Zestaw 3 – równania zupełne i z czynnikiem całkującym. Teoria jest taka:

Niech funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ będą klasy C^1 na obszarze jednospójnym D, a ponadto niech nie znikają jednocześnie w żadnym punkcie tego obszaru.

Równanie

$$P(x, y)dx+Q(x, y)dy = 0 \tag{19.4.1}$$

nazywamy *równaniem różniczkowym zupełnym*, gdy lewa strona tego równania jest różniczką zupełną pewnej funkcji $u(x, y)$, tzn. gdy $\dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ i $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ w każdym punkcie obszaru D. Wiadomo, że w przypadku funkcji $u(x, y)$ klasy C^2 na obszarze D, ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Wówczas rodzina wszystkich krzywych

$$u(x, y) = C \tag{19.4.2}$$

jest całką ogólną równania różniczkowego zupełnego (19.4.1).

Przypuśćmy teraz, że równanie (19.4.1) nie jest zupełne. Funkcję $\mu(x, y)$ klasy C^1 na obszarze D nazywamy *czynnikiem całkującym* tego równania, gdy równanie

$$\mu(x, y)P(x, y)dx+\mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \tag{19.4.3}$$

jest równaniem różniczkowym zupełnym.

Wiadomo, że w przypadku szczególnym, gdy wyrażenie $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)$ jest funkcją jednej zmiennej x, to równanie (19.4.1) ma czynnik całkujący jednej zmiennej x

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx} \tag{19.4.4}$$

Podobnie, jeśli wyrażenie $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)$ jest funkcją jednej zmiennej y, to równanie (19.4.1) ma czynnik całkujący jednej zmiennej y

$$\mu(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dy} \tag{19.4.5}$$

Zadania (tym razem bez rozwiązań – po znalezieniu rozwiązania trzeba po prostu sprawdzić, czy to rzeczywiście rozwiązuje zadanie)

Zadania.

4. Rozwiązać równanie:

a) $(4x^3+6xy^2)dx+(6x^2y+3y^2)dy = 0$, b) $(xy^2-1)dx+(x^2y-1)dy = 0$,

c) $(x^2-y)dx+(y^2-x)dy = 0$, d) $(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy = 0$,

e) $\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{y}{x}\right)dx+\left(\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}+1\right)dy = 0.$

5. Znaleźć czynnik całkujący równania:

a) $(y^2-3xy-2x^2)dx+(xy-x^2)dy = 0$, b) $2ydx+(1-2x-\ln y)dy = 0$,

c) $3(x+y)^2dx+x(3y+2x)dy = 0$, d) $3(x^2+y^2)dx+(x^3+6xy+3xy^2)dy = 0$.