

Zestaw 5: Metoda faktoryzacji (c.d.)

I. TEORIA

Rozpatrzmy takie rachunki

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)f(x) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f(x) - x\frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}xf(x) \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f(x) - x\frac{d}{dx}f(x) + \frac{dx}{dx}f(x) + x\frac{df(x)}{dx} \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f(x) + f(x) \\ \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f(x) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f(x) + x\frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}xf(x) \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f(x) + x\frac{d}{dx}f(x) - \frac{dx}{dx}f(x) - x\frac{df(x)}{dx} \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f(x) - f(x)\end{aligned}$$

Niech teraz A będzie liczbą i rozpatrzmy równanie

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f_A(x) = Af_A(x) \quad (1)$$

Znajdźmy jakiegokolwiek rozwiązanie $f_A(x)$ równania (1). Zaczniemy od dwóch różnych faktoryzacji

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f_A(x) = \left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_A(x) + f_A(x) = Af_A(x), \quad (2)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f_A(x) = \left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_A(x) - f_A(x) = Af_A(x). \quad (3)$$

Można je przepisać jako

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_A(x) = (A - 1)f_A(x), \quad (4)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_A(x) = (A + 1)f_A(x). \quad (5)$$

Pomińmy banalne rozwiązanie $f_A(x) = 0$. Od razu można podać dwa szczególne rozwiązania $f_1(x)$ oraz $f_{-1}(x)$. Mianowicie, jeżeli $A = 1$, to

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_1(x) = (1 - 1)f_1(x) = 0, \quad (6)$$

można rozwiązać poprzez

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_1(x) = 0 \quad (7)$$

czyli

$$f_1(x) = C_1 e^{x^2/2} \quad (8)$$

Analogicznie

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_{-1}(x) = ((-1) + 1)f_{-1}(x) = 0, \quad (9)$$

można rozwiązać poprzez

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_{-1}(x) = 0 \quad (10)$$

czyli

$$f_{-1}(x) = C_{-1}e^{-x^2/2} \quad (11)$$

Rzeczywiście

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f_1(x) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)C_1e^{x^2/2} \\ &= C_1\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{x^2/2} - x^2e^{x^2/2}\right) \\ &= C_1\left(\frac{d}{dx}xe^{x^2/2} - x^2e^{x^2/2}\right) \\ &= C_1\left(e^{x^2/2} + x^2e^{x^2/2} - x^2e^{x^2/2}\right) \\ &= C_1e^{x^2/2} = (+1)f_1(x), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)f_{-1}(x) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2\right)C_{-1}e^{-x^2/2} \\ &= C_{-1}\left(\frac{d^2}{dx^2}e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}\right) \\ &= C_{-1}\left(-\frac{d}{dx}xe^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}\right) \\ &= C_{-1}\left(-e^{-x^2/2} + x^2e^{-x^2/2} - x^2e^{-x^2/2}\right) \\ &= -C_{-1}e^{-x^2/2} = (-1)f_{-1}(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Teraz pytanie: Dla jakich innych A można znaleźć $f_A(x)$? Pomysł jest taki. Weźmy np. $f_1(x)$, które spełnia równocześnie dwa równania

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_1(x) = (1-1)f_1(x) = 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_1(x) = (1+1)f_1(x) = 2f_1(x). \quad (15)$$

Zapisując drugie z nich jako

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)\underbrace{\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_1(x)}_{f_{\tilde{A}}(x)} = 2\underbrace{\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_1(x)}_{f_{\tilde{A}}(x)}. \quad (16)$$

czyli

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_{\tilde{A}}(x) = 2f_{\tilde{A}}(x) = (\tilde{A} - 1)f_{\tilde{A}}(x) \quad (17)$$

znajdujemy $\tilde{A} = 3$. Znaczy to, iż funkcja

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_1(x) = f_3(x) \quad (18)$$

spełnia

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)\left(\frac{d}{dx} - x\right)f_3(x) = (3-1)f_3(x) = 2f_3(x), \quad (19)$$

$$\left(\frac{d}{dx} - x\right)\left(\frac{d}{dx} + x\right)f_3(x) = (3+1)f_3(x) = 4f_3(x). \quad (20)$$

II. ZADANIA

1. Znaleźć jawną postać rozwiązań $f_3(x)$, $f_5(x)$, $f_7(x)$, $f_{-3}(x)$, $f_{-5}(x)$, $f_{-7}(x)$.

2. Znaleźć analogiczną metodę rozwiązania równania

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 9x^2\right)f_A(x) = Af_A(x) \quad (21)$$

Podać odpowiedniki rozwiązań z Zad. 1. Zrobić to na dwa sposoby:

- (i) Bezpośrednio faktoryzując operator $\frac{d^2}{dx^2} - 9x^2$.
- (ii) Po podzieleniu obustronnie przez 3,

$$\left(\frac{1}{3}\frac{d^2}{dx^2} - 3x^2\right)f_A(x) = \frac{1}{3}Af_A(x), \quad (22)$$

zamienić zmienne i sprowadzić problem do (1).