość. Po drugie, należy sprecyzować procedurę rozszerzania dynamiki z podukładu na układy go zawierające. Po trzecie wreszcie, należy zrozumieć relację tak zdefiniowanych dynamik do tzw. nieliniowych odwzorowań kompletnie dodatnich rozpatrywanych w literaturze matematycznej.

10 Kwestia dodatniości rozwiązań uogólnionych równań von Neumanna

Załóżmy, iż $X(t) = X(t)^\dagger$, $\text{Tr } X(t) < \infty$, jest rozwiązaniem jakiegoś nieliniowego równania operatorowego. Z faktu, iż ślad $X(t)$ jest skończony wynika, iż widmo $X(t)$ jest dyskretne. Żeby $X(t)$ było macierzą gęstości powinno zachodzić $\text{Tr } X(t) = 1$ (czyli ślad musi być całką ruchu) oraz widmo $X(t)$ musi być nieujemne dla każdej chwili t .

Dopuszczalna jest sytuacja, gdy widmo jest zależne od czasu, byle tylko te dwa powyższe warunki były spełnione. W dalszej części artykułu poznamy przykład dynamiki macierzy gęstości z widmem zależnym od czasu. Przy obecnym stanie wiedzy brak jest kryteriów analitycznych pozwalających jednoznacznie ocenić na podstawie samego typu równania kiedy w takiej sytuacji widmo pozostaje dodatnie. Można sobie wyobrazić sytuację, gdy rozwiązanie jest dodatnie tylko w skończonym odcinku czasu.

Dużo „bezpieczniejsza” jest sytuacja, gdy wiemy, iż wartości własne $X(t)$ są niezależne od czasu. Wtedy wystarczy zagwarantować, iż $X(0)$ jest macierzą gęstości.

Uogólnione równania von Neumanna przedstawione w następnym rozdziale formułowane są w ramach formalizmu lie-poissonowskiego oraz jego uogólnienia na dynamiki typu Nambu z nawiasem wielokrotnym. Podejście takie w sposób naturalny pozwala kontrolować niezmienniki, choć niekoniecznie symetrie. W szczególności, można zagwarantować, że wszystkie wyrażenia $C_n(X) = \text{Tr}(X^n)$, $n \in \mathbf{N}$, są funkcjami Casimira i jako takie są niezależne od czasu. Jest rzeczą znaną [12], że w przypadku skończonego zbioru niezerowych wartości własnych $X(t)$ niezależność od czasu $C_n(X)$ implikuje niezależność od czasu wartości własnych $X(t)$. Okazuje się, że wynik ten łatwo można uogólnić na przypadek nieskończonego zbioru wartości własnych, o ile $X(0)$ jest macierzą gęstości [13].

Inną klasą równań, których rozwiązania mają dobrze określoną interpretację jako macierze gęstości, są nieliniowe równania całkowne przy pomocy binarnej transformacji Darboux.

11 Uogólnione równania von Neumanna w formalizmie typu Nambu

11.1 3-nawias

W części czwartej zapisałiśmy równanie von Neumanna w wersji lie-poissonowskiej

$$i\dot{\rho}_d = \Omega_{abc} \frac{\partial \rho_d}{\partial \rho_a} \frac{\partial h}{\partial \rho_b} \rho^c \quad (42)$$

gdzie $h = \text{Tr}(\rho H)$. Przepisując to równanie jako

$$i\dot{\rho}_d = \Omega_{abc} \frac{\partial \rho_d}{\partial \rho_a} \frac{\partial h}{\partial \rho_b} \frac{\partial S}{\partial \rho_c} = \{\rho_d, h, S\} \quad (43)$$

gdzie $S = \frac{1}{2}\rho_a \rho^a = \frac{1}{2}g^{ab}\rho_a \rho_b = \frac{1}{2}\text{Tr}(\rho^2) = \frac{1}{2}C_2(\rho)$, dochodzimy w sposób naturalny do pojęcia 3-nawiasu „Lie-Nambu”¹³ [10] zdefiniowanego wzorem

$$\{A, B, C\} = \Omega_{abc} \frac{\partial A}{\partial \rho_a} \frac{\partial B}{\partial \rho_b} \frac{\partial C}{\partial \rho_c}. \quad (44)$$

3-nawias jest całkowicie antysymetryczny i spełnia tożsamość [10]

$$\{C_m, C_n, \cdot\} = 0, \quad (45)$$

gdzie $C_k = \text{Tr}(\rho^k)$. Rozpatrzmy teraz funkcje $g(x)$, o której zakładamy jedynie iż jest rozwijalna w szereg potęgowy oraz, że dla dowolnej macierzy gęstości ρ operatory $g(\rho)$, $f(\rho) = g'(\rho)$, gdzie $g'(x) = dg/dx$, są dobrze zdefiniowane.

Tożsamość (45) implikuje, iż dla dowolnej dynamiki danej równaniem

$$i\dot{\rho}_d = \{\rho_d, h, \text{Tr} g(\rho)\} \quad (46)$$

zachodzi $\dot{C}_k = 0$, dla każdego naturalnego k i dla dowolnego h , a co za tym idzie rozwiązanie $\rho(t)$ będące macierzą gęstości w chwili $t = 0$ posiada widmo niezależne od czasu. Dla $h = \text{Tr}(\rho H)$ równanie (46) zapisane w zwykłej notacji operatorowej jest nieliniowym równaniem von Neumanna

$$i\dot{\rho} = [H, f(\rho)] \quad (47)$$

na które trafiliśmy już wcześniej przy analizie równań zgodnych z liniowym równaniem Schrödingera.

Za równaniem (47) kryje się kilka różnych struktur hamiltonowskich. Po pierwsze, jak już wspomnieliśmy wcześniej, jest to zwykłe równanie lie-poissonowskie z funkcją Hamiltona $h_f = \text{Tr}(f(\rho)H)$. Bierze się to z tożsamości [11]

$$\{\cdot, \text{Tr}(\rho H), \text{Tr} g(\rho)\} = \{\cdot, \text{Tr}(g'(\rho)H), \frac{1}{2}\text{Tr}(\rho^2)\}. \quad (48)$$

¹³Zapis równania von Neumanna przy pomocy nawiasu potrójnego wprowadzony został przez Białynickiego-Birulę i Morrisona [14] w kontekście zwykłej liniowej mechaniki kwantowej i bez żadnych odniesień do możliwości nieliniowych uogólnień. Praca ta odegrała jednak podobną rolę dla rozwoju badań nad nieliniowymi równaniami von Neumanna jak praca Nambu [15] dla teorii uogólnionych układów hamiltonowskich. Zwróciła ona bowiem uwagę na możliwość uogólnień kwantowej dynamiki bez zmieniania struktury algebry obserwabli, co z kolei naprowadziło na trop równań z $f(\rho)$.

Tak więc funkcją Hamiltona dla (47) jest nie tyle „liniowo uśredniona energia”, ile raczej „ f -uśredniona energia”. Patrząc na problem inaczej, możemy powiedzieć, iż z rozwiązaniem ρ związane są dwie macierze gęstości: ρ oraz $\tilde{\rho} = f(\rho)/\text{Tr} f(\rho)$. Bardzo podobna sytuacja występuje w termodynamice nieekstensywnej¹⁴, jeżeli przyjąć $f(\rho) = \rho^q$, $q > 0$.

Drugą strukturę hamiltonowską uzyskujemy definiując, dla $\text{Tr}(\rho H)$, nawias

$$(F, G)_H = \{F, h, G\}. \quad (49)$$

Jego antysymetria wynika z całkowitej antysymetrii 3-nawiasu, natomiast tożsamość Jakobiego implikowana jest przez liniowość h . Rolę funkcji Hamiltona pełni $S = \text{Tr} g(\rho)$. Dokładniejszą analizę tego problemu można znaleźć w [3, 2].

Jak widać, wybór *liniowej* funkcji h jest dość naturalny, nawet jeżeli chcemy aby dynamika była nieliniowa. Istnieje oczywiście możliwość wybrania ogólnego nieliniowego $h \neq \text{Tr}(f(\rho)H)$ przy standardowym $S = C_2/2$, lub uogólniania zarówno h jak i S . Ta pierwsza możliwość rozpatrywana była przez Bónę [22] i Jordana [24] w kontekście nieliniowej mechaniki kwantowej Weinberga [25]. Równanie von Neumanna przyjmuje wówczas postać

$$i\dot{\rho} = [H(\rho), \rho] \quad (50)$$

gdzie $H(\rho) = \frac{\partial h}{\partial \rho}$. Tak ogólny nieliniowy operator $H(\rho)$ jest jednak trudny do zinterpretowania w kategoriach fizycznych¹⁵. Najogólniejszy przypadek (nieliniowe h i $S \neq C_2/2$) nie był dokładnie badany.

11.2 $(2n + 1)$ -nawias

3-nawias bywa nazywany nawiasem Lie-Nambu ze względu na obecność *stałych strukturalnych* algebry Lie. Uogólnienie mechaniki klasycznej zaproponowane przez Nambu [15] oparte było na zastąpieniu całkowicie antysymetrycznego symbolu ϵ_{abc} , pojawiającego się w nawiasie Lie-Poissona bryły sztywnej, symbolem n -wymiarowym $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ i odpowiednim uogólnieniem 3-nawiasu na n -nawias. Symbol ϵ_{abc} z jednej strony związany jest z objętością (poprzez wyznacznik macierzy 3×3), z drugiej zaś z obrotami (poprzez stałe strukturalne algebry obrotów). Według Nambu, nawias Poissona dla równań Eulera, z geometrycznego punktu widzenia, związany jest raczej z objętością niż z obrotami, a parametr n opisuje wymiar przestrzeni stanów. Myśląc o 3-nawiasie dla równania von Neumanna widzimy jednak, że Ω_{abc} nie ma wyraźnego związku z objętością, co ma nawet pewien sens, gdyż w typowej sytuacji wymiar przestrzeni stanów jest nieskończony. Na pierwszy rzut oka jest więc rzeczą zupełnie nieoczywistą, czy istnieje jakieś naturalne uogólnienie równania von Neumanna przy pomocy n -nawiasu z $n > 3$, do tego zgodne z liniowym równaniem Schrödingera i mające rozwiązania o widmie niezależnym od czasu.

Przyjrzyjmy się więc jeszcze raz tensorowi metrycznemu g_{ab} oraz stałym strukturalnym Ω_{abc} . Tensor metryczny definiowany był jako (1/2 razy) druga pochodna (funkcjonalna lub cząstkowa) kwadratu normy Hilberta-Schmidta macierzy gęstości. Macierz gęstości działa

¹⁴Termodynamice nieekstensywnej poświęcony jest specjany numer Brazilian Journal of Physics **29**, No. 1 (1999). Pełną bibliografię zagadnienia można znaleźć pod adresem <http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm>.

¹⁵Chodzi o wartości własne $\partial h/\partial \rho$. W q -termodynamice „średniej” $h = \text{Tr} \rho^q H$ odpowiada pewien $\partial h/\partial \rho$, ale *fizyczne* widmo energii stanowią wartości własne H a nie „efektywnego” hamiltonianu $\partial h/\partial \rho$, które same w sobie też nie są fizycznie dobrze określone, por. M. Czachor, Phys. Rev. A, **53**, 1310 (1996). Dla ogólnego wyboru h może nie istnieć żaden jednoznacznie zdefiniowany H . Równania z 3-nawiasem i liniowym h definiują H jednoznacznie, co pozwala wprowadzać uogólnione funkcje Hamiltona przy niezmiennym pojęciu widma energii. Taka interpretacja wprowadzona została w [10] ze względów czysto formalnych. Statystyki nieekstensywne dostarczają tutaj całej gamy różnych argumentów fenomenologicznych.

w przestrzeni Hilberta, w której też jest określona jakaś norma. „Tensor metryczny” z nią związaną można określić jako

$$\omega^{AA'} = \frac{\partial^2}{\partial\psi_A \partial\bar{\psi}_{A'}} \langle \psi | \psi \rangle \quad (51)$$

gdzie, analogicznie jak w części IV, definiujemy współrzędne wektora stanu poprzez $|\psi\rangle = \psi_A |A\rangle$, $\langle\psi| = \bar{\psi}_{A'} \langle A'|$ ¹⁶. Tensor odwrotny $I_{AA'}$ definiujemy poprzez rozkłady jedności ¹⁷

$$I_{AC'} \omega^{BC'} = \delta_A^B \quad (55)$$

$$I_{CA'} \omega^{CB'} = \delta_{A'}^{B'}. \quad (56)$$

Definiujemy następujące dwa tensory

$$g^{a_1 \dots a_n} = \omega^{A_1 A'_n} \omega^{A_2 A'_1} \omega^{A_3 A'_2} \dots \omega^{A_{n-1} A'_{n-2}} \omega^{A_n A'_{n-1}} \quad (57)$$

$$G_{a_1 \dots a_n} = I_{A_1 A'_n} I_{A_2 A'_1} I_{A_3 A'_2} \dots I_{A_{n-1} A'_{n-2}} I_{A_n A'_{n-1}}. \quad (58)$$

Tensor metryczny g^{ab} jest szczególnym przypadkiem (57) dla $n = 2$. Zachodzi również $g_{ab} = G_{ab}$. Natomiast (sic!) używając g_{ab} do obniżenia indeksów w (57) znajdujemy

$$g_{a_1 a_2 \dots a_n} = G_{a_n \dots a_2 a_1}. \quad (59)$$

Dlatego też jeżeli piszemy, przykładowo, g_{abc} oznacza to „obniżoną” wersję g^{abc} , czyli G_{cba} . Niech teraz nawiasy prostokątne obejmujące zbiór indeksów oznaczają antysymetryzację. Zachodzą wzory

$$C_n = g^{a_1 \dots a_n} \rho_{a_1} \dots \rho_{a_n} \quad (60)$$

$$\Omega_{abc} = 2! g_{[abc]} \quad (61)$$

$$\Omega^{abc} = 2! g^{[abc]} \quad (62)$$

¹⁶Stosujemy konwencję sumacyjną. W bazie odpowiadającej współrzędnym ciągłym, np. pędowi, pochodne cząstkowe zastępujemy funkcjonalnymi i sumy całkami. $\omega^{AA'}$ jest w ogólności dystrybucją określającą jądro całkowe definiujące iloczyn skalarny. Nie zawsze jest to więc delta Diraca bądź Kroneckera.

¹⁷Oznaczenie obu tensorów przez ω oraz I może się wydawać dziwaczne. Uzasadnienie jest następujące. Równanie Schrödingera można zapisać jako *klasyczne* równania Hamiltona w postaci

$$i\omega^{AA'} \dot{\psi}_A = \frac{\partial h}{\partial \bar{\psi}_{A'}} \quad (52)$$

$$-i\omega^{AA'} \dot{\bar{\psi}}_{A'} = \frac{\partial h}{\partial \psi_A}. \quad (53)$$

Dla rzeczywistej funkcji Hamiltona h oba równania przechodzą w siebie wzajemnie przy sprzężeniu zespolonym i można je traktować jako zespolony zapis równań Hamiltona gdzie części rzeczywiste i urojone ψ_A są odpowiednikami kanonicznych pędów i współrzędnych. Nawiasem Poissona jest

$$\{F, G\} = I_{AA'} \frac{\partial F}{\partial \psi_A} \frac{\partial G}{\partial \bar{\psi}_{A'}} - (F \leftrightarrow G). \quad (54)$$

Oznacza to, że $\omega^{AA'}$ jest zespoloną postacią współrzędnych formy symplektycznej a $I_{AA'}$ odpowiada tensorowi poissonowskiemu, co jest zgodne ze zwyczajową notacją. Próby uczynienia notacji bardziej elegancką, np. poprzez oznaczenie $g^{AA'}$ i $g_{AA'}$, okazały się nieudane i miejscami mylące.

sugerujące następujące definicje:

$$\Omega_{a_1 \dots a_n} = (n-1)! g_{[a_1 \dots a_n]} \quad (63)$$

$$\Omega^{a_1 \dots a_n} = (n-1)! g^{[a_1 \dots a_n]} \quad (64)$$

$$\{F_1, \dots, F_n\} = \Omega_{a_1 \dots a_n} \frac{\partial F_1}{\partial \rho_{a_1}} \dots \frac{\partial F_n}{\partial \rho_{a_n}}. \quad (65)$$

Tak zdefiniowany nawias jest całkowicie antysymetryczny i znika tożsamościowo dla parzystego n . Dla nieparzystych n nawias jest nietrywialnym uogólnieniem 3-nawiasu.

Twierdzenie 1: Niech $n = 2m + 1$. Wtedy

a)

$$\{C_{k_1}, C_{k_2}, \dots, C_{k_{m+1}}, \cdot, \dots, \cdot\} = 0 \quad (66)$$

b)

$$\{C_{k_1}, C_{k_2}, \cdot, \dots, \cdot\}|_{\rho^2 = \rho} = 0 \quad (67)$$

c) Niech „ $\bar{\cdot}$ ” oznacza sprzężenie zespolone. Wtedy

$$\overline{\{F_1, \dots, F_{4m+3}\}} = -\{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_{4m+3}\} \quad (68)$$

$$\overline{\{F_1, \dots, F_{4m+1}\}} = \{\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_{4m+1}\} \quad (69)$$

Wniosek 1: Niech $z_3 = -i$, $z_{4m+3} = -i|z_{4m+3}|$, $z_{4m+1} = |z_{4m+1}|$, $z_{2m} = 0$ a funkcje $S_j = S_j(C_1, C_2, \dots)$ są różniczkowalne względem C_k . Wtedy równanie

$$\dot{\rho}_a = \sum_n z_n \{\rho_a, h_1, \dots, h_{(n-1)/2}, S_1, \dots, S_{(n-1)/2}\}, \quad (70)$$

posiada następujące własności

a) dla $\rho^2 = \rho$ redukuje się do liniowego równania von Neumanna,

b) implikuje $\dot{C}_k = 0$,

c) pochodna $\dot{\rho}$ jest hermitowska,

d) rozwiązania można zapisać w formie szeregu, którego każdy wyraz jest hermitowski.

Wniosek 2: Rozwiązania $\rho(t)$ takiego równania, o ile istnieją, są macierzami gęstości jeżeli $\rho(0)$ jest macierzą gęstości.

Przykład: Rozpatrzmy równanie z 5-nawiasem, $z_5 = 1$,

$$\dot{\rho}_a = \{\rho_a, h_1, h_2, S_1, S_2\}, \quad (71)$$

gdzie $h_1 = \text{Tr}(A_1 \rho)$, $h_2 = \text{Tr}(A_2 \rho)$, $S_1 = C_2/2$, $S_2 = C_3/3$. Jest ono równoważne operatorowemu równaniu

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= ([\rho, A_1]A_2 - [\rho, A_2]A_1)\rho^2 + \rho^2(A_2[A_1, \rho] - A_1[A_2, \rho]) \\ &\quad + \rho(A_2\rho^2 A_1 - A_1\rho^2 A_2) + (A_1\rho^2 A_2 - A_2\rho^2 A_1)\rho \\ &= [\rho[A_1, A_2]\rho + [A_1, A_2]\rho^2 + [\rho, [A_2, A_1]_\rho]_+, \rho], \end{aligned} \quad (72)$$

gdzie $[A, B]_+ = AB + BA$, $[A, B]_C = ACB - BCA$. Jak widać jest to nieliniowe równanie von Neumanna z hamiltonianem

$$H(\rho) = i\rho[A_1, A_2]\rho + i[A_1, A_2]\rho^2 + [\rho, i[A_2, A_1]_\rho]_+. \quad (73)$$

Łatwo też sprawdzić, że $\dot{\rho} = 0$ dla $\rho^2 = \rho$. Do równań typu Nambu wrócimy jeszcze przy okazji analizy problemu rozszerzania dynamiki z podukładu na układ go zawierający.

12 Uogólnione równania von Neumanna całkowlne przy pomocy binarnej transformacji Darboux

Techniki typu Nambu pozwalają na częściową charakteryzację rozwiązań uogólnionych równań von Neumanna. Problem jednak w tym, że nie mamy gwarancji, że owe rozwiązania w ogóle istnieją! Rozwiązania formalne, dane za pomocą szeregów, można co prawda napisać, ale nic nie wiemy na temat ich zbieżności. Równania te są nieliniowe i, jak widać w powyższym przykładzie, bardzo „nieabelowe”,

Pierwszym równaniem, dla którego udało się podać algebraiczną technikę znajdowania dokładnych rozwiązań [16] (binarną transformację Darboux) jest równanie Eulera-Poincarégo-Arnolda-von Neumanna ¹⁸

$$i\dot{\rho} = [H, \rho^2] = [H\rho + \rho H, \rho]. \quad (74)$$

Jest ono postaci (25). Można je zatem uzyskać przy pomocy 3-nawiasu jeśli $h = \text{Tr}(H\rho)$, $S = C_3/3$. Alternatywnie, można myśleć o nim jako o lie-poissonowskim równaniu z funkcją Hamiltona $h_f = \text{Tr}(H\rho^2)$.

W następnym kroku, gdy już zrozumiano powody, dla których transformacja Darboux może być tu zastosowana, znaleziono ogólniejszą klasę takich równań [17], mianowicie

$$\begin{aligned} i\dot{\rho} &= [H(\rho), \rho] \\ &= \sum_{k=0}^n [A^{n-k} \rho A^k, \rho] = \sum_{k=0}^n [A^{n-k}, \rho A^k \rho] \end{aligned} \quad (75)$$

gdzie A jest niezależnym od czasu samosprężonym operatorem. Równania takie nie są już w ogólności typu Nambu (przynajmniej taka ich postać nie jest mi znana) natomiast posiadają rozwiązania będące macierzami gęstości. Równania należące do powyższej klasy posiadają nieliniowości kwadratowe co zdaje się mieć związek ze strukturą *binarnej* transformacji Darboux.

12.1 Binarna transformacja Darboux i laxowska reprezentacja równań von Neumanna

Równania (75) można traktować jako relację pomiędzy ρ i A będącą warunkiem niesprzeczności pewnego układu równań liniowych. Są to dwa równania, tzw. para Laxa dla (75), następującej postaci

$$z_\mu |\varphi\rangle = (\rho - \mu A) |\varphi\rangle, \quad (76)$$

$$i|\dot{\varphi}\rangle = \left(\sum_{k=0}^n A^{n-k} \rho A^k - \mu A^{n+1} \right) |\varphi\rangle, \quad (77)$$

gdzie $z_\mu, \mu \in \mathbf{C}$. Rzeczywiście, mnożąc (77) przez z_μ i różniczkując (76) po czasie, i wreszcie porównując oba wyniki stwierdzamy, że $|\varphi\rangle$ może istnieć pod warunkiem, że zachodzi (75).

¹⁸Nazwa bierze się z kształtu równania, analogicznego do pewnego zapisu równań Eulera dla bryły sztywnej. Równania Eulera zostały uogólnione na przypadek algebr innych niż $o(3)$ przez Arnolda. J. E. Marsden sugerował w prywatnej rozmowie, iż właściwszym byłoby mówienie o równaniu Eulera-Poincarégo-von Neumanna, gdyż wyniki uzyskane przez Arnolda znane były wcześniej Poincarému. Standardowe równanie Eulera-Poincarégo-Arnolda posiada rozwiązania, które nie są macierzami gęstości a H nie jest hamiltonianem.

Tak więc, jeżeli udało się nam znaleźć jakieś rozwiązanie $|\varphi\rangle$, to wiemy, że operatory A i ρ powiązane są równaniem (75).

Zazwyczaj dla danego A łatwo jest znaleźć *jakieś* rozwiązanie ρ spełniające (75) i stowarzyszone z nim rozwiązanie pary Laxa. Takie „łatwe” rozwiązania są, same w sobie, zazwyczaj niezbyt interesujące. Idea transformacji Darboux polega na znalezieniu przekształcenia

$$\rho \mapsto \rho[1], \quad (78)$$

$$|\varphi\rangle \mapsto |\varphi[1]\rangle, \quad (79)$$

takiego, że

$$z_\mu |\varphi[1]\rangle = (\rho[1] - \mu A) |\varphi[1]\rangle, \quad (80)$$

$$i|\dot{\varphi}[1]\rangle = \left(\sum_{k=0}^n A^{n-k} \rho[1] A^k - \mu A^{n+1} \right) |\varphi[1]\rangle. \quad (81)$$

Z samej konstrukcji wynika, że jeżeli $|\varphi[1]\rangle$ istnieje, to $\rho[1]$ spełnia (75). Na podstawie „nieciekawego” rozwiązania ρ skonstruowaliśmy więc nowe rozwiązanie $\rho[1]$. Sztuka operowania transformacją Darboux polega na konstruowaniu nietrywialnych $\rho[1]$.

Przy konstrukcji transformacji jako punkt wyjścia bierze się aż *trzy* pary Laxa. Jedną parę już poznaliśmy. Pozostałe dwie wybiera się zazwyczaj w wersji sprzężonej tj.

$$z_\lambda \langle \psi | = \langle \psi | (\rho - \lambda A), \quad (82)$$

$$-i \langle \dot{\psi} | = \langle \psi | \left(\sum_{k=0}^n A^{n-k} \rho A^k - \lambda A^{n+1} \right), \quad (83)$$

$$z_\nu \langle \chi | = \langle \chi | (\rho - \nu A), \quad (84)$$

$$-i \langle \dot{\chi} | = \langle \chi | \left(\sum_{k=0}^n A^{n-k} \rho A^k - \nu A^{n+1} \right), \quad (85)$$

gdzie $\lambda, z_\lambda, \nu, z_\nu$ są pewnymi nowymi parametrami zespolonymi. Zauważmy, że pary sprzężone posiadają taki sam warunek niesprzeczności jak para (76)–(77). Wybór dwóch dodatkowych par w wersji sprzężonej pozwala na stosowanie tej techniki nawet w wypadku, gdy A nie jest samosprzężony. Pary (76)–(77) i (84)–(85) wykorzystane zostaną do przetransformowania pary (82)–(83)¹⁹.

Definicje:

$$P := \frac{|\varphi\rangle\langle\chi|}{\langle\chi|\varphi\rangle} \quad (86)$$

$$\rho[1] := \rho + (\mu - \nu)[P, A] \quad (87)$$

$$\langle\psi[1]| := \langle\psi| \left(\mathbf{1} - \frac{\nu - \mu}{\lambda - \mu} P \right) \quad (88)$$

Uwagi: (a) W konkretnych zastosowaniach najprościej jest wybrać $\langle\chi| = \langle\varphi|$, $\nu = \bar{\mu}$. Wtedy $A = A^\dagger$, $\rho = \rho^\dagger$ implikują $\rho[1] = \rho[1]^\dagger$. (b) Istnieje wersja binarnej transformacji Darboux dla równań, w których rozwiązania par Laxa nie są wektorami, lecz operatorami [16, 17]. (c) Czytelnik zaznajomiony ze zwykłą transformacją Darboux wykorzystywaną w supersymetrycznej mechanice kwantowej i jej wersją *binarną* [18] może się zastanawiać w jakim sensie

¹⁹W wyborze tej konkretnej (sprzężonej) pary nie ma nic szczególnego. W rzeczywistości dowolne dwa rozwiązania mogą być użyte do przetransformowania trzeciego.

nasza transformacja jest binarna. Odpowiedź jest następująca: nasza binarna transformacja skonstruowana została w dokładnej analogii do standardowej transformacji binarnej, tyle że za punkt wyjścia bierze się tzw. elementarną transformację Darboux [19]. Sama elementarna transformacja — jak dotąd — nie okazała się w przydatna, więc jej nie omawiamy.

Twierdzenie 2: [17]

$$z_\lambda \langle \psi[1] | = \langle \psi[1] | (\rho[1] - \lambda A) \quad (89)$$

$$-i \langle \dot{\psi}[1] | = \langle \psi[1] | \left(\sum_{k=0}^n A^{n-k} \rho[1] A^k - \lambda A^{n+1} \right) \quad (90)$$

Twierdzenie 3: [17]

$$\rho[1] = \left(\mathbf{1} + \frac{\mu - \nu}{\nu} P \right) \rho \left(\mathbf{1} + \frac{\nu - \mu}{\mu} P \right) =: T \rho T^{-1}. \quad (91)$$

Uwagi: (a) Twierdzenie 3 jest rzeczywiście *twierdzeniem* a nie definicją. Przejście od *definicji* (87) do wzoru (91) wymaga założenia, iż P konstruowane jest przy pomocy rozwiązań par Laxa. Wzór (91) nie zachodziłby, gdyby parę Laxa zastąpić parą „zerowej krzywizny”, tj. gdyby równanie własne występujące w parze Laxa zastąpić ogólniejszym równaniem typu Zacharowa-Szabata [16, 17]. (b) T jest unitarny, jeżeli $\nu = \bar{\mu}$. Jeżeli dodatkowo μ jest urojone to $T = \mathbf{1} - 2P$.

Twierdzenie 4: [17] Niech X będzie operatorem spełniającym $[X, A] = [X, \rho] = 0$, ρ rozwiązaniem równania (75) a Y liczbą zespoloną. Wtedy

$$\rho_X(t) = e^{-i(n+1)X A^n t} (\rho(t) + X) e^{i(n+1)X A^n t} \quad (92)$$

$$\rho_Y(t) = Y \rho(Y t) \quad (93)$$

również spełniają (75).

Uwaga: Twierdzenie 4 jest wykorzystywane do konstruowania macierzy gęstości $\rho[1]$ z rozwiązań ρ , które są niedodatnie lub nieunormowane.

13 Dwie strategie prowadzące do nietrywialnych $\rho[1]$

Powyższe twierdzenia gwarantują jedynie, iż przekształcenie $\rho \mapsto \rho[1]$ produkuje jedno rozwiązanie na podstawie innego rozwiązania. Nie mamy jednak żadnej gwarancji, że $\rho[1]$ będzie fizycznie interesujące. Co gorsza, musimy *wystartować od rozwiązania* ρ , ale skąd je wziąć?

Dokładniejsza analiza struktury par Laxa pozwoliła na znalezienie dwóch strategii prowadzących do interesujących rozwiązań. Zostały one szczegółowo przedstawione w pracach [16, 17, 20, 21].

13.1 Strategia pierwsza

Działa ona w wypadku równania

$$i\dot{\rho} = [H, \rho^2]. \quad (94)$$

Niech $a \in \mathbf{R}$. Wybieramy $\rho(0)$ spełniające warunek $[\Delta_a, H] = 0$, gdzie $\Delta_a = \rho(0)^2 - a\rho(0)$. Jak łatwo widzieć operator

$$\rho(t) = \exp[-iaHt] \rho(0) \exp[iaHt] \quad (95)$$

jest rozwiązaniem (94). Znajdujemy

$$\rho[1](t) = e^{-iaHt} \left(\rho(0) + (\mu - \bar{\mu}) F_a(t)^{-1} e^{-\frac{i}{\bar{\mu}} \Delta_a t} [|\varphi(0)\rangle\langle\varphi(0)|, H] e^{\frac{i}{\bar{\mu}} \Delta_a t} \right) e^{iaHt}, \quad (96)$$

gdzie $|\varphi(0)\rangle$ jest rozwiązaniem pary Laxa (76)-(77) (dla $n = 1$, $A = H$) w chwili początkowej $t = 0$ a

$$F_a(t) = \langle\varphi(0)| \exp \left(i \frac{\mu - \bar{\mu}}{|\mu|^2} \Delta_a t \right) |\varphi(0)\rangle.$$

Zauważmy, że dla $|\varphi(0)\rangle$ będącego wektorem własnym Δ_a skracają się zależne od czasu czynniki stojące obok komutatora $[|\varphi(0)\rangle\langle\varphi(0)|, H]$. Tak więc warunkiem koniecznym dla nietrywialności $\rho[1]$ jest $\Delta_a |\varphi(0)\rangle \neq \alpha |\varphi(0)\rangle$, $\alpha \in \mathbf{C}$.

Korzystając z Twierdzenia 3 możemy napisać

$$\rho[1](t) = T e^{-iaHt} \rho(0) e^{iaHt} T^{-1} \quad (97)$$

Aby $\rho[1](t)$ było macierzą gęstości wystarczy, żeby $\rho(0)$ nią było, gdyż operator

$$U(t) = T e^{-iaHt} = \left(\mathbf{1} + \frac{\mu - \bar{\mu}}{\bar{\mu}} P(t) \right) e^{-iaHt} \quad (98)$$

jest unitarny. Możemy zatem napisać zależny od czasu generator dynamiki $t \mapsto \rho[1](t)$

$$H_1(t) = i\dot{U}U^{-1} \quad (99)$$

$$= i\dot{T}T^{-1} + aTHT^{-1}. \quad (100)$$

Macierz gęstości $\rho[1]$ jest równocześnie rozwiązaniem dwóch równań von Neumanna: nieliniowego

$$i\dot{\rho}[1] = [H, \rho[1]^2] = [H\rho[1] + \rho[1]H, \rho[1]] \quad (101)$$

oraz liniowego

$$i\dot{\rho}[1] = [H_1(t), \rho[1]]. \quad (102)$$

Łatwo to zrozumieć. Zachodzi po prostu

$$H_1(t) = H\rho[1](t) + \rho[1](t)H. \quad (103)$$

Przykład zastosowania powyższej metody do konstrukcji zależnego od czasu hamiltonianu $H_1(t)$ wraz z odpowiadającym mu rozwiązaniem $\rho[1](t)$ podany został w pracy [21]. Okazało się, że $H_1(t)$ opisuje rozpraszanie impulsu analogicznego do solitonu optycznego na układzie 3-poziomym. Natomiast z punktu widzenia dynamiki nieliniowej $\rho[1](t)$ opisuje proces „samorozpraszania” (rozproszeniowego odpowiednika samooddziaływania) oscylatora harmonicznego.

Granica pomiędzy tym co liniowe, a tym co nieliniowe, jest w mechanice kwantowej rzeczywiście delikatna.

13.2 Strategia druga

Metoda naszkicowana powyżej nie stosuje się do równań (75) dla $n > 1$. Równania takie są „nieabelowymi zaburzeniami” równania Eulera-Poincarégo-Arnolda-von Neumanna. Przykładowo, dla $n = 2$ znajdujemy

$$i\dot{\rho} = [A^2, \rho^2] + [A, \rho A \rho] \quad (104)$$

$$= [H, \rho^2] + [\sqrt{H}, \rho \sqrt{H} \rho] \quad (105)$$

gdzie wybraliśmy $A = \sqrt{H}$.

Punktem wyjścia jest tutaj obserwacja [17], że dla każdego n równania te posiadają (co najmniej) dwie klasy rozwiązań stacjonarnych spełniających warunek $\rho A = \pm A \rho$. Przypadek, gdy A i ρ komutują nie jest interesujący, gdyż operator P dany równaniem (86) będzie komutował z ρ i A .

Natomiast dla $\rho A = -A \rho$ jest szansa na wynik nietrywialny. Załóżmy $[P, \rho] \neq 0$. Dla $n = 2m$

$$i|\dot{\varphi}\rangle = (A^n \rho - \mu A^{n+1})|\varphi\rangle = z_\mu A^n |\varphi\rangle \quad (106)$$

więc rozwiązanie jest postaci

$$|\varphi(t)\rangle = e^{-iz_\mu A^n t} |\varphi(0)\rangle. \quad (107)$$

Dla $n = 2m + 1$

$$i|\dot{\varphi}\rangle = -\mu A^{n+1} |\varphi\rangle \quad (108)$$

skąd wynika, iż

$$|\varphi(t)\rangle = e^{i\mu A^{n+1} t} |\varphi(0)\rangle. \quad (109)$$

Z faktu, iż μ oraz z_μ są zespolone wynika nietrywialność transformacji. Wyjątkiem jest sytuacja, gdy rozwiązanie pary Laxa jest wektorem własnym A^n (dla $n = 2m$) lub A^{n+1} (dla $n = 2m + 1$).

Należy mieć na uwadze fakt, iż ρ antykomutujące z dodatnio określonym A nie może być operatorem dodatnim, gdyż $\text{Tr } \rho A = 0$. Właśnie w tym miejscu istotną rolę odgrywają transformacje występujące w Twierdzeniu 4.

Strategia pierwsza została zastosowana do konkretnych przykładów w [16, 21]. Strategia druga omówiona została szczegółowo w [17] i zilustrowana przykładem w [20]. W obu przypadkach uzyskano bardzo szczególną klasę macierzy gęstości nazwanych rozwiązaniami samorozproszeniowymi.

14 Rozwiązania samorozproszeniowe

Rozpatrzmy hamiltonian postaci $H = \epsilon N$, gdzie ϵ jest parametrem a

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) |r+n\rangle \langle r+n|. \quad (110)$$

Parametr $r \in \mathbf{R}$ zależy od konkretnego modelu (np. $r = 1/2$ dla 1-wymiarowego oscylatora harmonicznego; dla 3-wymiarowego izotropowego oscylatora harmonicznego $r = 3/2$).

W przestrzeni Hilberta z bazą $\{|r+n\rangle\}_{n=0}^{\infty}$ wybierzmy jakąś 3-wymiarową podprzestrzeń rozpiętą przez trzy kolejne stany wzbudzone $|k\rangle$, $|k+1\rangle$ oraz $|k+2\rangle$.

Stosując pierwszą strategię dochodzimy do rodziny rozwiązań parametryzowanej przez $\alpha \in \mathbf{R}$

$$\rho[1](t) = \sum_{u,v=0}^2 \rho[1](t)_{1+u,1+v} |k+u\rangle \langle k+v| \quad (111)$$

gdzie macierz współczynników w (111) wygląda następująco

$$\rho[1](t)_{\dots} = \frac{1}{15 + \sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & \xi(t) & \zeta(t) \\ \bar{\xi}(t) & 5 + \sqrt{5} & \xi(t) \\ \bar{\zeta}(t) & \bar{\xi}(t) & 5 \end{pmatrix}, \quad (112)$$

$$\xi(t) = \frac{(2 + 3i - \sqrt{5}i) \sqrt{3 + \sqrt{5}} \alpha}{\sqrt{3}(e^{\omega_0 t/5} + \alpha^2 e^{-\omega_0 t/5})} e^{i\omega_0 t}, \quad (113)$$

$$\zeta(t) = -\frac{9e^{2\omega_0 t/5} + (1 + 4\sqrt{5}i) \alpha^2}{3(e^{2\omega_0 t/5} + \alpha^2)} e^{2i\omega_0 t}. \quad (114)$$

$\omega_0 = 10\epsilon/(15 + \sqrt{5})$ jest pewną nową częstością określającą dynamiki asymptotyczne. Przepisując (111) jako

$$\rho[1](t) = e^{-i\omega_0 N t} \rho_{\text{int}}(t) e^{i\omega_0 N t} \quad (115)$$

znajdujemy, dla $0 < |\alpha| < \infty$,

$$\rho_{\text{int}}(-\infty) = \frac{1}{15 + \sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -\frac{1}{3} - \frac{4\sqrt{5}i}{3} \\ 0 & 5 + \sqrt{5} & 0 \\ -\frac{1}{3} + \frac{4\sqrt{5}i}{3} & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\rho_{\text{int}}(+\infty) = \frac{1}{15 + \sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 + \sqrt{5} & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Widzimy zatem, że rozwiązanie nasze interpoluje w sposób ciągły pomiędzy stanami

$$\rho_{\text{in}}(t) = e^{-i\omega_0 N t} \rho_{\text{int}}(-\infty) e^{i\omega_0 N t} \quad (116)$$

oraz

$$\rho_{\text{out}}(t) = e^{-i\omega_0 N t} \rho_{\text{int}}(+\infty) e^{i\omega_0 N t}. \quad (117)$$

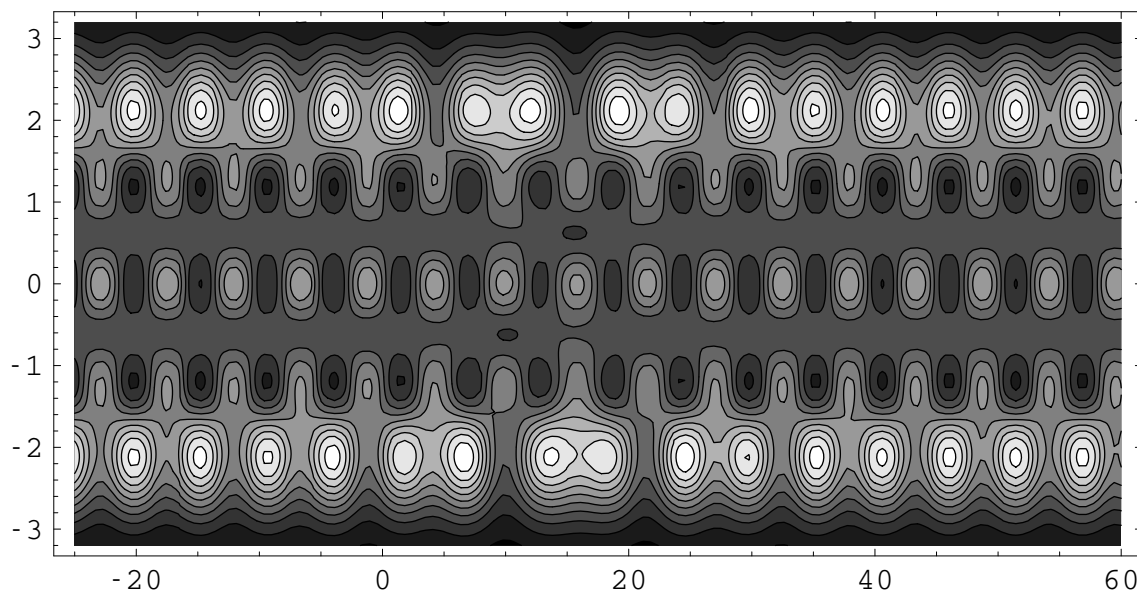
Stany asymptotyczne spełniają liniowe równanie

$$i\dot{\rho} = [\omega_0 N, \rho] \quad (118)$$

opisujące swobodną ewolucję oscylatora harmonicznego. Fakt, iż $\rho_{\text{int}}(+\infty) \neq \rho_{\text{int}}(-\infty)$ oznacza, że mamy do czynienia z dynamiką charakterystyczną dla rozpraszania. Jednakże w przeciwieństwie do standardowego opisu stanów rozproszonych przejście od ρ_{in} do ρ_{out} dane jest w sposób jawny dla każdej chwili t . Możemy też, na podstawie (100), napisać dokładną postać hamiltonianu generującego dynamikę interpolującą. Jest nim

$$H_1(t) = \omega_0 N + H_{\text{int}}(t) \quad (119)$$

gdzie $H_{\text{int}}(t)$ opisuje asymptotycznie wyłączone zaburzenie w 3-poziomowej podprzestrzeni określonej przez wybór $\rho[1]$. Jawną postać takiego zaburzenia można znaleźć w [21].



Rysunek 1: Położeniowa gęstość prawdopodobieństwa dla jednowymiarowego oscylatora harmonicznego w stanie samorozproszeniowym jako funkcja czasu dla $-25 < t < 60$. Wyrażenie widać ciągle przejście pomiędzy symetrycznymi stanami asymptotycznymi. Hamiltonian $H_{\text{int}}(t)$ opisuje w tym wypadku rozpraszanie impulsu typu „sech” na układzie 3-poziomowym odpowiadającym 2, 3 i 4 stanom wzbudzonym oscylatora. Moment samorozpraszania przebiega się proporcjonalnie do $\ln |\alpha|$. Rysunek odpowiada $\alpha = 5$ [21].

15 Macierz gęstości z widmem zależnym od czasu

Jak już wspominaliśmy na początku artykułu, z punktu widzenia interpretacji rozwiązania ρ jako macierzy gęstości bardzo użyteczne jest, jeżeli potrafimy udowodnić niezależność wartości własnych ρ od czasu. Warunek taki nie jest jednak konieczny. Wystarczy jeżeli $\text{Tr } \rho = 1$ oraz $\rho \geq 0$.

Rozpatrzmy układ dwóch cząstek o spinie 1/2 opisywanych hamiltonianem

$$H = 2\sigma_x \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (120)$$

Stosując pierwszą strategię konstruujemy $\rho[1](t) = \exp[-5iHt]\rho_{\text{int}}(t)\exp[5iHt]$ gdzie

$$\rho_{\text{int}}(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 - \sqrt{7} \tanh 2t & 0 & \frac{-13i - 3\sqrt{7} - \sqrt{15} - i\sqrt{105}}{8 \cosh 2t} & \frac{-7i + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{15} + i\sqrt{105}}{8 \cosh 2t} \\ 0 & 5 + \sqrt{7} \tanh 2t & \frac{15i + \sqrt{7} - \sqrt{15} - i\sqrt{105}}{8 \cosh 2t} & \frac{\sqrt{7} + \sqrt{15}}{2 \cosh 2t} \\ \frac{13i - 3\sqrt{7} - \sqrt{15} + i\sqrt{105}}{8 \cosh 2t} & \frac{-15i + \sqrt{7} - \sqrt{15} + i\sqrt{105}}{8 \cosh 2t} & 5 + \sqrt{15} \tanh 2t & 0 \\ \frac{7i + 3\sqrt{7} - 3\sqrt{15} - i\sqrt{105}}{8 \cosh 2t} & \frac{\sqrt{7} + \sqrt{15}}{2 \cosh 2t} & 0 & 5 - \sqrt{15} \tanh 2t \end{pmatrix}.$$

$\rho[1](t)$ jest nieunormowaną macierzą gęstości spełniającą $i\dot{\rho}[1] = [H, \rho[1]^2]$ (rozwiązaniem unormowanym jest $\rho[1](t/10)/10$). Z ogólnych własności transformacji Darboux (lub dynamik lie-poissonowskich) wynika, iż widmo $\rho[1]$ jest niezależne od czasu.

Tak jednak nie jest [3, 16], jeżeli rozpatrzmy zredukowane 1-cząstkowe macierze gęstości $\rho_1 = \text{Tr}_2 \rho[1]$, $\rho_2 = \text{Tr}_1 \rho[1]$. Ich wartości własne to, odpowiednio,

$$p_{\pm}(1) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15} - \sqrt{7}}{20} \text{tgh } 2t, \quad (121)$$

$$p_{\pm}(2) = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{26 + 2\sqrt{105}}}{40 \cosh 2t}. \quad (122)$$

Zauważmy, iż na pierwszy rzut oka obie cząstki ze sobą nie oddziałują, gdyż H nie zawiera członu oddziaływania. Przykład ów pokazuje, że problem jest jednak bardziej złożony. Hamiltonian $H_1(t)$ odpowiadający rozwiązaniu $\rho[1]$ zawierać będzie człony oddziaływania, które nie znikną po wyliczeniu częściowych śladów. Dochodzimy więc do anonsowanego już wcześniej problemu opisu układów nieoddziałujących.

16 Równania von Neumanna dla podukładów

Istnieje klasa równań nieliniowych, dla których łatwo konstruuje się rozszerzenia dynamik z podukładów na układy je zawierające. Są to równania lie-poissonowskie, lub „prawie lie-poissonowskie” [26]. Ogólniejsze równania typu Nambu własności tej zdają się nie posiadać, przynajmniej w ramach zwykłego opisu podukładu przy pomocy zredukowanych macierzy gęstości. Wynika stąd, że „dualne” struktury hamiltonowskie dla równań postaci $i\dot{\rho} = [H, f(\rho)]$ przestają być równoważne, jeżeli spojrzeć na nie z perspektywy dynamik podukładów.

Zilustrujmy to przykładem. Rozpatrzmy równanie $i\dot{\rho} = [H, \rho^2]$ Przy pomocy nawiasów Poissona wprowadzonych powyżej możemy je zapisać lie-poissonowsko jako

$$i\dot{\rho}_a = \{\rho_a, \text{Tr } H\rho^2\} = \{\rho_a, \text{Tr } H\rho^2, \text{Tr } \rho^2/2\} \quad (123)$$

lub „dualnie” jako

$$i\dot{\rho}_a = (\rho_a, \text{Tr } \rho^3/3)_H = \{\rho_a, \text{Tr } H\rho, \text{Tr } \rho^3/3\}. \quad (124)$$

Ujmując rzecz od strony technicznej, równanie (123) prowadzi do

$$i\dot{\rho} = [H\rho + \rho H, \rho] \quad (125)$$

a (124) do

$$i\dot{\rho} = [H, \rho^2] \quad (126)$$

co rzeczywiście wychodzi na jedno. Jeżeli, jak zakładamy, równanie opisuje podukład, to ρ jest zredukowaną macierzą gęstości, np.

$$\rho = \rho_1 = \text{Tr}_2 \rho_{1+2}, \quad (127)$$

gdzie ρ_{1+2} jest macierzą gęstości całego układu złożonego. Z faktu, iż macierz zredukowana zmienia się w czasie wynika, iż ρ_{1+2} jest również zależna od czasu. Interesuje nas znalezienie równania spełnianego przez ρ_{1+2} przy dodatkowym warunku, że $\text{Tr}_2 \rho_{1+2}$ spełnia (126). Jest jasne, że aby problem był dobrze określony musimy coś założyć o dynamice układu „2” zdefiniowanego przez zredukowaną macierz gęstości $\rho_2 = \text{Tr}_1 \rho_{1+2}$.

W ramach formalizmu lie-poissonowskiego zakładamy jedynie, iż układ ρ_2 spełnia równanie typu Lie-Poissona z jakąś funkcją Hamiltona $h_2 = h_2(\rho_2)$. Okazuje się, iż wystarczy założyć teraz, że funkcja Hamiltona układu złożonego jest postaci

$$h_{1+2} = h_1 \circ \text{Tr}_2 + h_2 \circ \text{Tr}_1 \quad (128)$$

a $\varrho = \rho_{1+2}$ spełnia

$$i\dot{\varrho}_{a_1 a_2} = \{\varrho_{a_1 a_2}, h_{1+2}\} \quad (129)$$

gdzie wprowadziliśmy złożony indeks $a = a_1 a_2$. Przykładowo, załóżmy $h_2(\rho_2) = \text{Tr}_2 H_2 \rho_2^2$, $h_1(\rho_1) = \text{Tr}_1 H_1 \rho_1^2$. Wtedy (129) równoważne jest nieliniowemu równaniu von Neumanna

$$i\dot{\varrho} = [(H_1 \rho_1 + \rho_1 H_1) \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes (H_2 \rho_2 + \rho_2 H_2), \varrho]. \quad (130)$$

Biorąc częściowe ślady z obu stron równania (130) odtwarzamy wyjściowe równania von Neumanna dla podukładów. Zapisując (129) w wersji Lie-Nambu

$$i\dot{\varrho}_{a_1 a_2} = \{\varrho_{a_1 a_2}, h_{1+2}, C_2(\varrho)/2\} \quad (131)$$

stwierdzamy natychmiast, iż $C_n(\varrho) = \text{Tr}_{1+2}(\varrho^n)$ są funkcjami Casimira, skąd wniosek, iż widmo ϱ jest niezależne od czasu. To samo dotyczy widm zredukowanych macierzy gęstości, gdyż każda z nich z osobna także spełnia równanie lie-poissonowskie. Dokładniejszą analizę problemu opisu podukładów z perspektywy lie-poissonowskiej i Lie-Nambu znaleźć można w pracach [24, 23, 10, 26].

W opisie „dualnym” sytuacja wygląda inaczej. Widzieliśmy już w części poprzedniej, iż rozwiązanie równania

$$i\dot{\varrho} = [H_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes H_2, \varrho^2]. \quad (132)$$

proceedzi do zredukowanych macierzy gęstości o widmach mogących zależeć od czasu. Stąd wniosek, że

$$i\dot{\rho}_1 \neq [H_1, \rho_1^2], \quad (133)$$

a zatem (132) nie może być alternatywnym rozszerzeniem (126) na układ złożony.

Spróbujmy więc inaczej. W rozważanym przykładzie podukłady spełniają równania

$$i\dot{\rho}_{1a} = (\rho_{1a}, \text{Tr}_1(\rho_1^3)/3)_{H_1} \quad (134)$$

$$i\dot{\rho}_{2a} = (\rho_{2a}, \text{Tr}_2(\rho_2^3)/3)_{H_2}. \quad (135)$$

Naturalną definicją może być

$$i\dot{\varrho}_{a_1 a_2} = (\varrho_{a_1 a_2}, \text{Tr}_1(\rho_1^3)/3 + \text{Tr}_2(\rho_2^3)/3)_{H_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes H_2}. \quad (136)$$

Użytecznym ogólnym wynikiem, udowodnionym w [10], jest

Twierdzenie 5: Niech $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$ jest 3-nawiasem odpowiadającym układowi złożonemu opisywanemu macierzą gęstości $\varrho = \rho_{1+2}$. Niech $F(\varrho) = F_1 \circ \text{Tr}_2(\varrho)$, $G(\varrho) = G_2 \circ \text{Tr}_1(\varrho)$ będą dowolnymi różniczkowalnymi względem ϱ_a funkcjami (funkcjonałami) o wartościach zespolonych. Wtedy

$$\{F, G, \cdot\} = 0. \quad (137)$$

Uwaga: Interesujący jest przypadek, gdy jedną z funkcji pojawiających się w Twierdzeniu 5 jest po prostu zredukowana macierz gęstości, np. $F(\varrho) = \rho_{1a}$. Wynika stąd natychmiast, iż $\{\rho_{1a}, \rho_{2b}, \cdot\} = 0$.

Obliczając częściowy ślad (np. Tr_2) obu stron (136), wykorzystując relację pomiędzy powyższym nawiasem Poissona a 3-nawiasem oraz stosując Twierdzenie 5 możemy napisać

$$\begin{aligned} i\dot{\rho}_{1a} &= \{\rho_{1a}, \text{Tr}_1 H_1 \rho_1 + \text{Tr}_2 H_2 \rho_2, \text{Tr}_1(\rho_1^3)/3 + \text{Tr}_1(\rho_2^3)/3\} \\ &= \{\rho_{1a}, \text{Tr}_1 H_1 \rho_1, \text{Tr}_1(\rho_1^3)/3\} \\ &= (\rho_{1a}, \text{Tr}_1(\rho_1^3)/3)_{H_1}. \end{aligned} \quad (138)$$

Zasadniczo rzecz biorąc, osiągnęliśmy to o co nam chodziło: Podukład opisywany macierzą gęstości ρ_1 „nie wie”, że jest częścią większego układu złożonego, gdyż jego dynamika określona jest całkowicie przez obiekty związane z nim samym.

Pozostaje jednak problem. Skąd właściwie wiemy, że rozwiązanie ρ_{1+2} jest macierzą gęstości? W ogólności nie potrafimy nic powiedzieć na temat wartości własnych ρ_{1+2} , gdyż $C_n(\rho_{1+2})$ *nie jest* funkcją Casimira dla dynamiki (136). Dokładnie ten sam problem pojawił się w przykładzie macierzy gęstości z widmem zależnym od czasu, tyle że tam zależne od czasu były wartości własne zredukowanych macierzy gęstości, podczas gdy ρ_{1+2} miało widmo niezależne od czasu. Przy rozszerzeniu danym równaniem (136) zredukowane macierze gęstości mają stałe widmo, ale ρ_{1+2} w ogólności tej własności nie posiada.

Z powyższych rozważań wynika jasno, iż najlepszym kandydatem na nieliniowe uogólnienia równania von Neumanna są dynamiki lie-poissonowskie. Inne typy dynamik prowadzą do zjawisk w chwili obecnej trudnych do interpretacji, lecz niekoniecznie niefizycznych. W wypadku układów złożonych można je prawdopodobnie interpretować jako pewien nowy rodzaj efektów kolektywnych.

17 Zagadnienie kompletnej dodatniości dynamiki nieliniowej

Dynamiki

$$\rho(0) \mapsto \phi^t(\rho(0)) := \rho(t) \quad (139)$$

zachowujące widmo macierzy gęstości są przykładem odwzorowań dodatnich. Dodatniość oznacza w tym wypadku, iż warunek $\rho(0) \geq 0$ pociąga za sobą $\rho(t) \geq 0$ dla $t \neq 0$. Ostatnim zagadnieniem związanym z interpretacją rozwiązań równań von Neumanna jako macierzy gęstości jest kwestia *kompletnej* dodatniości odwzorowań ϕ^t .

Liniowe odwzorowania kompletne dodatnie biorą się z następującego rozumowania [27]. Rozpatrzmy układ fizyczny, którego dynamika dana jest dodatnim odwzorowaniem $\phi_1^t(a) = a(t)$, $\phi_1^t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ gdzie \mathcal{A} jest zbiorem operatorów ograniczonych działających w przestrzeni Hilberta \mathcal{H}_1 (dla uniknięcia niuansów matematycznych załóżmy, iż jest ona skończenie wymiarowa). Rozpatrzmy teraz macierz gęstości $\rho_{1+2}(0)$ układu większego składającego się z naszego układu wyjściowego i pewnego nowego układu związanego z przestrzenią Hilberta o wymiarze $m < \infty$. O tym dodatkowym układzie zakładamy, iż ewoluuje trywialnie, czyli się po prostu nie zmienia.

Początkową macierz gęstości układu złożonego możemy zapisać jako

$$\rho_{1+2}(0) = \sum_{ss'kl} \rho_{1+2}(0)_{ss'kl} |s\rangle\langle s'| \otimes |k\rangle\langle l| \quad (140)$$

$$= \sum_{k,l=1}^m a_{kl} \otimes |k\rangle\langle l|, \quad (141)$$

lub, co w tym kontekście jest bardziej popularne, jako

$$\rho_{1+2}(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Zauważmy, iż „elementy macierzowe” a_{kl} są operatorami z \mathcal{A} . Ponieważ dynamika w \mathcal{A} jest zadana i innego elementu dynamicznego w naszym układzie złożonym nie ma, naturalne wydaje się założenie, że cały układ ewoluuje według wzoru

$$\rho_{1+2}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1^t(a_{11}) & \dots & \phi_1^t(a_{1m}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^t(a_{m1}) & \dots & \phi_1^t(a_{mm}) \end{pmatrix}. \quad (143)$$

Jeżeli $\rho_{1+2}(t) = \phi_{1+2}^t(\rho_{1+2}(0))$ ma być macierzą gęstości, to jej wartości własne nie powinny być ujemne. Ponadto, dodatniość $\rho_{1+2}(t)$ nie powinna zależeć od wymiaru m układu dołączonego. Jeżeli tak jest, to mówimy, że ϕ_1^t jest dynamiką kompletnie dodatnią.

Pojęcie dynamiki kompletnie dodatniej jest więc bardzo naturalne i na pierwszy rzut oka niezależne od *liniowości* ϕ_1^t . Z tego właśnie powodu w literaturze matematycznej zaczęto badać nieliniowe odwzorowania kompletnie dodatnie zdefiniowane tak samo jak w przypadku liniowym, tyle że, rzecz jasna, opuszczając wymóg liniowości ϕ_1^t [28, 29].

Z fizycznego punktu widzenia pojawia się jednak trudność [30, 31, 32]. Otóż jedno z twierdzeń na temat nieliniowych odwzorowań kompletnie dodatnich głosi, iż ϕ_1^t posiadające własność 1-jednorodności, tj. spełniające warunek $\phi_1^t(\lambda a) = \lambda \phi_1^t(a)$, jest kompletnie dodatnie wtedy i tylko wtedy, gdy jest *liniowe*. Problem w tym, że z praktycznie każdą dynamiką daną równaniem

$$i\dot{\rho} = [H(\rho), \rho] \quad (144)$$

jest związana dynamika zasadniczo od niej nieodróżnialna i taka, że odpowiadające jej ϕ_1^t jest 1-jednorodne. Wystarczy bowiem rozważyć równanie z 0-jednorodnym hamiltonianem

$$i\dot{\rho} = [H(\rho/\text{Tr } \rho), \rho] \quad (145)$$

generujące, na rozmaitości stanów unormowanych przez $\text{Tr } \rho = 1$, dynamikę nieodróżnialną od dynamiki (144).

W pierwszym odruchu można by pomyśleć, iż wreszcie znaleźliśmy zasadniczy argument przeciwko nieliniowym uogólnieniom mechaniki kwantowej. Czyżby wszystkie nieliniowe dynamiki podukładu związane były z koniecznością pojawienia się ujemnych prawdopodobieństw na poziomie układów większych? Gdyby tak było, to jedynym kandydatem na układ ewoluujący nieliniowo byłby cały Wszechświat!

Z drugiej strony, widzieliśmy w części poprzedniej, że nie ma większych trudności z traktowaniem nieliniowo ewoluujących układów jako podukładów. Mało tego. Konstrukcja odwzorowań kompletnie dodatnich zakłada, iż układ dołączany ewoluuje trywialnie i do tego jego przestrzeń Hilberta jest skończenie wymiarowa. W opisie dynamik lie-poissonowskich dopuszczaliśmy nie tylko nietrywialne dynamiki układów dołączanych, ale nawet dynamiki nieliniowe, no i nie robiliśmy żadnych założeń co do wymiarowości. Nasze dynamiki zachowywały widmo macierzy gęstości zarówno na poziomie podukładów, jak i układów złożonych. Nie ma więc żadnej możliwości, żeby pojawiły się tu jakies ujemne prawdopodobieństwa.

Żeby zrozumieć o co tu chodzi, najprościej jest jawnie rozwiązać jakiś problem. Niech dynamika będzie lie-poissonowska z funkcjami Hamiltona $h_1(\rho_1) = (\text{Tr}_1 H \rho_1)^2 / \text{Tr}_1 \rho_1$ i

$h_2(\rho_2) = \text{Tr}_2 \rho_2$ gdzie ρ_1, ρ_2 są, odpowiednio, macierzami wymiaru $n \times n$ i $m \times m$. Funkcją Hamiltona układu złożonego jest

$$h_{1+2}(\rho_{1+2}) = h_1 \circ \text{Tr}_2(\rho_{1+2}) + h_2 \circ \text{Tr}_1(\rho_{1+2}) \quad (146)$$

$$= \frac{(\text{Tr}_{1+2} H \otimes 1_2 \rho_{1+2})^2}{\text{Tr}_{1+2} \rho_{1+2}} + \text{Tr}_{1+2} \rho_{1+2}. \quad (147)$$

Równaniami von Neumanna są

$$i\dot{\rho}_1 = 2 \frac{\text{Tr}_1 H \rho_1}{\text{Tr}_1 \rho_1} [H, \rho_1] \quad (148)$$

$$i\dot{\rho}_2 = 0 \quad (149)$$

$$i\dot{\rho}_{1+2} = 2 \frac{\text{Tr}_{1+2} H \otimes 1_2 \rho_{1+2}}{\text{Tr}_{1+2} \rho_{1+2}} [H \otimes 1_2, \rho_{1+2}] \quad (150)$$

więc dynamika układu „2” jest trywialna. Spełnione są zatem wszystkie założenia używane przy konstrukcji odwzorowań kompletnie dodatnich.

Oznaczmy

$$U_t(\rho_1(0)) = \exp[-2i \text{Tr}_1(H \rho_1(0)) H t / \text{Tr}_1 \rho_1(0)]. \quad (151)$$

Rozwiązaniami równań von Neumanna są $\rho_2(t) = \rho_2(0)$ oraz

$$\rho_1(t) = U_t(\rho_1(0)) \rho_1(0) U_t^{-1}(\rho_1(0)) \quad (152)$$

$$\rho_{1+2}(t) = U_t(\rho_1(0)) \otimes 1_2 \rho_{1+2}(0) U_t^{-1}(\rho_1(0)) \otimes 1_2. \quad (153)$$

Zauważmy, iż dynamiki oraz operacja brania częściowego śladu tworzą diagram przemienności, tzn.

$$\text{Tr}_2 \circ \phi_{1+2}^t = \phi_1^t \circ \text{Tr}_2. \quad (154)$$

Jest to jeden z powodów, dla których lie-poissonowska procedura zanurzania podukładów opisana w części poprzedniej jest dobrze określona. Odwzorowanie

$$\rho_{1+2}(0) \mapsto \phi_1^t(\rho_{1+2}(0)) := U_t(\rho_1(0)) \rho_1(0) U_t^{-1}(\rho_1(0)) \quad (155)$$

jest 1-jednorodne i nieliniowe, a zatem nie jest kompletnie dodatnie. Z drugiej strony spełnia ono *fizyczne* wymagania stawiane takim odwzorowaniom, gdyż rozszerzona dynamika jest dodatnia niezależnie od m .

Zakładając warunek początkowy dla układu złożonego

$$\rho_{1+2}(0) = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a+b & a+b & a \\ a & a+b & a+b & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \quad (156)$$

gdzie a, b są dodatnimi i hermitowskimi macierzami $n \times n$ (tak więc $m = 4$) oraz wynikający stąd warunek początkowy dla podukładu $\rho_1(0) = \text{Tr}_2 \rho_{1+2}(0) = 4a + 2b$. znajdujemy

$$\rho_1(t) = U_t(2a + b)(4a + 2b)U_t^{-1}(2a + b). \quad (157)$$

Z drugiej strony

$$\rho_{1+2}(t) = \tilde{U}_t(2a+b) \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & a+b & a+b & a \\ a & a+b & a+b & a \\ a & a & a & a \end{pmatrix} \tilde{U}_t^{-1}(2a+b), \quad (158)$$

gdzie $\tilde{U}_t(2a+b) = U_t(2a+b) \otimes 1_2$.

Zgodnie z argumentacją prowadzącą do pojęcia kompletnie dodatniej dynamiki powinno zachodzić

$$\rho_{1+2}(t) = \begin{pmatrix} \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a) \\ \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a+b) & \phi_1^t(a+b) & \phi_1^t(a) \\ \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a+b) & \phi_1^t(a+b) & \phi_1^t(a) \\ \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a) & \phi_1^t(a) \end{pmatrix}. \quad (159)$$

Że tak nie jest łatwo się przekonać biorąc element macierzowy odpowiadający pierwszemu wierszowi i pierwszej kolumnie w obu macierzach. Poprawna dynamika daje

$$a \rightarrow U_t(2a+b)aU_t^{-1}(2a+b) \quad (160)$$

podczas gdy (159) dałoby

$$a \rightarrow U_t(a)aU_t^{-1}(a). \quad (161)$$

Idąc dalej, można pokazać, iż kompletnie dodatnia dynamika nieliniowa odpowiedzialna jest również za inne niefizyczne efekty [32]. Nie jest więc przypadkiem, że nieliniowe dynamiki lie-poissonowskie kompletnie dodatnie nie są.

18 Kilka otwartych problemów

Zakończmy nasz przegląd przykładami zagadnień otwartych będących naturalną kontynuacją powyższych konstrukcji.

18.1 Relatywistyczne równania von Neumanna

W pracy [10] przedstawiono próbę uogólnienia równania Diraca w formalizmie z 3-nawiasem. Pochodna czasowa występująca w $\dot{\rho}$ była w tym wypadku pochodną kierunkową w kierunku 4-wektora normalnego do pewnej hiperpowierzchni równoczesności. Ponieważ nie udało się udowodnić niezależności tak sformułowanej dynamiki od wyboru hiperpowierzchni podjęto próbę sformułowania problemu w sposób jawnie niezmienniczy w formalizmie z czasem własnym. Pierwszym krokiem było przepisanie wyników z pracy [10] w ramach sformułowania z nieokreśloną metryką [34]. Następnie podjęto próbę opisu w formalizmie z metryką określoną dodatnio. Wstępne rezultaty dotyczące takiego sformułowania znaleźć można w [35], ale pełne i satysfakcjonujące sformułowanie relatywistycznych równań dla macierzy gęstości nie zostało jeszcze podane.

18.2 W pełni nieskończenie wymiarowe przykłady rozwiązań metodą Darboux

Rozwiązania samorozproszeniowe uzyskane przy pomocy pierwszej strategii bazują na 3-wymiarowych podprzestrzeniach. Rozwiązania uzyskane przy pomocy strategii drugiej nie podlegają takim ograniczeniom, ale z racji braku dodatniości ρ związanej z warunkiem $\text{Tr } A\rho = 0$ pojawia się konieczność przesuwania i przeskalowywania widma. Metoda podana w Twierdzeniu 4 bazuje na znalezieniu operatora X komutującego z ρ i A . W skończenie wymiarowych przykładach zawsze można wziąć $X = \Lambda \mathbf{1}$, $\Lambda \in \mathbf{R}$. W nieskończenie wymiarowych sytuacjach tak uzyskane rozwiązanie nie będzie normowalne. Być może potrzebna jest tu jakaś inna, „trzecia strategia”.

18.3 Związki ze statystyką nieekstensywną

Średnia energia $\langle H \rangle = \text{Tr } \tilde{\rho} H$, gdzie $\tilde{\rho} = \rho^q / \text{Tr}(\rho^q)$ pełni w termodynamice nieekstensywnej rolę energii wewnętrznej. Ponieważ w zwykłej fizyce statystycznej średnia energia jest równocześnie funkcją Hamiltona dla dynamiki macierzy gęstości, pojawia się pytanie, czy tak nie jest również w przypadku nieekstensywnym. Pozytywna odpowiedź na to pytanie oznaczałaby, iż nieekstensywnym odpowiednikiem równania von Neumanna jest

$$i\dot{\rho} = [H, \rho^q]. \quad (162)$$

Byłby to wynik o podstawowym znaczeniu zarówno dla termodynamiki nieekstensywnej, jak i teorii równań von Neumanna. Naturalnym punktem wyjścia jest tu analiza stabilności dynamicznej względem dynamiki (162) stanów równowagi termodynamicznej wynikających z termodynamiki nieekstensywnej. Wstępne rezultaty pokazują, iż nie ma trudności natury zasadniczej z powiązaniem „ q -termodynamiki” z „ q -dynamiką” [2, 36]. Nie udało się jednak jak dotąd znaleźć żadnego dowodu, iż taki związek jest rzeczywiście implikowany przez jakąś fundamentalną zasadę. Wciąż jest to więc tylko hipoteza.

18.4 Całkowanie technikami Darboux innych nieliniowości

Jak już wspomniano powyżej, wydaje się iż *binarna* transformacja Darboux ma związek z całkowaniem równań z nieliniowościami *kwadratowymi*. Nie podjęto jak dotąd poważniejszej próby zastosowania w tym kontekście transformacji „trynarnej” lub innych, które można uzyskać poprzez składanie większej liczby transformacji elementarnych.

18.5 Transformacje typu Darboux w zastosowaniu do równań Heisenberga

Jest to w chwili obecnej kierunek najbardziej obiecujący, otwierający całą gamę nowych możliwości. Równaniem Heisenberga nazywać będziemy równanie typu von Neumanna, ale którego rozwiązanie nie jest macierzą gęstości. Punktem wyjścia jest następujący (niepublikowany) wynik pochodzący od N. Ustinowa²⁰. Niech $\varphi_\alpha[0]$, $V[0]$, J , $\Psi[0]$ będą pewnymi operatorami.

Twierdzenie 6: Rozpatrzmy rodzinę równań

$$i\dot{\varphi}_\alpha[0] = (V[0] - \mu_\alpha J)\varphi_\alpha[0], \quad \alpha = 0, 1, 2, \dots \quad (163)$$

²⁰Dziękuję N. Ustinowowi za informację i M. Kunie za dyskusję.

gdzie $\mu_\alpha \in \mathbf{C}$, oraz dodatkowe równanie

$$i\dot{\Psi}[0] = [V[0] - \lambda J, \Psi[0]] \quad (164)$$

gdzie $\lambda \in \mathbf{R}$. Niech $\hat{\pi}$ będzie projektorem niezależnym od czasu oraz

$$P_0[0] = \varphi_0[0](\hat{\pi}\varphi_0[0]^\dagger\varphi_0[0]\hat{\pi})^{-1}\varphi_0[0]^\dagger \quad (165)$$

gdzie odwrotność liczona jest w $\hat{\pi}$ -niezmienniczej podprzestrzeni (p. [16]). Wtedy

$$i\dot{\varphi}_\alpha[1] = (V[1] - \mu_\alpha J)\varphi_\alpha[1], \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (166)$$

$$i\dot{\Psi}[1] = [V[1] - \lambda J, \Psi[1]] \quad (167)$$

gdzie

$$\varphi_\alpha[1] = \left(\mathbf{1} + \frac{\mu_0 - \bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_0 - \mu_\alpha} P_0[0] \right) \varphi_\alpha[0], \quad \alpha = 1, 2, \dots \quad (168)$$

$$V[1] = V[0] + (\mu_0 - \bar{\mu}_0)[P_0[0], J] \quad (169)$$

$$\Psi[1] = \left(\mathbf{1} + \frac{\mu_0 - \bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_0 - \lambda} P_0[0] \right) \Psi[0] \left(\mathbf{1} + \frac{\bar{\mu}_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda} P_0[0] \right). \quad (170)$$

Twierdzenie 6 jest podobne do Twierdzenia 3, lecz nie jest mu równoważne. Poniżej przedstawimy konstrukcję opartą o Twierdzenie 6 [33]. Weźmy $V[0] = J = h$, gdzie h jest pewnym operatorem samosprzężonym. Stosując Twierdzenie 6 znajdujemy

$$i\dot{\varphi}_\alpha[0] = (1 - \mu_\alpha)h\varphi_\alpha[0], \quad (171)$$

$$i\dot{\Psi}[0] = (1 - \lambda)[h, \Psi[0]] \quad (172)$$

$$\varphi_1[1] = \left(\mathbf{1} + \frac{\mu_0 - \bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_0 - \mu_1} P_0[0] \right) \varphi_1[0] \quad (173)$$

$$h[1] = h + (\mu_0 - \bar{\mu}_0)[P_0[0], h] \quad (174)$$

$$\Psi[1] = \left(\mathbf{1} + \frac{\mu_0 - \bar{\mu}_0}{\bar{\mu}_0 - \lambda} P_0[0] \right) \Psi[0] \left(\mathbf{1} + \frac{\bar{\mu}_0 - \mu_0}{\mu_0 - \lambda} P_0[0] \right) \quad (175)$$

a zatem

$$i\dot{\varphi}_\alpha[1] = (h[1] - \mu_\alpha h)\varphi_\alpha[1], \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (176)$$

$$i\dot{\Psi}[1] = [h[1] - \lambda h, \Psi[1]] = [H[1], \Psi[1]]. \quad (177)$$

Oznaczmy dalej $1 - \mu_\alpha = \nu_\alpha$, $1 - \lambda = \omega$, $(1 - \lambda)h = \omega h = H$ i rozpatrzmy przypadek szczególny gdy

$$\hat{\pi} = \mathbf{1} \quad (178)$$

$$\varphi_0[0](t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \\ \vdots \end{pmatrix} = |\varphi(t)\rangle = e^{-i\nu_0 ht} |\varphi\rangle \quad (179)$$

$$P_0[0] = \frac{|\varphi(t)\rangle\langle\varphi(t)|}{\langle\varphi(t)|\varphi(t)\rangle} = \frac{e^{-i\nu_0 ht} |\varphi\rangle\langle\varphi| e^{i\nu_0 ht}}{\langle\varphi|e^{i(\bar{\nu}_0 - \nu_0)ht}|\varphi\rangle}. \quad (180)$$

Skonstruowaliśmy w ten sposób nowy hamiltonian

$$H[1] = H + \frac{\bar{\nu}_0 - \nu_0}{\langle \varphi | e^{i(\bar{\nu}_0 - \nu_0)ht} | \varphi \rangle} e^{-i\nu_0 ht} [|\varphi\rangle\langle\varphi|, h] e^{i\bar{\nu}_0 ht} \quad (181)$$

i odpowiadające mu rozwiązanie równania Heisenberga. Można pokazać, że jeżeli $H = H_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes H_2$ i odpowiednio dobierze się parametr ν_0 oraz warunek początkowy $|\varphi\rangle$, to (181) wprowadza człon oddziaływania znikający dla $t \rightarrow \pm\infty$. Ponieważ $\Psi[0](t)$ może być *dowolnym* rozwiązaniem równania Heisenberga z hamiltonianem H (tj. bez oddziaływania) Twierdzenie 6 pozwala na jawną konstrukcję unitarnej transformacji opisującej dynamikę z oddziaływaniem. Rozwiązania, które w ten sposób się konstruuje mają bardzo podobne własności do rozwiązań samorozproszeniowych, tyle że łatwo można skonstruować przykłady w pełni nieskończenie wymiarowe. Można spekulować, iż taki sposób wprowadzania oddziaływań będzie alternatywą dla teorii pól z cechowaniem.

19 Podziękowania

Pragnę podziękować: Andrzejowi Posiewnikowi, za to, że od pierwszego roku studiów sprawował nade mną opiekę naukową i przekonał, iż pewne stare pytania warto zadawać na nowo. Bronisławowi Jachymowi za desperacką próbę zatrudnienia mnie na Politechnice Gdańskiej jesienią 1987 r. i późniejszą walkę o przywrócenie mnie do pracy. Prof. Ryszardowi Rączce, za to, że w najtrudniejszym okresie umożliwił mi, nieznanemu człowiekowi z ulicy, korzystanie z biblioteki na Hożej, przez parę lat jedynej biblioteki naukowej w Polsce, z której mogłem korzystać na prawach pracownika naukowego i co dawało nadzieję, że nie wszystko stracone. Prof. Bogdanowi Mielnikowi, za poważne potraktowanie mojego listu sprzed 10 lat i późniejszą pomoc. Prof. Iwo Białynickiemu-Biruli, za zaproszenie do studiowania w CFT PAN, co stało się punktem zwrotnym w moim życiu i za wszystko, co z tego faktu wynikło. Prof. Łukaszowi Turskiemu, za życzliwość i wsparcie. Szczególne podziękowanie składam prof. Kazimierzowi Rzążewskiemu, za wiele cennych rad oraz szeroko rozumianą pomoc, bez których praca ta — w dzisiejszym kształcie — z pewnością by nie powstała.

Dużą część materiału tu przedstawionego powstała podczas moich pobytów w Instytucie Arnolda Sommerfelda w Clausthal, najpierw podczas stypendium DAAD i obecnie, podczas stypendium Humboldta. Składam serdeczne podziękowanie prof. Heinzowi-Dietrichowi Dobnerowi za wieloraką pomoc, gościnę i stworzenie wspaniałych warunków do pracy. Bardzo dziękuję Janowi Naudtsowi i Dirkowi Aertsowi za gościnność podczas pobytów w Antwerpii i Brukseli i za owocną współpracę. Prof. Arkadiuszowi Jadczykowi dziękuję za parę „dobrych pytań”, które pozwoliły uniknąć kilku istotnych nieścisłości. Na koniec dziękuję Maciejowi Kunie i Sergiejowi Leble za wiele miesięcy wyteżonej, bardzo twórczej współpracy i Komitetowi Badań Naukowych za wsparcie finansowe w postaci grantu 2 P03B 163 15.

Literatura

- [1] E. H. Lieb, R. Seiringer, J. Yngvason, „Bosons in a Trap: A Rigorous Derivation of the Gross-Pitaevskii Energy Functional”, preprint math-ph/ 9908027.
- [2] M. Czachor, J. Naudts, „Microscopic foundation of nonextensive statistics”, Phys. Rev. E **59**, 2497R (1999).
- [3] M. Czachor, „Lie-Nambu and beyond”, Int. J. Theor. Phys. **38**, 475 (1999).
- [4] J. E. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry* (Springer, New York, 1994).

- [5] B. Mielnik, *Comm. Math. Phys.* **9**, 55 (1968).
- [6] B. Mielnik, *Comm. Math. Phys.* **15**, 1 (1969).
- [7] B. Mielnik, *Comm. Math. Phys.* **37**, 221 (1974).
- [8] D. Aerts, „The One and the Many”, praca doktorska, Vrije Universiteit Brussel (Bruksela, 1981).
- [9] D. Aerts, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 289 (1999).
- [10] M. Czachor, „Nambu-type generalization of the Dirac equation”, *Phys. Lett. A* **225**, 1 (1997).
- [11] M. Czachor, wynik niepublikowany.
- [12] A. Rényi, w *Selected Papers of Alfréd Rényi*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1976).
- [13] M. Czachor, M. Marciniak, „Density matrix interpretation of solutions of Lie-Nambu equations”, *Phys. Lett. A* **239**, 353 (1998). Interesującą dyskusję tego zagadnienia można znaleźć również w M. Przybylska, *Addytywne i multiplikatywne uogólnienia równania Laxa-von Neumanna*, praca doktorska (Toruń, 1999).
- [14] I. Białyński-Birula, P. J. Morrison, *Phys. Lett. A* **158**, 453 (1991).
- [15] Y. Nambu, *Phys. Rev. D* **7**, 2405 (1973).
- [16] S. B. Leble, M. Czachor, „Darboux-integrable nonlinear Liouville-von Neumann equation”, *Phys. Rev. E* **58**, 7091 (1998).
- [17] M. Kuna, M. Czachor, S. B. Leble, „Nonlinear von Neumann-type equations: Darboux invariance and spectra”, *Phys. Lett. A* **255**, 42 (1999).
- [18] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Solitons* (Springer, Berlin, 1991).
- [19] S. B. Leble, N. V. Ustinov, w *International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications (NOLTA '93)*, p. 547 (Hawaii, 1993); A. A. Zaitsev, S. B. Leble, *Rep. Math. Phys.* **39**, 177 (1997); S. B. Leble, *Computers Math. Applic.* **35**, 73 (1998).
- [20] M. Czachor, M. Kuna, S. B. Leble, J. Naudts, „Nonlinear von Neumann-type equations”, w *New Insights in Quantum Mechanics*, pod red. H.-D. Doebnera i in., (World Scientific, Singapore, 1999) — w druku; preprint quant-ph/9904110.
- [21] M. Czachor, H.-D. Doebner, M. Syty, K. Wasylka, „Von Neumann equations with time-dependent Hamiltonians and supersymmetric quantum mechanics”, preprint quant-ph/9907059, wysłany do *Phys. Rev. A*.
- [22] P. Bóna, „Extended Quantum Mechanics”, preprint math-ph/9909022. Artykuł ten, liczący 195 stron, jest najdokładniejszym i matematycznie precyzyjnym przeglądem mechaniki kwantowej rozumianej jako lie-poissonowski układ dynamiczny. „Quantum Mechanics with Mean-Field backgrounds”, preprint Ph10-91 (Bratislava, 1991)
- [23] J. Polchinski, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 397 (1991).
- [24] T. F. Jordan, *Ann. Phys. (N.Y.)* **225**, 83 (1993).
- [25] S. Weinberg, *Ann. Phys. (NY)* **194**, 336 (1989).

- [26] M. Czachor, „Nonlocal-looking equations can make nonlinear quantum dynamics local”, *Phys. Rev. A* **57**, 4122 (1998).
- [27] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems* (Academic Press, 1976).
- [28] T. Ando, M.-D. Choi, w *Aspects of Positivity in Functional Analysis*, pod red. R. Nagel, U. Schlotterbeck, B. V. Wolff (North-Holland, Amsterdam, 1986).
- [29] W. Arveson, *Contemp. Math.* **62**, 282 (1987).
- [30] W. A. Majewski, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23**, L359 (1990).
- [31] R. Alicki, W. A. Majewski, *Phys. Lett. A* **148**, 69 (1990).
- [32] M. Czachor, M. Kuna, „Complete positivity of nonlinear evolution: A case study”, *Phys. Rev. A* **58**, 128 (1998).
- [33] M. Czachor, M. Kuna, S. B. Leble, N. Ustinov, H.-D. Doebner, „Interactions via Darboux transformations: An alternative to gauge fields?”, wysłany do *Phys. Rev. Lett.*
- [34] M. Czachor, M. Kuna, „Off-shell triple bracket generalization of the Dirac equation”, *Group 21 - Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups, and Algebras*, pod redakcją H.-D. Doebnera, P. Nattermanna i W. Scherera, str. 451-455 (World Scientific, Singapore, 1997)
- [35] M. Czachor, „Bargmann-Wigner spinors”, w *Photon and Poincare Group*, ed. V. V. Dvoeglazov, str. 32-62 (Nova Science, 1999)
- [36] J. Naudts, M. Czachor, „Dynamic and thermodynamic stability of non-extensive systems”, *Nonextensive Statistics and its Applications*, Lecture Notes in Physics, Springer — w druku.