

O sposobach nieistnienia

„Jak wiadomo, smoków nie ma. Prymitywna ta konstatacja wystarczy może umysłowi prostackiemu, ale nie nauce, ponieważ Wyższa Szkoła Neantyczna tym, co istnieje, wcale się nie zajmuje; banalność istnienia została już udowodniona zbyt dawno, by warto jej poświęcać choćby jedno jeszcze słowo...”

Stanisław Lem, *Siedem wypraw Trurla i Klapaucjusza*

Twierdzenie Bella jest jednym z bardziej frapujących odkryć fizyki kwantowej. Sformułowane zostało w 1964 r. przez Johna S. Bella, fizyka z genewskiego CERN, jako wariant tzw. paradoksu Einsteina-Rosena-Podolskiego. Ujmując rzecz skrótowo, twierdzenie głosi, iż należy zachować jak najdalej idącą ostrożność w wypowiedzaniu się na temat zdarzeń, które *mogłyby* się wydarzyć, ale niemniej *nie* wydarzyły się.

Matematyka dowodu jest bardzo prosta, dostępna każdemu kto zna podstawowe własności zbiorów i rachunku prawdopodobieństwa. Pomimo prostoty „technicznej”, twierdzenie ociera się o subtelności natury logicznej trudne do uchwycenia i precyzyjnego sformułowania. Efektem owych trudności jest niegasnąca i pełna emocji dyskusja w pewnych kręgach fizyków, logików i filozofów. W czasach dzisiejszych dyskusja ta nabrała również wymiaru zdumiewająco przyziemnego. Okazuje się bowiem, iż twierdzenie Bella przekłada się bezpośrednio na pewne problemy związane z bezpieczeństwem szyfrowania danych. Praca autorstwa polskiego fizyka z Cambridge, Artura Ekerta, pokazująca istnienie takiego związku, jest obecnie najczęściej cytowaną pracą z dziedziny kryptografii.

Pierwszym krokiem konstrukcji prowadzącej do tezy twierdzenia jest pewna nierówność, zwana nierównością Bella.

Zanim jednak do niej dojdziemy, musimy zrozumieć parę etapów pośrednich.

Nierówności

Spośród różnych relacji matematycznych charakteryzujących prawdopodobieństwa, szczególną rolę odgrywają nierówności. Przykładowo, dla dowolnego prawdopodobieństwa p zachodzi $0 \leq p \leq 1$. Nierówność ta jest w sposób oczywisty spełniana w każdym eksperymencie, gdzie przyjmuje postać $p = N_1/N$; N_1 jest liczbą „trafień” przy N próbach, a liczba trafień nie może być większa od liczby prób.

Inny rodzaj nierówności pojawia się dla wartości średnich (oczekiwanych) zmiennych losowych. Dla przykładu, jako zmienną losową weźmy wynik rzutu kostką do gry. Wynikami mogą być: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Przy N rzutach zanotujemy N_1 jedynek, N_2 dwójek, N_3 trójek, itd. Wartością średnią liczby oczek jest

$$\langle N \rangle = N_1/N + 2 N_2/N + 3 N_3/N + 4 N_4/N + 5 N_5/N + 6 N_6/N.$$

Jak się łatwo przekonać, niezależnie od rodzaju kostki zawsze zachodzi $1 \leq \langle N \rangle \leq 6$. 1 odpowiada sytuacji, gdy zawsze wypada jedynek, 6 gdy zawsze wypada szóstka.

Jeszcze inny typ nierówności pojawia się, gdy myślimy w kategoriach zbiorów. Prawdopodobieństwo, że coś należy do zbioru A nie może być mniejsze, niż prawdopodobieństwo, że to coś nie tylko należy do A , ale dodatkowo również do jakiegoś innego zbioru B , czyli, w notacji matematycznej, $p(A \cap B) \leq p(A)$. Przykładowo, prawdopodobieństwo, że zabawka w pokoju mojego dziecka jest klockiem nie może być mniejsze niż prawdopodobieństwo, iż zabawka jest czerwonym klockiem, gdyż czerwonych klocków nie może być więcej niż wszystkich klocków.

Jako szczególne zastosowanie takiej właśnie nierówności, rozpatrzmy nierówność dla trzech zbiorów zdarzeń, mówiącą, że prawdopodobieństwo posiadania trzech własności A, B, C , nie jest większe niż prawdopodobieństwo posiadania dwóch z nich, czyli $p(A \cap C \cap B) \leq p(A \cap B)$. Niech zbiór A odpowiada przedmiotom przyciąganym przez magnes, B – przedmiotom pływającym na powierzchni wody. Przy pomocy magnesu i wody możemy oddzielić śrut od kulek pingpongowych, umieszczając nad naczyniem magnes lub wlewając do naczynia wodę. Zdarzenie należące do $A \cap B$ polega na znalezieniu przedmiotu przyciąganego przez magnes i równocześnie pływającego w wodzie. Prawdopodobieństwo $p(A \cap B) = 0$, gdyż to, co jest przyciągane przez magnes, nie chce pływać. Załóżmy teraz, że śrut i piłki mogą być zarówno czarne jak i białe, a zbiór białych przedmiotów oznaczmy jako C . Zbiorowi $A \cap C$ odpowiada wyciągnięcie białej kulki śrutu, a $B \cap C$ – białej piłki, itd. Oczywistym jest, iż $p(A \cap C \cap B) = 0$, gdyż to, co przyciąga magnes, nie chce pływać, nawet jeśli ograniczyć się do jedynie do białych przedmiotów.

Czytelnik dziwi się może, czemu dzielę włos na czworo w kwestii tak oczywistej? Zastąpmy więc nasz A zbiorem fotonów przepuszczonych przez polaryzator liniowy, przepuszczający światło spolaryzowane w płaszczyźnie pionowej, B – to samo dla polaryzatora ustawionego poziomo, a C – dla polaryzatora nachylonego pod kątem 45 stopni względem pozostałych dwóch. Fotony pełnią rolę kulek z poprzedniego przykładu. Prawdopodobieństwo przejścia przez idealny polaryzator wynosi $1/2$. Prawdopodobieństwo przejścia przez drugi polaryzator, ustawiony za nim, wynosi $\cos^2 \alpha$, gdzie α to kąt między polaryzatorami. Jest to tzw. prawo Malusa. Jeżeli polaryzatory ustawione są prostopadle, to $p(A \cap B) = 0$. Jednakże, jeżeli wstawić pomiędzy dwa prostopadłe polaryzatory polaryzator nachylony pod kątem 45 stopni, to $p(A \cap C \cap B) = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$. Jeżeli więc *zawsze* musi zachodzić $p(A \cap C \cap B) \leq p(A \cap B)$, to $1/8 \leq 0$ co, jako żywo, prawdą nie jest. Analogiczny problem pojawia się, gdy zamiast fotonów weźmiemy elektrony, zamiast polaryzatorów odpowiednio skonstruowane magnesy, a polaryzację liniową zastąpimy momentem magnetycznym. Odpowiednik prawa Malusa zawiera teraz prawdopodobieństwo warunkowe $\cos^2(\alpha/2)$, gdzie α to kąt między magnesami. Kąt połówkowy bierze się z faktu, iż $p(A \cap B) = 0$ gdy odwrócimy drugi magnes do góry nogami (czyli o 180 stopni), a nie o 90 stopni, jak to ma miejsce dla polaryzatorów.

Prawo Malusa potwierdzone jest w niezliczonych eksperymentach i nie budzi wątpliwości. Coś więc najwyraźniej jest nie tak z naszym pojęciem prawdopodobieństwa opartego o intuicje z teorii zbiorów. Odkładając na później analizę tego zjawiska, sformułujmy kilka uwag. Sprzeczność, którą uzyskaliśmy, jest prostym przykładem trudności, na które trafia się próbując pogodzić zwykły „szkolny” rachunek prawdopodobieństwa z mechaniką kwantową. Nierówność Bella jest trudnością podobnej natury, lecz głębszą. Okazuje się, że problem jest ogólniejszy i nie tkwi wcale w mechanice kwantowej, przynajmniej jeśli chodzi o prawo Malusa.

Prawo Malusa dla budzika

Poniższy przykład podał Dirk Aerts z Brukseli w 1986 r. Uważam go za obowiązkowe ćwiczenie dla każdego, kto chce zrozumieć trudności z klasycznymi nierównościami pojawiające się w mechanice kwantowej.

Rozpatrzmy tarczę budzika. Umawiamy się, że zegar ma trzy wskazówki tej samej długości: czarną godzinową, czerwoną minutową i żółtą do ustawiania budzenia. Masę m umieszczamy na końcu żółtej wskazówki i na oślep ustawiamy godzinę budzenia. Następnie bierzemy dwie masy m_1, m_2 , których sumę znamy, np. $m_1 + m_2 = 1\text{g}$, ale nie znając z osobna wartości m_1 i m_2 . Masę m_1 przyklejamy na końcu wskazówki godzinowej (czarnej), a m_2 na końcu minutowej (czerwonej). Następnie ustawiamy godzinę na zegarze w taki sposób, żeby wskazówki czarna i czerwona skierowane były przeciwnie, np. na 8:11, i mierzymy siły przyciągania grawitacyjnego między masami. Jeżeli przyciąganie jest silniejsze między m i m_1 , niż między m i m_2 , przesuwamy wskazówkę budzenia na wskazówkę godzinową; w przeciwnym przypadku przesuwamy ją na wskazówkę minutową. W pierwszym wypadku mówimy, że wynikiem pomiaru jest +1 a w drugim, że -1. Następnie usuwamy m_1 i m_2 , a m pozostawiamy na wskazówce budzenia w jej nowym ustawieniu. Jako etap kolejny, ponownie zmieniamy godzinę na, przykładowo, 12:33 i powtarzamy procedurę używając na nowo losowo wybranych mas, m'_1 i m'_2 , spełniających $m'_1 + m'_2 = 1\text{g}$.

Obliczmy teraz prawdopodobieństwa wyniku +1 przy pierwszym pomiarze, oraz prawdopodobieństwa wyników +1 i -1 w drugim eksperymencie, pod warunkiem, że pierwszy pomiar dał +1. W pierwszym eksperymencie prawdopodobieństwo związane jest z brakiem informacji o dwóch zmiennych: położeniu masy m oraz wartości masy m_1 . W drugim eksperymencie położenie m znamy, ale nie znamy wartości masy m'_1 . Zakładając, że podział 1g masy na m_1 i m_2 oraz m'_1 i m'_2 odbywa się losowo i że wszystkie możliwe rozkłady są równie prawdopodobne, oraz wykorzystując wzór Newtona na siłę grawitacyjną, uzyskujemy następujące prawdopodobieństwa: $p(8:11,+1) = 1/2$ (pierwszy eksperyment z nieznanym położeniem masy m), $p(8:11,+1 \cap 12:33,+1) = \frac{1}{2} \cos^2(\alpha/2)$, gdzie α to kąt pomiędzy wskazówkami godzinowymi w obu eksperymentach. Uzyskaliśmy więc prawo Malusa dla elektronów, które sprzeczne jest, jak już wcześniej ustaliliśmy, z nierównością $p(A \cap C \cap B) \leq p(A \cap B)$!

Stało się coś dziwnego. Matematyka i fizyka, których użyliśmy, nie wykraczają poza poziom szkoły średniej, a sprzeczność pojawia się na poziomie innego, równie prostego rozumowania.

Żeby zrozumieć o co chodzi, zauważmy wpierw, iż koniunkcje postaci $8:11,+1 \cap 12:33,+1$ mają sens jedynie dla zdarzeń występujących *jedno po drugim*. Koniunkcja taka znaczy: „przy ustawieniu wskazówek na 8:11 masa m spadła na wskazówkę godzinową; przy *kolejnym* pomiarze wykorzystującym ustawienie 12:33 ponownie spadła na wskazówkę godzinową”. Zwróćmy uwagę, że nie mamy wcale gwarancji, iż przy odwróceniu kolejności pomiarów, tj. wpierw 12:33, a potem 8:11, uzyskalibyśmy ponownie wyniki +1 i +1. Dzieje się tak dlatego, że pierwszy pomiar *zmienia* położenie masy m na zegarze i to w sposób różny dla różnych ustawień wskazówek.

Jak widać, w omawianym eksperymencie nie możemy założyć nawet, że „ A i B ” to logicznie to samo co „ B i A ”, gdyż porządek zdarzeń nie jest bez znaczenia. Zdarzenie A zawiera w sobie stwierdzenie „masa m osiągnęła wskazówkę godzinową lub minutową ustawione na 8:11”, podczas gdy zdarzenie B to „masa m osiągnęła wskazówkę godzinową lub minutową ustawione na 12:33”. Ma to sens dla zdarzeń pojawiających się jedno po drugim, ale nie dla zdarzeń zachodzących równocześnie! Oczywiście, ponieważ dla zbiorów zawsze zachodzi $B \cap A = A \cap B$, wnioskujemy, iż prawdopodobieństw koniunkcji nie da się tu modelować przy pomocy algebry zbiorów.

Gdybanie probabilistyczne

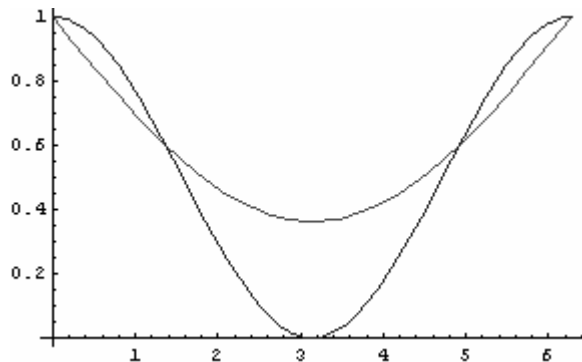
Wyjaśnijmy sobie jeszcze jedną kwestię. Wynik każdego pomiaru jest jednoznacznie określony przez położenie masy m oraz wielkość masy m_1 , gdyż wystarczy obliczyć siły przyciągania grawitacyjnego pomiędzy m i m_1 oraz

m i m_2 przy konkretnym ustawieniu wszystkich trzech wskazówek budzika. Prawdopodobieństwa pojawiają się, gdy brakuje nam części danych. Przypomnijmy, że przed pierwszym pomiarem nie mamy żadnej informacji, a po pierwszym pomiarze znamy już położenie masy m . Położenie to jest jednoznacznie określone przez wynik pierwszego pomiaru. Zagadnienie jest zupełnie klasyczne, dlaczego zatem modelowanie prawdopodobieństw przez zbiory nie ma mimo wszystko zastosowania?

Zauważmy, iż prawdopodobieństwo znalezienia masy m na końcu czarnej wskazówki po pierwszym pomiarze wynosi $\frac{1}{2}$. A ile wynosiło prawdopodobieństwo znalezienia masy m na końcu tejże czarnej wskazówki... przed pierwszym pomiarem, czyli „prawdopodobieństwo warunku”? Zero! Niemniej, prawdopodobieństwo warunkowe jest tu dobrze zdefiniowane, gdyż dla drugiego pomiaru istotne jest gdzie znajduje się masa m po pierwszym pomiarze, a nie przed. Akt uwarunkowania *nie* polega tu jedynie na *uzyskaniu informacji* o układzie, czyli określeniu w jakim podzbiore wszystkich możliwych wartości znajduje się badana cecha układu, lecz dodatkowo *zmienia* on układ poprzez przeniesienie masy m z nieznanego położenia na koniec jednej z dwóch wskazówek budzika. Sytuacja taka jest niemożliwa do poprawnego opisu przez prawdopodobieństwa modelowane na zbiorach i związana jest z tzw. paradoksem Borela znanym z klasycznego rachunku prawdopodobieństwa.

Natomiast zupełnie inne zagadnienie pojawia się, gdy zapytamy „jakie jest prawdopodobieństwo trafienia w taką kombinację mas i położzeń, że gdybyśmy ustawili wskazówki na 8:11 to uzyskalibyśmy +1, przy czym +1 uzyskalibyśmy również wtedy, gdybyśmy *zamiast* 8:11 wybrali 12:33”. Problem jest podobny do poprzedniego, jeżeli pominąć ruch masy m . Ponieważ położenie masy m określić można przez podanie kąta $0 \leq \theta < 360$ stopni, a masa m_1 spełnia warunek $0 \leq m_1 \leq 1g$, jako przestrzeń parametrów możemy przyjąć prostokąt $[0,360] \times [0,1]$. Trzeba teraz określić jak, dla konkretnego ustawienia wskazówek godzinowej i minutowej, wygląda zbiór parametrów postaci (θ, m_1) , dla których siła przyciągania pomiędzy masami m oraz m_1 jest większa niż dla mas m i m_2 , obliczyć to dla dwóch różnych ustawień wskazówek, wziąć część wspólną, wreszcie policzyć jej pole i podzielić przez 360, czyli pole całego prostokąta. Prawdopodobieństwo tak wyliczone nie złamie żadnej nierówności, którą można wyprowadzić w ramach modelu opartego o algebrę zbiorów, ale w szczególności na pewno nie uzyskamy prawa Malusa. Na Rys. 1 krzywa niebieska opisuje prawdopodobieństwo warunkowe $\cos^2(\alpha/2)$ a

krzywa czerwona odpowiednie prawdopodobieństwo dla problemu z gdybaniem, jako funkcje kąta pomiędzy wskazówkami godzinowymi.



Rys. 1

Komplementarność

Według Nielsa Bohra dwie wielkości fizyczne nazywamy komplementarnymi, jeżeli wiedza na temat jednej z nich wyklucza lub zaburza znajomość drugiej. Bohr przyzwyczaił nas do istnienia wielkości komplementarnych w mechanice kwantowej, lecz każdy z Czytelników po chwili zastanowienia poda jakiś przykład z życia wzięty. W kontekście prawa Malusa dla budzika komplementarne są wyniki pomiarów dla 8:11 i 12:33. Rzeczywiście, w momencie, gdy decydujemy się na sprawdzenie wyniku dla jednego konkretnego ustawienia wskazówek, tak dalece i *nieodwracalnie* niszczyliśmy informację na temat wyniku ewentualnego *alternatywnego* pomiaru, że traci sens pojęcie koniunkcji obu zmiennych losowych. Mówiąc dokładniej, istotnym elementem definicji wyniku pomiaru było dotarcie masy m do jednej z dwóch wskazówek, a przecież masa ta nie może równocześnie dotrzeć do dwóch różnych miejsc. W tym przypadku, prawdopodobieństwa wyliczone na podstawie gdybania mają się nijak do częstości występowania wyników w konkretnych praktycznych eksperymentach. Nie ma natomiast kłopotów z pomiarami wielkości komplementarnych wykonywanych jeden po drugim.

Dotarliśmy do niezwykle ważnego punktu naszego rozumowania, więc pójdźmy jeszcze trochę głębiej.

Zmienne losowe, które rozważaliśmy, można było wyrazić przy pomocy funkcji przyporządkowujących wartości $+1$ lub -1 parametrom (θ, m_1) określającym konfigurację mas m , m_1 i m_2 . W pierwszym eksperymencie, funkcja taka przyjmuje wartość $A(\theta, m_1) = +1$, jeżeli siła Newtona pomiędzy masami m i m_1 jest większa od siły pomiędzy masami m i m_2 . Chcąc określić wartość oczekiwaną zmiennej losowej A musimy znać rozkłady prawdopodobieństwa dla obu parametrów, czyli jaki procent pola powierzchni prostokąta $[0,360] \times [0,1]$ zajmują punkty (θ, m_1) spełniające $A(\theta, m_1) = +1$. W drugim eksperymencie mamy zmienną losową $B(\varphi, m'_1)$, gdzie φ określa położenie wskazówki godzinowej, lecz średnie i prawdopodobieństwa obliczamy jedynie względem zmiennej m'_1 . Tak więc zmienne losowe $A(\theta, m_1)$ i $B(\varphi, m'_1)$ są funkcjami określonymi, odpowiednio, na prostokącie $[0,360] \times [0,1]$ i odcinku $[0,1]$. Precyzyjniejsze byłoby zapisanie drugiej zmiennej losowej jako $B_\varphi(m'_1)$. Trzeba wykazać dużą ostrożność przy rozpatrywaniu zmiennej losowej odpowiadającej np. iloczynowi lub sumie wyników z pierwszego i drugiego pomiaru, gdyż prawdopodobieństwo losowego trafienia w $\theta = \varphi$ jest zerowe, więc nie wolno

bezkrytycznie dzielić przez prawdopodobieństwo „warunku” $\theta=\varphi$ (na tym właśnie oparty jest pozorny paradoks odkryty przez Borela). Rzecz jasna, nie ma problemu z policzeniem wartości oczekiwanej odpowiedniej zmiennej losowej, trzeba tylko pamiętać, iż koniunkcje rozumiane są w sensie wartości pomiarów dla eksperymentów robionych jeden po drugim.

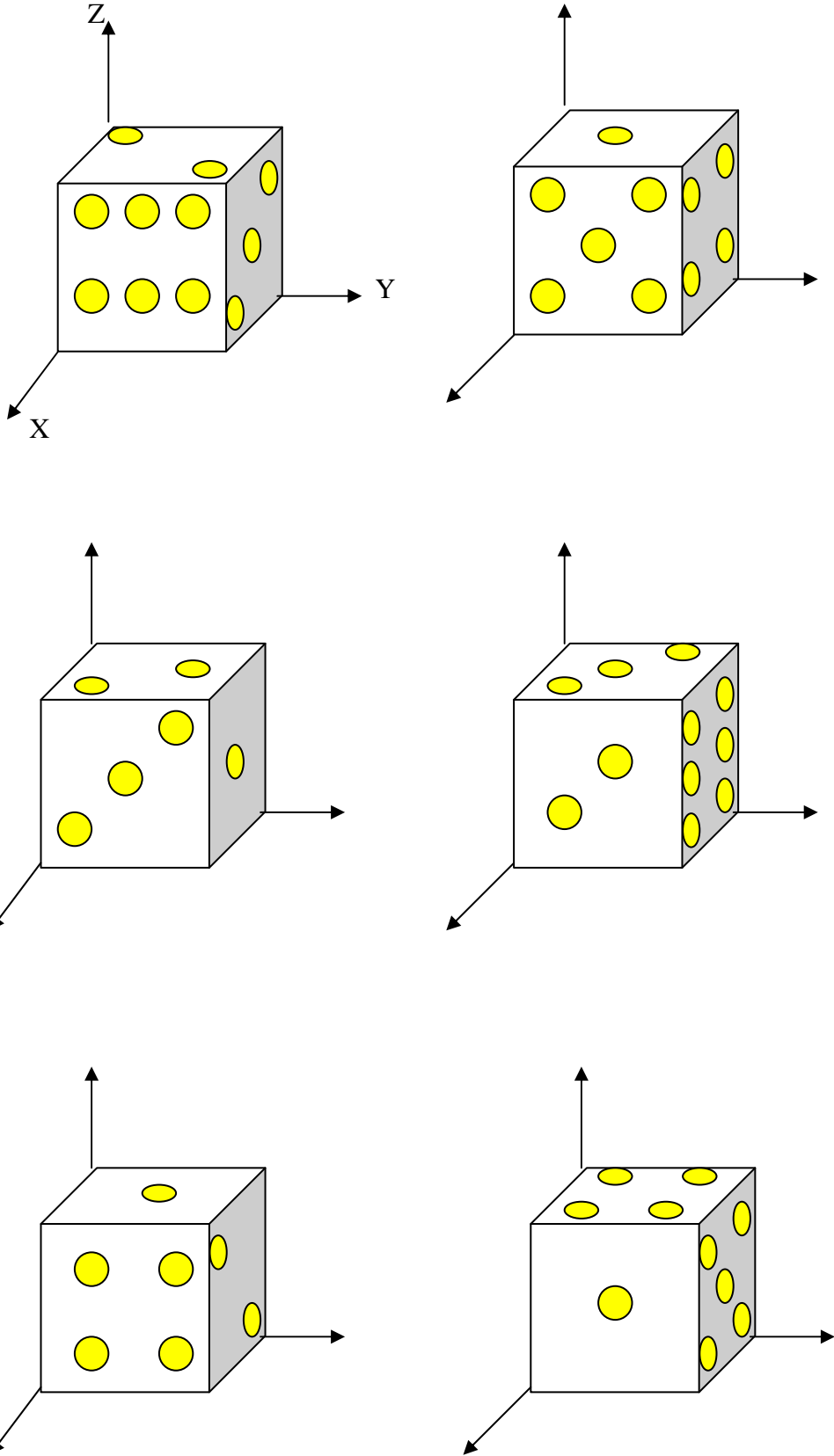
Dlatego też nie wolno po prostu pomnożyć $A(\theta,m_1)B(\theta,m_1)$ lub dodać $A(\theta,m_1)+B(\theta,m_1)$, gdyż odpowiadałoby to zagadnieniu opartemu o gdybanie, a więc innemu problemowi.

Korelacje

Ostatnim brakującym elementem układanki jest zrozumienie pojęcia *korelacji* między zdarzeniami.

Rozpatrzmy jako przykład urządzenie produkujące pary kostek do gry. Urządzenie skonstruowane w taki sposób, że kostki z każdej pary ustawione są do siebie ściankami posiadającymi taką samą liczbę kropek, p . Rys. 2. Z kostką (jak z każdym sześcianiem) można związać trzy osie współrzędnych, w sposób pokazany na rysunku. Ponadto, każda ścianka naturalnie definiuje zmienną losową równą $+1$ jeżeli liczba jej kropek jest parzysta i -1 , jeśli jest nieparzysta. Ową zmienną losową, odpowiadającą ściance prostopadłej do osi x , y , lub z , oznaczmy, odpowiednio, jako A_x, A_y, A_z . Wprowadźmy jeszcze zmienne losowe odpowiadające kierunkom $-x$, $-y$, lub $-z$, czyli A_{-x}, A_{-y}, A_{-z} . Ponieważ, jak wiadomo, suma kropek na przeciwległych ściankach kostki wynosi 7, więc jeżeli na jednej ściance liczba oczek jest parzysta, to na przeciwległej musi być nieparzysta. Innymi słowy, $A_{-x} = -A_x$, itd., przy czym zawsze wynosi ona $+1$ lub -1 . Ponieważ urządzenie produkuje pary kostek, więc takie zmienne losowe możemy związać z każdą z kostek. Oznaczajmy je literą A dla kostki lewej, a B dla kostki prawej. Dodatkowo mamy więc zmienne B_x, B_y, B_z o analogicznych własnościach jak poprzednio. Z rysunku widać, że zawsze zachodzi również $A_x = -B_x, A_y = -B_y, A_z = -B_z$. Ten ostatni ciąg równości nazywamy właśnie korelacją pomiędzy zmiennymi losowymi A i B . Jest to nawet tzw. idealna lub pełna korelacja, gdyż dokonując pomiaru zmiennej losowej na jednej kostce (czyli sprawdzając, czy liczba oczek na danej ściance jest parzysta, czy nie), automatycznie dowiadujemy się, iż odpowiedni wynik dla drugiej kostki musi być przeciwny.

Rys. 2



Nierówność Bella

Niech teraz A i A' będą dowolnymi zmiennymi losowymi równymi $+1$ lub -1 , związanymi z kostką lewą, a B i B' dowolnymi analogicznymi zmiennymi losowymi związanymi z kostką prawą. Przykładowo, $A = A_x$, $A' = A_y$, $B = B_x$, $B' = B_z$, lub jakakolwiek inna kombinacja tych lub jeszcze innych zmiennych losowych, byle przyjmowały jedynie wartości $+1$, -1 . Utwórzmy następnie nową zmienną losową $C = AB + AB' + A'B - A'B'$. W naszym przykładzie oblicza się ją dla pojedynczej pary kostek poprzez policzenie oczek na ściankach odpowiadających zmiennym $A = A_x$,

$A' = A_y$, $B = B_x$, $B' = B_z$, następnie wykonaniu odpowiednich działań po podstawieniu wartości zmiennych losowych, które znajdziemy dla tej konkretnej pary. Twierdzę, że jakiegokolwiek wyboru dokonamy i jakiegokolwiek kombinacje plusów i minusów nam wyjdą, wartością C zawsze okaże się $+2$ lub -2 . Dowód jest natychmiastowy.

$C = AB + AB' + A'B - A'B' = A(B + B') + A'(B - B')$. Jeśli $B - B' \neq 0$, to $B + B' = 0$ i odwrotnie, ale wtedy człon, który jest różny od 0 wynosi $+2$ lub -2 . Wynika z tego ważna nierówność dla wartości oczekiwanej, $-2 \leq \langle C \rangle \leq 2$. Jest to właśnie osławiona nierówność Bella, zazwyczaj podawana w postaci jawnie rozpisanej, jako

$$|\langle AB \rangle + \langle AB' \rangle + \langle A'B \rangle - \langle A'B' \rangle| \leq 2.$$

Na pierwszy rzut oka jest to nierówność bardzo ogólna, stosująca się do wszystkich zmiennych losowych przyjmujących wartości $+1$ i -1 . Sprawdźmy, czy jest ona spełniona w eksperymencie z budzikiem, jeżeli zmiennymi A będą wyniki pierwszych pomiarów, a B – drugich. Łatwo pokazać, iż dla naszego budzika

$\langle AB \rangle = \cos \alpha_{AB}$, gdzie α_{AB} jest kątem między wskazówkami godzinowymi dla pierwszego i drugiego pomiaru. Wybierzmy teraz następujące ustawienia wskazówek godzinowych: $A = 1:30$, $A' = 10:30$, $B = 12:00$, $B' = 3:00$. Uzyskujemy średnie $\langle AB \rangle = \langle AB' \rangle = \langle A'B \rangle = \cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\langle A'B' \rangle = \cos 135^\circ = -1/\sqrt{2}$, a więc $\langle C \rangle = 2\sqrt{2} \approx 2,83$, czyli sporo powyżej górnego ograniczenia narzuconego przez nierówność Bella.

Czytelnik zapewne nie jest szczególnie wstrząśnięty złamaniem kolejnej nierówności - zdążyliśmy już się przyzwyczaić do paradoksalnych własności naszego budzika. Niemniej pouczające jest zastanowienie się nad formalną przyczyną kłopotu. Tkwi ona w prawie Malusa, co widać ze wzoru $\cos \alpha = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2)$, gdzie pierwszy wyraz to suma prawdopodobieństw wyników $A = +1$, $B = +1$ oraz $A = -1$, $B = -1$; drugi wyraz odpowiada zdarzeniom $A = +1$, $B = -1$ oraz $A = -1$, $B = +1$, a uśredniamy iloczyn wyników pierwszego i drugiego pomiaru. Ponadto popełniliśmy *co najmniej* jedno nadużycie. Założyliśmy bowiem, iż to samo B występuje w iloczynach AB oraz $A'B$, a przecież B odpowiada pomiarowi wykonanemu po uprzednim zmierzeniu A lub A' , które to pomiary zmieniają stan budzika w zupełnie inny sposób. Bardziej prawidłowe byłoby pisanie B_A oraz $B_{A'}$, gdzie dolny indeks zaznacza rodzaj uprzedniego pomiaru. Ale wtedy mamy do czynienia ze zmienną losową $C = AB_A + AB'_{A'} + A'B_A - A'B'_{A'} = A(B_A + B'_{A'}) + A'(B_A - B'_{A'})$ i nie możemy zakładać, iż $B_A + B'_{A'} = 0$ implikowane jest przez $B_{A'} - B'_{A'} \neq 0$, gdyż są to zupełnie inne zmienne losowe. Jedynym ograniczeniem, jakie z pewnością zachodzi, to $-4 \leq \langle C \rangle \leq 4$. O przypadku, gdy $B_A \neq B_{A'}$ mówimy, że jest *nielokalny*, określenie, które stanie się jaśniejsze w dalszej części. Bell, w swej słynnej pracy, zwrócił uwagę na tę właśnie możliwość obejścia nierówności. Zobaczmy

wkrótce, czemu jest to problem o wadze zupełnie zasadniczej dla naszego rozumienia świata kwantowego.

Dwa połączone budziki

Rozpatrzmy teraz *dwa* budziki, lewy i prawy, posiadające wspólny mechanizm ustawiania budzenia. Chodzi o to, żeby jedna osoba była zawsze budzona 6 godzin później niż druga i żeby można to było ustawiać za jednym zamachem. Przekręcając wskazówkę budzenia na jednym zegarze np. na 5:00, automatycznie drugi ustawia się na 11:00, itd. Poza tym budziki są od siebie niezależne. Przeprowadźmy teraz na naszej parze budzików pomiary przyjmując, iż pierwszy pomiar wykonujemy na lewym budziku, a drugi na prawym. Wynik $A=+1$ dla ustawienia 8:11 powoduje przestawienie się żółtej wskazówki na lewym budziku z miejsca, w którym była, na 8:11. Natomiast pomiar ten powoduje przestawienie się wskazówki budzenia na prawym budziku na 2:11. Następnie dokonujemy pomiaru zmiennej B na prawym budziku dla ustawienia 12:33 (nawiasem mówiąc, nie da się takich pomiarów wykonać równocześnie bez zepsucia mechanizmu ustawiania budzenia). Rozumowanie dokładnie takie jak poprzednio prowadzi do prawdopodobieństw $p(8:11,+1)=1/2$, $p(8:11,+1 \cap 12:33,+1)=\frac{1}{2} \sin^2(\alpha/2)$, gdzie α to kąt pomiędzy wskazówkami godzinowymi w obu eksperymentach, a średnia wykorzystywana w nierówności Bella wynosi $\langle AB \rangle = -\cos \alpha_{AB}$, więc nierówność znowu jest złamana, z przyczyn identycznych jak dla jednego budzika.

Sedno sprawy: stany splątane

Sedno sprawy tkwi w fakcie, iż dwa fotony wyemitowane w pewnych procesach atomowych prowadzą do analogicznych prawdopodobieństw, dokładniej do $\langle AB \rangle = -\cos(2\alpha_{AB})$. O parach fotonów posiadających te własności mówimy, iż są w stanie maksymalnie splątany. Podobnie jak w wypadku jednofotonowego prawa Malusa, rolę budzików przejmują polaryzatory.

Zauważamy pozorne podobieństwo dwóch takich fotonów do pary kostek do gry.

Prawdopodobieństwa wyników $+1$ dla pierwszego pomiaru, czyli zmiennej losowej A , wynoszą w obu przypadkach $\frac{1}{2}$ (jest taka sama szansa trafienia w nieparzystą liczbę oczek jak w parzystą; taka sama jest szansa, że foton przejdzie przez polaryzator, jak że nie przejdzie). Jeżeli wybrać polaryzatory równolegle, to jeżeli lewy foton przez niego przejdzie, to drugi nie- i odwrotnie. Dla kostek jest tak samo: jeżeli mierzymy liczbę oczek na lewej kostce, to wynik parzysty oznacza nieparzystą liczbą na drugiej kostce. Obrotowi polaryzatora o 90 stopni odpowiada wybór przeciwległej ścianki. Tyle, że kostki nie łamią nierówności Bella, a fotony - tak.

Pytanie postawione przez Einsteina, Rosena i Podolskiego w 1935 r., a przeformułowane dla polaryzacji, brzmi następująco: Czy jest możliwe, żeby polaryzacje fotonów nie istniały w jakimś zdroworozsądkowym sensie już przed pomiarem, jeżeli mierząc polaryzację fotonu lewego i uzyskując wynik $+1$ wiemy z *całą pewnością*, jaki wynik *da* analogiczny pomiar przeprowadzony na drugim fotonie?

Bell udzielił odpowiedzi znanej obecnie jako twierdzenie Bella: Jeżeli polaryzacje istnieją w jakimkolwiek sensie przed pomiarem, to uzasadnione jest gdybanie, a więc powinna być spełniona nierówność Bella, chyba że dwa takie fotony przez cały czas kontaktują się z sobą w jakiś niepojęty sposób. Stąd pytanie do eksperymentatorów: Jeżeli A jest mierzone na Ziemi, a B

gdzieś w gwiazdozbiornie Centaura, to czy wciąż zachodzić będzie prawo Malusa $\langle AB \rangle = -\cos(2\alpha_{AB})$? W warunkach laboratoryjnych prawo Malusa dla par takich fotonów sprawdził Alain Aspect z Orsay ponad 20 lat temu i wszystko się zgadza, mimo, iż prędkość propagacji tajemniczego sygnału musiałaby co najmniej kilkakrotnie przekraczać prędkość światła. Szczerze powiedziawszy, nie wierzę w takie nielocalne, „telepatyczne” kontakty, chociaż – kto wie?

Gdzie szukać rozwiązania?

Jeżeli wykluczmy szybsze od światła kontakty telepatyczne, to czy pozostaje jakaś dziura w całym? Okazuje się, że jest jeszcze kilka dziur, o czym może innym razem, ale zwróćmy uwagę na jedną zasadniczą.

Zmienną losową C da się zmierzyć dla jednej pary kostek, ale nie dla pary budzików lub fotonów. Osobno trzeba przeprowadzać pomiary dla każdej z czterech zmiennych losowych AB , AB' , $A'B$, $A'B'$. Wynik pomiaru zmiennej AB uzyskany dla pierwszej pary jest zupełnie niezależny od wyniku pomiaru AB' dla pary kolejnej, a więc A w pierwszym członie sumy $AB+AB'$ to nie to samo A co w członie drugim. Wyciągnięcie A przed nawias w równości $AB+AB' = A(B+B')$ wymaga dodatkowych uzasadnień – można się spierać, czy są one „oczywiste”, czy nie. Nie ulega wątpliwości, iż jeżeli założymy lokalność, to pomiar A nie zakłóca pomiaru B i oba pomiary można wykonać równocześnie na dwóch różnych fotonach z tej samej pary. Ale żeby zmierzyć $AB+AB'$ potrzebujemy pomiarów *trzech* zmiennych losowych A , B i B' , a fotony są *dwa*. Tak więc dwie zmienne losowe, B i B' , odnoszą się do jednego fotonu i natrafiamy na problem analogiczny do budzika gdzie, jak ustaliliśmy, sytuacja odpowiadająca rzeczywistym pomiarom prowadziła do innych prawdopodobieństw niż rozumowanie oparte o gdybanie.

W przypadku dwóch połączonych budzików stwierdziliśmy, iż zmienne $B_A, -B'_A$ oraz $B_{A+B'_A}$ są niezależne od siebie, co uniemożliwiało wyprowadzenie nierówności Bella. Wydaje się jednak, iż ograniczenie jest głębsze: możliwe jest, iż same zmienne losowe postaci $B \pm B'$ (a więc również zmienna C o wartościach ± 2) dla polaryzatorów są logicznie *bezsensowne* również w przypadku lokalnym, nawet jeżeli za polaryzacjami kryją się jakieś elementy rzeczywistości, tak jak to miało miejsce dla budzika.

Powyższe stwierdzenie wielu moich kolegów po fachu uzna zapewne za herezję. Uważa się dość powszechnie, iż tzw. lokalny realizm, czyli połączenie lokalności z *jakąkolwiek* formą istnienia polaryzacji przed pomiarem, jest wykluczone przez rozumowanie oparte o nierówność Bella. Ja tego związku nie widzę i wcale nie zdziwię się, gdy ktoś wreszcie wymyśli przekonujący kontrprzykład do twierdzenia Bella. Przyznać wszak trzeba, iż wszystkie znane mi próby, włącznie z moimi własnymi, nie dały wyniku w pełni zadawalającego. Póki co, złamanie nierówności Bella przez pary fotonowe pozostaje zagadką.

Czytelników zainteresowanych pogłębieniem zagadnienia odsyłam do publikacji, których najbogatszym źródłem jest archiwum elektroniczne w Los Alamos National Laboratory, <http://arxiv.org/archive/quant-ph>

Marek Czachor

Notka o autorze:

Dr hab. Marek Czachor pracuje w Katedrze Fizyki Teoretycznej i Metod Matematycznych Politechniki Gdańskiej. Naukowo zajmuje się podstawami mechaniki kwantowej i teorii pola.