

20.1

RÓWNANIE STRUNY

Równanie typu hiperbolicznego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (20.1.1)$$

występuje w wielu zagadnieniach fizycznych związanych ze zjawiskami drgań. Opisuje np. małe poprzeczne drgania struny jednorodnej o gęstości liniowej ρ , znajdującej się pod działaniem naprężenia T ; wówczas $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

W dalszym ciągu równanie (20.1.1) nazywać będziemy *równaniem struny*.

Rozwiązanie ogólne równania (20.1.1) ma postać

$$u(x, t) = g(x-at) + h(x+at) \quad (20.1.2)$$

gdzie $g(\xi)$ i $h(\xi)$ są to dowolne funkcje klasy C^2 na przedziale $(-\infty; +\infty)$.

Rodziny prostych

$$x-at = \text{const} \quad \text{i} \quad x+at = \text{const} \quad (20.1.3)$$

są *charakterystykami* równania (20.1.1).

Rozwiązanie równania (20.1.1) na obszarze $D = \{(x, t): x \in (-\infty; +\infty) \wedge t \geq 0\}$, spełniające *warunki początkowe*

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x) \quad (20.1.4)$$

gdzie $f(x)$ i $\varphi(x)$ są funkcjami odpowiednio klasy C^2 i C^1 na przedziale $(-\infty; +\infty)$, dane jest *wzorem d'Alemberta*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(z) dz \quad (20.1.5)$$

Mówimy, że wzór (20.1.5) przedstawia rozwiązanie zagadnienia *struny nieograniczonej*.

Rozwiązanie równania (20.1.1) na obszarze $D = \{(x, t): x \in (0; l) \wedge t \geq 0\}$, spełniające (dla każdego $t \geq 0$) *warunki brzegowe*

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \quad (20.1.6)$$

i warunki początkowe (20.1.4), gdzie $f(x)$ i $\varphi(x)$ są odpowiednio klasy C^3 i C^2 na przedziale $\langle 0; l \rangle$ i spełniają warunki zgodności

$$f(0) = f(l) = \varphi(0) = \varphi(l) = 0 \wedge f''(0) = f''(l) = 0$$

dane jest wzorem

(20.1.7)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \left(A_n \sin \frac{n\pi at}{l} + B_n \cos \frac{n\pi at}{l} \right)$$

(20.1.8)

gdzie

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

(20.1.9)

dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Mówimy, że wzór (20.1.8) przedstawia rozwiązanie zagadnienia struny ograniczonej o długości l . Uzyskuje się je tzw. *metodą Fouriera* polegającą na poszukiwaniu rozwiązania w postaci $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Zadanie 1. Struna nieograniczona o gęstości liniowej ρ i naprężeniu $a^2\rho$ drga swobodnie. Znaleźć wzór opisujący te drgania, jeśli warunki początkowe mają postać: $u(x, 0) = \cos x$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 2x$.

Rozwiązanie. Mamy znaleźć rozwiązanie równania (20.1.1) spełniające dane warunki początkowe. Zgodnie ze wzorem (20.1.5) mamy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} [\cos(x-at) + \cos(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} 2z dz = \\ &= \cos x \cos at + \frac{1}{2a} z^2 \Big|_{x-at}^{x+at} = \cos x \cos at + 2xt \end{aligned}$$

Odp. $u(x, t) = \cos x \cos at + 2xt$.

Zadanie 2. Struna o długości l , gęstości liniowej ρ i naprężeniu ρa^2 jest umocowana w punktach $x = 0$ i $x = l$. Znaleźć wzór opisujący jej drgania swobodne, jeśli warunki początkowe mają postać: $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x(l-x)$.

Rozwiązanie. Mamy znaleźć rozwiązanie równania (20.1.1) spełniające dane warunki początkowe oraz warunki brzegowe (20.1.6).

Korzystając ze wzorów (20.1.9) mamy $B_n = 0$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, oraz

$$A_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2l}{n\pi a} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx -$$

$$- \frac{2}{n\pi a} \int_0^l x^2 \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{8l^3}{n^4 \pi^4 a} & \text{dla } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{dla } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Stąd, zgodnie z (20.1.8) mamy

$$u(x, t) = \frac{8l^3}{\pi^4 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi at}{l}$$

$$\text{Odp. } u(x, t) = \frac{8l^3}{\pi^4 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi at}{l}.$$

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązanie $u(x, t)$ równania (20.1.1) wiedząc, że $u(x, t) = x+1$ na charakterystyce $x-at = 1$ oraz $u(x, t) = 2x^2$ na charakterystyce $x+at = 1$.

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru (20.1.2) mamy

$$\left. \begin{aligned} g(1)+h(2x-1) &= x+1 \\ g(2x-1)+h(1) &= 2x^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{skąd } h(x) = \frac{x+1}{2} + 1 - g(1), \quad g(x) = 2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - h(1) \text{ i } g(1)+h(1) = 2.$$

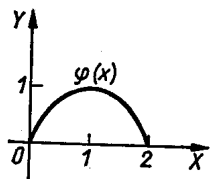
Wobec wzoru (20.1.2) mamy więc

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2\left(\frac{x-at+1}{2}\right)^2 - h(1) + \frac{x+at+1}{2} + 1 - g(1) = \\ &= 2\left(\frac{x-at+1}{2}\right)^2 + \frac{x+at+1}{2} - 1 = \frac{1}{2} [(x-at+1)^2 + x+at-1]. \end{aligned}$$

$$\text{Odp. } u(x, t) = \frac{1}{2} [(x-at+1)^2 + x+at-1].$$

Zadania.

4. Struna o długości $l = 2$, gęstości liniowej ρ i naprężeniu 64ρ jest umocowana w punktach $x = 0$ i $x = 2$. Znaleźć wzór opisujący jej drgania swobodne, jeśli warunki początkowe mają postać: $u(x, 0) = 0$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x)$, gdzie $\varphi(x)$ jest funkcją, której wykres ma kształt łuku paraboli (rys. 20.1.1).



20.1.1

5. Funkcje $f(x)$ i $\varphi(x)$ występujące w warunkach (20.1.4) charakteryzują zaburzenie początkowe struny. Przypuśćmy, że znamy zaburzenie początkowe struny jednorodnej o gęstości liniowej ρ i naprężeniu $a^2\rho$, tylko na przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$. Wyznaczyć zbiór D , w którym stan struny można określić za pomocą wzoru d'Alemberta.

6. Niech $u(x, t)$ będzie rozwiązaniem równania struny nieograniczonej $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \begin{cases} \sin^2 x, & \text{gdy } x \in \langle 0; \pi \rangle \\ 0, & \text{gdy } x \notin \langle 0; \pi \rangle \end{cases}$$

Znaleźć wartość $u(x, t)$ w każdym z tych obszarów półpłaszczyzny $t \geq 0$, w którym $u(x, t) = \text{const}$.

7. Jednostronnie nieograniczona struna o gęstości liniowej ρ i naprężeniu $a^2 \rho$ jest zamocowana na końcu $x = 0$. Znaleźć wzór opisujący jej drgania swobodne, jeśli warunki początkowe mają postać: $u(x, 0) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 4ax$, gdy $x \in \langle 0; +\infty \rangle$.

8*. Niech na przedziale $\langle 0; +\infty \rangle$ będzie dana jednostronnie nieograniczona struna o gęstości liniowej ρ i naprężeniu ρa^2 , której koniec $x = 0$ porusza się zgodnie z prawem $u(0, t) = 2t$, $t \in \langle 0; +\infty \rangle$. Znaleźć wzór opisujący jej drgania swobodne, jeżeli warunki początkowe mają postać: $u(x, 0) = 0$ i $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0$.

9*. Znaleźć rozwiązanie $u(x, t)$ równania struny o gęstości liniowej ρ i naprężeniu $T = \rho$ wiedząc, że $u(x, t) = x^2$ na charakterystyce $x - t = 2$ oraz $u(x, t) = 2x$ na charakterystyce $x + t = 2$.

10*. Wiadomo, że rozwiązanie $u(x, t)$ równania $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G(x, t)$ na obszarze $D = \{(x, t): x \in (-\infty; +\infty) \wedge t \in \langle 0; +\infty \rangle\}$, spełniające warunki początkowe $u(x, 0) = f(x)$ i $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x)$ ma postać

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \varphi(z) dz - \frac{a}{2} \iint G(z, \tau) dz d\tau$$

ROZDZIAŁ 20

- 20.1. 4. $\varphi(x) = x(2-x)$, $f(x) \equiv 0$; zastosować wzory (20.1.8) i (20.1.9).
5. Wyznaczyć punkt przecięcia się charakterystyk przechodzących przez końce przedziału $\langle 0; 2\pi \rangle$. 6. Wobec wzoru (20.1.5) mamy $u(x, t) = 0$, gdy $(x, t) \in D_1 \cup D_2$ i $u(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^3 z dz$, gdy $(x, t) \in D_3$ (rys. 20.1.3). 7. Przedłużyć w sposób nieparzysty funkcje $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ i $\varphi(x) = 4ax$ na przedział $(-\infty; 0)$ i skorzystać ze wzoru (20.1.5) na obszarach $D_1 = \{(x, t): 0 \leq x < at\}$ i $D_2 = \{(x, t): 0 \leq at \leq x\}$. 8. Wśród rozwiązań (20.1.2) równania (20.1.1) na obszarze $D = \{(x, t): x \in \langle 0; +\infty \rangle \wedge t \in \langle 0; +\infty \rangle\}$ znaleźć rozwiązanie spełniające dany warunek brzegowy i dane warunki początkowe. 9. Zobacz 20.1 zad. 3. 10. Obszar Ω można opisać nierównościami: $0 \leq \tau \leq t \wedge x + a(\tau - t) \leq z \leq x - a(\tau - t)$.
11. Z równań linii długiej: $Ri + L \frac{di}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, $Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x}$ wyrugować