Zestaw 2 z równań różniczkowych

3. Rozwiązać równania:

a) $y'+\operatorname{tg}x\cdot y=\cos^2 x$, b) $y'-y=x^2\sin x+e^{-x}$, c) $y'+\dfrac{3y}{x}=\dfrac{e^{-x^3}}{x}$,

d) $y'=\cos x-x+y$, e) $y'+y\varphi'(x)=\varphi(x)\varphi'(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest daną funkcją klasy C^1 na przedziale $(-\infty;+\infty)$.

4. Znaleźć całkę ogólną równania $\dfrac{1}{y}\dfrac{dy}{dx}+\ln y=x^2$.

5. Znaleźć całkę szczególną równania $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin y}{2x\cos y+\sin^2 y}$ spełniającą warunek początkowy $y(2)=\dfrac{\pi}{2}$.

6. Rozwiązać równanie:

a) $y'+y+x^2y^3=0$, b) $y'-\dfrac{y}{\sqrt{x}}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}\sqrt{y}=0$, $y>0$, c) $y'-y=\dfrac{x}{y}$.

Odpowiedzi do tej części zadań

19.3. **3.** a), c) i e) rozwiązać metodą uzmiennienia stałej, b) i d) zaś metodą przewidywania. **4.** Za pomocą podstawienia $z(x)=\ln y$ sprowadzamy równanie do równania liniowego z funkcją niewiadomą $z(x)$. **5.** Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej można sprowadzić dane równanie do równania różniczkowego liniowego z funkcją niewiadomą $x(y)$ odwrotną do szukanej funkcji $y(x)$. **6.** Są to równania postaci $y'=p(x)y+q(x)y^r$ zwane *równaniami Bernoulliego*. Za pomocą podstawienia $z=y^{1-r}$ wprowadzamy nową funkcję niewiadomą $z(x)$. **7.** Równanie normalnej do

Poniżej rozwiązany przykład ze zbioru Demidowicza (równanie Bernoulliego, podobnie jak powyżej zad. 6), a dalej zadania do samodzielnego rozwiązania

2°. Уравнение Бернулли. Уравнение 1-го порядка вида

$$y' + P(x)\,y = Q(x)\,y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$, или метод вариации произвольной постоянной.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Решение. Это — уравнение Бернулли $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. Полагая

$$y = uv,$$

получим:

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv} \text{ или } v\left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv}. \qquad (8)$$

Для определения функции u потребуем выполнения соотношения

$$u' - \frac{4}{x}u = 0,$$

откуда

$$u = x^4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим:

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

отсюда находим v:

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2,$$

и, следовательно, общее решение получим в виде

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

Найти общие интегралы уравнений:

2785. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x.$

2786. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1+y^2}\sin y - xy)\,dy.$

2788. $y^2dx - (2xy + 3)\,dy = 0.$

Найти частные решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2789. $xy' + y - e^x = 0;\quad y = b$ при $x = a.$

2790. $y' - \frac{y}{1-x^2} - 1 - x = 0;\quad y = 0$ при $x = 0.$

2791. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x};\quad y = 0$ при $x = 0.$

Найти общие решения уравнений:

2792. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=-xy^2$.

2793. $2xy\frac{dy}{dx}-y^2+x=0$.

2794. $y\,dx+\left(x-\frac{1}{2}x^3y\right)dy=0$.

2795. $3x\,dy=y(1+x\sin x-3y^3\sin x)\,dx$.

Rozwiązania

2784. $y=Cx-x\ln|x|$. **2785.** $y=Cx+x^2$. **2786.** $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}$.

2787. $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=C$. Указание. Уравнение линейно относительно x и $\frac{dx}{dy}$. **2788.** $x=Cy^2-\frac{1}{y}$. **2789.** $y=\frac{e^x}{x}+\frac{ab-e^a}{x}$.

2790. $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. **2791.** $y=\frac{x}{\cos x}$.

2792. $y(x^2+Cx)=1$. **2793.** $y^2=x\ln\frac{C}{x}$. **2794.** $x^2=\frac{1}{y+Cy^2}$.

2795. $y^3(3+Ce^{\cos x})=x$. **2797.** $xy=Cy^2+a^2$. **2798.** $y^2+x+ay=0$.