

Zestaw 4: Metoda faktoryzacji i równania liniowe wyższego rzędu

I. TEORIA

A.

Oznaczenia: $x = x(t)$, $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ lub $\frac{d^n x}{dt^n} = x^{(n)}$, przy czym $x^{(0)} = x$. Dla równania

$$A_n x^{(n)} + A_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + A_1 x^{(1)} + A_0 x = 0, \quad (1)$$

gdzie A_k to stałe współczynniki, równaniem charakterystycznym nazywam równanie

$$A_n \lambda^n + A_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + A_1 \lambda + A_0 = 0 \quad (2)$$

Równanie to ma n pierwiastków (w ogólności zespolonych): $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Jeżeli pierwiastki są różne, to funkcje $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ są rozwiązaniami (1). Jeżeli jakiś pierwiastek jest wielokrotny, np. $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, to szczególnymi rozwiązaniami są, oprócz $e^{\lambda t}$, również funkcje $te^{\lambda t}$, $t^2 e^{\lambda t}$. W sumie zawsze znajdzie się w ten sposób n różnych rozwiązań. Jeżeli mamy n rozwiązań równania (1), $x_1(t), \dots, x_n(t)$, to kombinacja liniowa ze stałymi $C_1 \dots C_n$

$$x(t) = C_1 x_1(t) + \dots + C_n x_n(t) \quad (3)$$

też jest rozwiązaniem równania (1).

Ciekawsza metoda rozwiązywania (metoda faktoryzacji) polega na zapisaniu (1) jako

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \dots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right) x = 0 \quad (4)$$

Teraz policzmy coś takiego

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} f &= e^{\lambda t} \frac{d}{dt} (e^{-\lambda t} f) \\ &= e^{\lambda t} \left(f \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} f \right) \\ &= e^{\lambda t} \left(-\lambda f e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} f \right) \\ &= -\lambda f + \frac{d}{dt} f \\ &= \left(\frac{d}{dt} - \lambda \right) f \end{aligned} \quad (5)$$

Ponieważ zachodzi to dla wszystkich f , piszemy

$$e^{\lambda t} \frac{d}{dt} e^{-\lambda t} = \frac{d}{dt} - \lambda \quad (6)$$

Możemy zatem napisać

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1\right) \dots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_n\right) x = e^{\lambda_1 t} \frac{d}{dt} e^{-\lambda_1 t} \dots e^{\lambda_n t} \frac{d}{dt} e^{-\lambda_n t} x = 0 \quad (7)$$

Przykład:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 24x = \left(\frac{d}{dt} - 4\right) \left(\frac{d}{dt} + 6\right) x = e^{4t} \frac{d}{dt} e^{-4t} e^{-6t} \frac{d}{dt} e^{6t} x = e^{4t} \frac{d}{dt} e^{-10t} \frac{d}{dt} e^{6t} x = 0 \quad (8)$$

przy czym zakładamy, że $\frac{d}{dt}$ działa w prawo, na wszystko, czyli

$$e^{4t} \frac{d}{dt} e^{-10t} \frac{d}{dt} e^{6t} x = e^{4t} \frac{d}{dt} \left(e^{-10t} \frac{d}{dt} (e^{6t} x) \right) \quad (9)$$

Możemy teraz całkować po kolei

$$e^{4t} \frac{d}{dt} e^{-10t} \frac{d}{dt} e^{6t} x = 0 \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-10t} \frac{d}{dt} e^{6t} x = 0 \quad (11)$$

$$e^{-10t} \frac{d}{dt} e^{6t} x = C \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} e^{6t} x = C e^{10t} \quad (13)$$

$$e^{6t} x = C \int e^{10t} dt = C \frac{1}{10} e^{10t} + C_1 \quad (14)$$

$$x = e^{-6t} \frac{C}{10} e^{10t} + C_1 e^{-6t} = \frac{C}{4} e^{4t} + C_1 e^{-6t} = C_1 e^{-6t} + C_2 e^{4t} = x(t) \quad (15)$$

□

Przykład: Ponieważ $(\lambda - 5)^3 = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 75\lambda - 125$, więc

$$x^{(3)} - 15x^{(2)} + 75x^{(1)} - 124x = \left(\frac{d}{dt} - 5\right)\left(\frac{d}{dt} - 5\right)\left(\frac{d}{dt} - 5\right)x = e^{5t} \frac{d}{dt} e^{-5t} e^{5t} \frac{d}{dt} e^{-5t} e^{5t} \frac{d}{dt} e^{-5t} x = e^{5t} \frac{d^3}{dt^3} e^{-5t} x$$

Czyli $x^{(3)} - 15x^{(2)} + 75x^{(1)} - 124x = 0$ liczymy tak

$$x^{(3)} - 15x^{(2)} + 75x^{(1)} - 124x = e^{5t} \frac{d^3}{dt^3} e^{-5t} x = 0 \quad (16)$$

$$\frac{d^3}{dt^3} e^{-5t} x = 0 \quad (17)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{-5t} x = C \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-5t} x = Ct + C_1 \quad (19)$$

$$e^{-5t} x = C \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \quad (20)$$

$$x = C \frac{t^2}{2} e^{5t} + C_1 t e^{5t} + C_2 e^{5t} = C_1 t e^{5t} + C_2 e^{5t} + C_3 t^2 e^{5t} = x(t) \quad (21)$$

Uzyskaliśmy kombinację rozwiązań charakterystycznych dla pierwiastka potrójnego $\lambda = 5$. □

B.

Teraz rozpatrzmy taki rachunek (t_0 — dowolna liczba, czyli stała):

$$\begin{aligned}
e^{\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \frac{d}{dt} e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} f(t) &= e^{\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \frac{d}{dt} \left(e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} f(t) \right) \\
&= e^{\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \left(e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \frac{d}{dt} f(t) + f(t) \frac{d}{dt} e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \right) \\
&= e^{\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \left(e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \frac{d}{dt} f(t) - f(t) e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau \right) \\
&= \frac{d}{dt} f(t) - f(t) g(t) = \left(\frac{d}{dt} - g(t) \right) f(t)
\end{aligned}$$

czyli

$$e^{\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} \frac{d}{dt} e^{-\int_{t_0}^t g(\tau) d\tau} = \frac{d}{dt} - g(t) \quad (22)$$

Przykład:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dt} - t^2 \right) \left(\frac{d}{dt} - t \right) x &= \left(\frac{d}{dt} - t^2 \right) \left(\frac{dx}{dt} - tx \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} - tx \right) - t^2 \left(\frac{dx}{dt} - tx \right) \\
&= \ddot{x} - x - t\dot{x} - t^2\dot{x} + t^3x \\
&= \ddot{x} - (t + t^2)\dot{x} + (t^3 - 1)x
\end{aligned}$$

Dlatego

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - (t + t^2)\dot{x} + (t^3 - 1)x &= \left(\frac{d}{dt} - t^2 \right) \left(\frac{d}{dt} - t \right) x \\
&= e^{\int_{t_0}^t \tau^2 d\tau} \frac{d}{dt} e^{-\int_{t_0}^t \tau^2 d\tau} e^{\int_{t_0}^t \tau d\tau} \frac{d}{dt} e^{-\int_{t_0}^t \tau d\tau} \\
&= e^{(t^3 - t_0^3)/3} \frac{d}{dt} e^{-(t^3 - t_0^3)/3} e^{(t^2 - t_0^2)/2} \frac{d}{dt} e^{-(t^2 - t_0^2)/2} \\
&= e^{t^3/3} e^{-t_0^3/3} \frac{d}{dt} e^{-t^3/3} e^{t_0^3/3} e^{t^2/2} e^{-t_0^2/2} \frac{d}{dt} e^{-t^2/2} e^{t_0^2/2} \\
&= e^{t^3/3} \frac{d}{dt} e^{-t^3/3} e^{t^2/2} \frac{d}{dt} e^{-t^2/2} \\
&= e^{t^3/3} \frac{d}{dt} e^{t^2/2 - t^3/3} \frac{d}{dt} e^{-t^2/2}
\end{aligned} \quad (23)$$

Mogliśmy skrócić wyrazy w rodzaju $e^{-t_0^3/3}$ bo nie zależą od t , czyli są to stałe. Rozpatrzmy takie równanie

$$\ddot{x} - (t + t^2)\dot{x} + (t^3 - 1)x = \cos t \quad (24)$$

Strategia jest następująca

$$\ddot{x} - (t + t^2)\dot{x} + (t^3 - 1)x = e^{t^3/3} \frac{d}{dt} e^{t^2/2 - t^3/3} \frac{d}{dt} e^{-t^2/2} x = \cos t \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} e^{t^2/2 - t^3/3} \frac{d}{dt} e^{-t^2/2} x = e^{-t^3/3} \cos t \quad (26)$$

$$e^{t^2/2 - t^3/3} \frac{d}{dt} e^{-t^2/2} x = \int_{t_1}^t e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt}e^{-t^2/2}x = e^{-t^2/2+t^3/3} \int_{t_1}^t e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau \quad (28)$$

$$e^{-t^2/2}x = \int_{t_2}^t ds e^{-s^2/2+s^3/3} \int_{t_1}^s e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau \quad (29)$$

$$x(t) = e^{t^2/2} \int_{t_2}^t ds e^{-s^2/2+s^3/3} \int_{t_1}^s e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau \quad (30)$$

Zapisałem to trochę bardziej porządnie, czyli przy pomocy całek oznaczonych. Teraz dwie stałe dowolne ukryte są w dwóch dowolnych dolnych granicach całkowania: t_1 i t_2 . Całek już jawnie nie wyliczam, bo za trudne nawet dla programu Mathematica 6.

Warunki początkowe dobrane są tak, że na podstawie (30)

$$x(t_2) = e^{t_2^2/2} \int_{t_2}^{t_2} ds e^{-s^2/2+s^3/3} \int_{t_1}^s e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau = 0 \quad (31)$$

a na podstawie (28), przepisanego jako

$$-te^{-t^2/2}x(t) + e^{-t^2/2} \frac{d}{dt}x(t) = e^{-t^2/2+t^3/3} \int_{t_1}^t e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau \quad (32)$$

zachodzi

$$-t_1 e^{-t_1^2/2}x(t_1) + e^{-t_1^2/2} \dot{x}(t_1) = e^{-t_1^2/2+t_1^3/3} \int_{t_1}^{t_1} e^{-\tau^3/3} \cos \tau d\tau = 0 \quad (33)$$

$$\dot{x}(t_1) = -t_1 x(t_1) \quad (34)$$

II. ZADANIA

1. Znaleźć rozwiązanie ogólne metodą faktoryzacji

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 35x = 0, \quad (35)$$

$$5\ddot{x} - 3\dot{x} - \frac{1}{4}x = 0, \quad (36)$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 35x = 1, \quad (37)$$

$$5\ddot{x} - 3\dot{x} - \frac{1}{4}x = 2, \quad (38)$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 35x = t, \quad (39)$$

$$5\ddot{x} - 3\dot{x} - \frac{1}{4}x = t^2, \quad (40)$$

$$\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0, \quad (41)$$

$$\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 1, \quad (42)$$

$$\ddot{x} - t\dot{x} + \dot{x} - tx = 0, \quad (43)$$

2. Niech $x_1(t)$ oznacza rozwiązanie szczególne. Znaleźć rozw. ogólne równań

$$x^{(4)} + 8x^{(3)} - 30x^{(2)} - 400x^{(1)} - 875x = 0, \quad \text{gdy } x_1(t) = t^2 e^{-5t}, \quad (44)$$

$$x^{(3)} + x^{(2)} - 40x^{(1)} - 112x = 0, \quad \text{gdy } x_1(t) = te^{-4t}, \quad (45)$$

3. Niech $[A, B] = AB - BA$. Obliczyć: (a) $[\frac{d}{dt}, t]x(t)$, (b) $[\frac{d}{dt}, t^2]x(t)$, (c) $[\frac{d}{dt} + t, \frac{d}{dt} - t]x(t)$, (d) $[\frac{d}{dt} + t^2, \frac{d}{dt} - t]x(t)$.