

## 5. Dynamika ruchu postępowego, ruchu punktu materialnego po okręgu i ruchu obrotowego bryły sztywnej

Wybór i opracowanie zadań Ryszard Signerski i Małgorzata Obarowska

### 5.1. Dynamika ruchu postępowego

**5.1.1.** Balon opada ze stałą prędkością. Jaką masę balastu należy wyrzucić, aby balon zaczął wznościć się z tą samą prędkością? Masa balonu (z balastem) wynosi  $300\text{ kg}$ , a siła wyporu  $2900\text{ N}$ .

**5.1.2.** Małpka wspina się po pionowej lianie z przyspieszeniem  $0,5\text{ m/s}^2$ . Oblicz siłę napinającą lianę, jeżeli masa małpki wynosi  $5\text{ kg}$ . Masę liany zaniedbać.

**5.1.3.** Winda może poruszać się w górę i w dół z przyspieszeniem o takiej samej wartości. W windzie tej na wadze sprężynowej stoi studentka. Różnica wskazań wagi przy ruchu w górę i w dół wynosi  $50\text{ N}$ . Jakie jest przyspieszenie windy, jeżeli ciężar studentki wynosi  $500\text{ N}$ ?

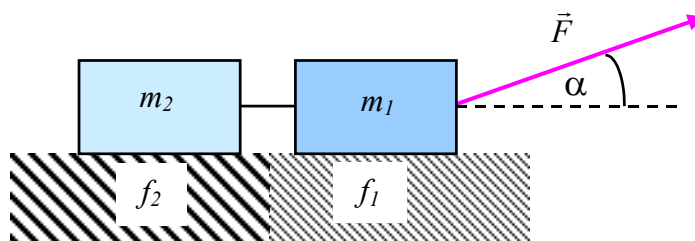
**5.1.4.** W wagonie poruszającym się poziomo z pewnym przyspieszeniem wisi na nici ciężarek o masie  $100\text{ g}$ . Nić odchyłona jest od pionu o kąt  $15^\circ$ . Oblicz przyspieszenie wagonu i siłę napinającą nić.

**5.1.5.** Dźwig podnosi ciężar  $Q$  zawieszony na linie, której dopuszczalne naprężenie wynosi  $F_{max}$ . Znajdź najkrótszy czas, w którym można podnieść ten początkowo spoczywający ciężar na wysokość  $h$ . Opory ośrodka i ciężar liny pominąć.

**5.1.6.** Sanki zsunęły się za zbrocza o nachyleniu  $30^\circ$  i długości  $20\text{ m}$ , po czym do chwili zatrzymania przebyły odległość  $200\text{ m}$  po torze poziomym. Współczynnik tarcia na całej trasie jest jednakowy. Wyznacz jego wartość.

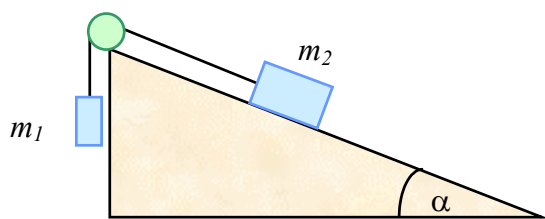
**5.1.7.** Oblicz wysokość, na jaką może wjechać samochód, który mając początkową prędkość  $72\text{ km/h}$ , porusza się w górę z wyłączonym silnikiem. Nachylenie zbrocza wynosi  $30^\circ$ , a efektywny współczynnik tarcia  $0,1$ .

**5.1.8.** Dwa klocki o masach  $m_1$  i  $m_2$  związane nieważką i nierozciągliwą nicią leżą na poziomym stole. Do pierwszego z nich przyłożono siłę  $F$  pod kątem  $\alpha$  (patrz rys. 5.1.8.). Współczynniki tarcia między klockami, a stołem wynoszą odpowiednio  $f_1$  i  $f_2$ . Oblicz przyspieszenie klocków i siłę napinającą nić.



rys. 5.1.8.

**5.1.9.** Dwa ciężarki o masach  $m_1$  i  $m_2$  połączone nieważką i nierozciągliwą nicią przerzuconą



**rys. 5.1.9.**

przez bloczek znajdujący się na szczycie równi (rys. 5.1.9.). Współczynnik tarcia między ciężarkiem  $m_2$  i równią wynosi  $f_2$ , a kąt nachylenia równi  $\alpha$ . Masę boczka można pominąć. Wyznacz siłę napięcia nici i przyspieszenie ciężarków, przyjmując, że ciężarek  $m_1$  porusza się w dół.

**5.1.10** Klocek o masie  $m = 3 \text{ kg}$  położono na wózek o masie  $M = 15 \text{ kg}$ . Współczynnik tarcia między tymi ciałami wynosi  $f = 0,2$ . Na klocek działa pozioma siła  $F = 20 \text{ N}$ , a wózek może poruszać się swobodnie (bez tarcia) po szynach. Znajdź przyspieszenie klocka względem wózka.

## 5.2. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu

**5.2.1.** Po wypukłym moście o promieniu krzywizny  $R = 100 \text{ m}$  jedzie samochód ze stałą prędkością  $v = 54 \text{ km/h}$ . Masa samochodu wynosi  $m = 2000 \text{ kg}$ . Oblicz siłę nacisku samochodu na most w jego najwyższym punkcie. Jaka musiałaby być prędkość samochodu, aby stracił on kontakt z podłożem?

**5.2.2.** Mały ciężarek o masie  $m = 100 \text{ g}$  przywiązano do nici o długości  $l = 50 \text{ cm}$  i wprowadzono w ruch obrotowy po okręgu w płaszczyźnie poziomej. Nici odchyła się od pionu o kąt  $\alpha = 45^\circ$ . Wyznacz prędkość kątową ciężarka, okres obiegu i siłę napięcia nici.

**5.2.3.** Kierowca samochodu jadącego z prędkością  $v$  zauważa nagle przed sobą ścianę. Jak powinien zareagować kierowca: zahamować, czy zakreślić, próbując uniknąć uderzenia w ścianę? Współczynnik tarcia kół o podłoże wynosi  $f$ .

**5.2.4.** Jaka jest prędkość satelity na orbicie kołowej odległej o  $h$  od powierzchni Ziemi? Stała grawitacji jest równa  $G$ , masa Ziemi wynosi  $M_z$ , a jej promień  $R_z$ .

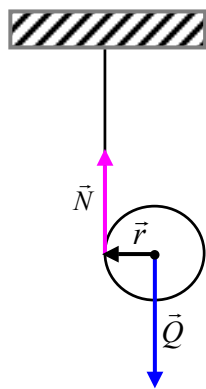
**5.2.5.** Okres obiegu Księżyca wokół Ziemi wynosi  $T = 27,32$  dób ziemskich, a jego średnia odległość od Ziemi  $r = 384\,400 \text{ km}$ . Oblicz masę Ziemi. Stała grawitacji  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ .

**5.2.6.** Oblicz promień orbity stacjonarnego satelity Ziemi. Dane są: promień Ziemi  $R_z = 6370 \text{ km}$ , przyspieszenie na powierzchni Ziemi  $9,81 \text{ m/s}^2$  i czas trwania doby ziemskiej  $24 \text{ godziny}$ .

## 5.3. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej

**5.3.1.** Koło zamachowe o momencie bezwładności  $I = 0,2 \text{ kgm}^2$  obraca się wokół poziomej osi przechodzącej przez jego środek, wykonując  $n = 600 \text{ obr/min}$ . Przy hamowaniu koło

zatrzymuje się po upływie czasu  $\Delta t = 20 \text{ s}$ . Znajdź moment siły hamującej i liczbę obrotów do chwili zatrzymania.



**5.3.2.** Na rurę o cienkich ściankach nawinięto nić, której wolny koniec przymocowano do sufitu. Rura odkręca się z nici pod działaniem własnego ciężaru (rys. 5.3.2.). Znajdź przyspieszenie rury i siłę napięcia nici, jeżeli masę i grubość nici można zaniedbać. Początkowa długość nici jest dużo większa od promienia rury. Ciężar rury wynosi  $Q$ .

rys. 5.3.2.

**5.3.3.** Oblicz moment bezwładności molekuly,  $\text{CO}_2$  względem osi przechodzącej przez środek masy i prostopadłej do osi molekuly. Molekuła jest liniowa z atomem C znajdującym się w jej środku. Długość wiązania C—O wynosi  $1,13 \times 10^{-10} \text{ m}$ .

**5.3.4.** Wykaż, że moment bezwładności układu składającego się z dwóch mas  $m_1$  i  $m_2$  oddległych o  $r$  od siebie względem osi prostopadłej do odcinka łączącego  $m_1$  i  $m_2$  i przechodzącej przez środek masy układu wynosi  $\mu r^2$ .  $\mu$  jest masą zredukowaną układu i wynosi  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ . Otrzymany wynik zastosuj do molekuly, CO, dla której  $r = 1,13 \text{ \AA}$  i do molekuly HCl gdzie  $r = 1,27 \text{ \AA}$ .

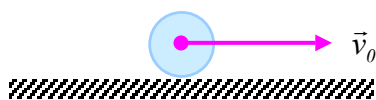
**5.3.5.** Przez bloczek zawieszony na poziomej osi przerzucono nieważką i nierozciągliwą nić, do końców której przymocowano ciężarki o masach  $m_1 = 0,5 \text{ kg}$  i  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ . Masa boczka wynosi  $m = 0,4 \text{ kg}$ . Bloczek traktujemy jako jednorodny krążek. Znajdź liniowe przyspieszenie ciężarków. Przyjmij, że nić nie ślizga się po boczku.

**5.3.6.** Z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  stacza się bez poślizgu ciało o momencie bezwładności  $I$ , masie  $m$  i promieniu  $r$ . Wyznacz jego przyspieszenie liniowe, kątowe i siłę tarcia.

**5.3.7.** Pełne, jednorodne ciała: walec i kula staczają się bez poślizgu z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$  i wysokości  $h$ . Masy i promienie tych ciał są jednakowe. Które z nich stoczy się wcześniej?

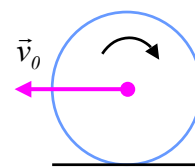
**5.3.8.** Kula o początkowej prędkości w ruchu postępowym  $v_0 = 10 \text{ m/s}$  wtacza się bez poślizgu na równię pochyłą o kącie nachylenia  $45^\circ$ . Jaką drogę przebędzie kula po równi do chwili zatrzymania się i po jakim czasie wróci do podstawy równi?

**5.3.9.** Środek masy kuli bilardowej posiada początkową prędkość  $v_0$  (rys. 5.3.9.). Promień kuli wynosi  $R$ , jej masa  $M$ , a współczynnik tarcia pomiędzy kulą i stołem jest równy  $\mu$ . Jak daleko przesunie się kula po stole, zanim przestanie się ślizgać?



rys. 5.3.9.

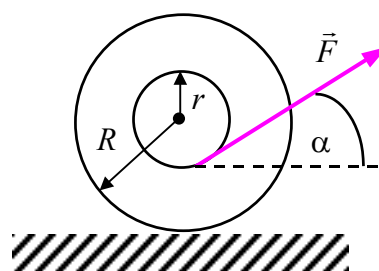
**5.3.10.** W czasie pokazów gimnastyki artystycznej można oglądać ćwiczenie, w którym obręcz rzucona przez zawodniczkę tocząc się początkowo z poślizgiem wraca ku niej i w końcowej fazie ruchu toczy się już bez poślizgu. Jest to możliwe, jeżeli w czasie rzutu zawodniczka nada obręczy ruch obrotowy o odpowiednim kierunku (rys. 5.3.10.). Znajdź związek pomiędzy początkową wartością prędkości ruchu postępowego  $v_0$  i prędkości kątovej  $\omega_0$ .



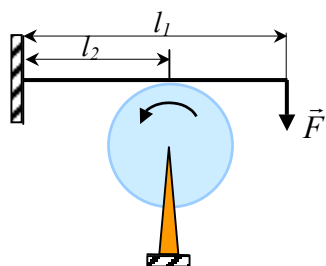
rys. 5.3.10.

**5.3.11.** Po idealnie gładkiej poziomej powierzchni ślizga się bez obrotów walec. Prędkość liniowa środka masy wynosi  $v_0$ , a kierunek prędkości jest prostopadły do osi walca. W pewnej chwili powierzchnia pod walcem staje się szorstka, a współczynnik tarcia posuwistego przyjmuje wartość  $f$ . Po jakim czasie walec będzie się toczył bez poślizgu i jaka będzie wtedy prędkość jego środka masy?

**5.3.12.** Kołowrót o masie  $m$ , momencie bezwładności  $I_0$  i promieniach zewnętrznym  $R$  oraz wewnętrznym  $r$  leży na płaszczyźnie poziomej (rys. 5.3.12.). Na kołowrót nawinięta jest nić, do której przyłożono siłę  $F$ . Opisz ruch kołowrotu w zależności od kąta  $\alpha$  jaki tworzy nić z kierunkiem poziomym.



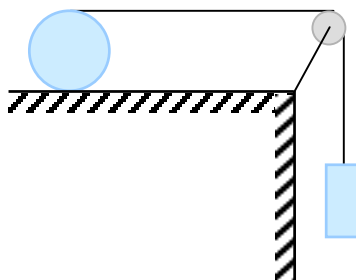
rys. 5.3.12.



rys. 5.3.13.

**5.3.13.** Ciężki walec o promieniu  $R$  i momencie bezwładności  $I_0$  wiruje z prędkością kątową  $\omega_0$ . W chwili  $t = 0$  do dźwigni hamulcowej przyłożono siłę  $F$  (rys. 5.3.13.) wskutek czego walec zatrzymuje się po czasie  $t$ . Ramiona dźwigni mają długości  $l_1$  i  $l_2$ , a współczynnik tarcia między dźwignią i walcem wynosi  $f$ . Oblicz wartość siły  $F$ .

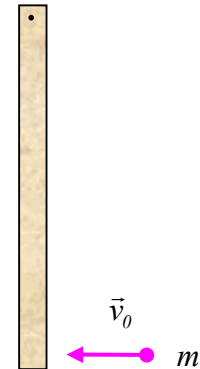
**5.3.14.\*** Walec o masie  $M$  i promieniu  $r$  może toczyć się po poziomym stole. Na walec nawinięta jest nieważka i nierozciągliwa nić, którą przerzucono przez nieważki bloczek. Na końcu nici zawieszono ciężarek o masie  $m$  (rys. 5.3.14.). Wyznacz przyspieszenie ciężarka i siłę tarcia działającą na walec przyjmując, że może być on pełen lub wydrążony (cienkościana rura).



rys. 5.3.14.

**5.3.15.** Na krześle mogącym obracać się swobodnie wokół osi pionowej siedzi student i trzyma w wyprostowanych rękach odważniki po  $m = 5 \text{ kg}$  każdy. Odległość każdego odważnika od osi obrotu wynosi  $l_1 = 80 \text{ cm}$ . Krzesło wiruje wykonując  $n_1 = 1 \text{ obr/sek}$ . Jak zmieni się szybkość wirowania studenta, jeśli zegnije on ręce tak, że odważniki będą w odległości  $l_2 = 20 \text{ cm}$  od osi obrotu? Moment bezwładności studenta i krzesła (całkowity) względem osi obrotu wynosi  $I_0 = 3 \text{ kgm}^2$ .

**5.3.16.\*** Belka o długości  $l$  i masie  $M$  może swobodnie obracać się wokół poziomej osi przechodzącej przez jeden z jej końców. W drugi koniec belki uderza kula o masie  $m$  mająca poziomą prędkość  $v_0$  (rys. 5.3.16.). Kula grzeźnie w belce. Znajdź prędkość kątową belki tuż po uderzeniu kuli. W jakie miejsce belki powinna uderzyć kula, aby składowa pozioma siły reakcji osi w chwili uderzenia wynosiła zero?



**rys. 5.3.16.**

**5.3.17.\*** Na brzegu poziomej, okrągłej platformy o masie  $M$  i promieniu  $R$  stoi student o masie  $m$ . Platforma może obracać się bez tarcia wokół pionowej osi. Jaka będzie prędkość kątowna platformy  $\omega$ , jeżeli student zacznie chodzić wzdłuż jej brzegu ze stałą względem niej prędkością  $v$ . Jaka drogę przebędzie student względem platformy w czasie jej jednego pełnego obrotu?

**5.3.18.\*** Samolot sportowy z jednym śmigłem lecący z prędkością  $v = 360 \text{ km/h}$  wykonuje zakręt o promieniu  $r = 800 \text{ m}$ . Oblicz moment sił wywierany przez śmigło na samolot, jeżeli moment bezwładności śmigła wykonującego  $n = 2400 \text{ obr/min}$  wynosi  $I = 15 \text{ kgm}^2$ .

**5.3.19.\*** Bąk o masie  $m = 0,4 \text{ kg}$  i momencie bezwładności  $I = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$  wiruje z prędkością kątową  $\omega = 80 \text{ s}^{-1}$  wokół osi, która tworzy kąt  $30^\circ$  względem pionu. Środek masy bąka znajduje się w odległości  $l = 10 \text{ cm}$  od punktu podparcia. Oblicz wartość prędkości kątowej precesji osi bąka.

## Rozwiązania:

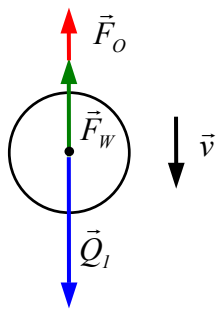
### 5.1. Dynamika ruchu postępowego.

#### 5.1.1.R

Na balon działają siły: ciężkości  $\vec{Q}$ , wyporu  $\vec{F}_w$  i oporu powietrza  $\vec{F}_o$ . Ponieważ balon w dół i w górę porusza się ze stałą prędkością, to na podstawie *I zasady dynamiki Newtona*, suma tych sił, (czyli siła wypadkowa) wynosi zero. Wartość siły oporu powietrza  $F_o$  zależy od prędkości poruszającego się ciała. W naszym zadaniu wartości prędkości przy opadaniu i wznoszeniu balonu są takie same, a więc także wartości sił oporu są jednakowe.

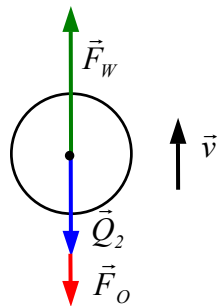
$$\vec{Q} + \vec{F}_w + \vec{F}_o = 0$$

Jeżeli balon opada,



równanie wiążące wartości sił ma postać:  $Q_1 - F_w - F_o = 0$ , gdzie  $Q_1 = Mg$ .

Gdy balon wznosi się:



$Q_2 + F_o - F_w = 0$ ,  $Q_2 = (M - m)g$ , gdzie  $m$  – masa wyrzuconego balastu.

Rozwiązując te równania otrzymamy:

$$m = 2 \left( M - \frac{F_w}{g} \right),$$

a po wstawieniu wartości liczbowych:

$$m = 2 \left( 300 \text{ kg} - \frac{2900 \text{ N}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} \right) = 20 \text{ kg}.$$

### 5.1.2.R.

Małpka działa na lianę siłą  $\vec{F}$  skierowaną w dół. Jest to siła napinająca lianę. Zgodnie z *III zasadą dynamiki*, liana działa na małpkę siłą reakcji  $\vec{F}_R$  o takiej samej wartości, skierowaną ku górze. Drugą siłą działającą na małpkę jest siła ciężkości  $\vec{Q}$ . Wypadkowa tych dwóch sił, zgodnie z *II zasadą dynamiki* nadaje małpce przyspieszenie  $\vec{a}$ :  $m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{Q}$ . Wartość siły  $F_R$  wyznaczmy z równania:

$ma = F_R - Q$ , gdzie  $Q = mg$ ,  $m$  – masa małpki.

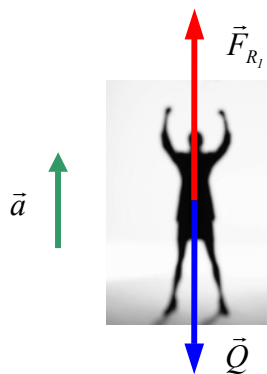
Ostatecznie:

$$F = F_R = m(a + g),$$

$$F = 5 \text{ kg} \left( 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) = 52,5 \text{ N}.$$

### 5.1.3.R.

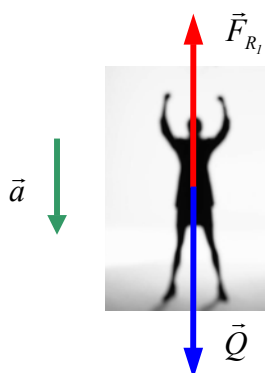
Na studentkę działają dwie siły: ciężkości  $\vec{Q} = m\vec{g}$  oraz reakcji podłoża (wagi)  $\vec{F}_R$ . Siła wypadkowa wynosi:  $m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R$ . Wartość siły  $\vec{F}_R$  równa jest sile nacisku na wagę (*III zasada dynamiki*), czyli wskazaniu wagi. Ruch w górę:



$$ma = F_{R_1} - Q \quad (1)$$

$$Q = mg$$

Ruch w dół:



$$ma = Q - F_{R_2} \quad (2)$$

Różnica sił reakcji, (czyli także wskazań wagi) wyznaczonych z równań (1) i (2) wynosi:

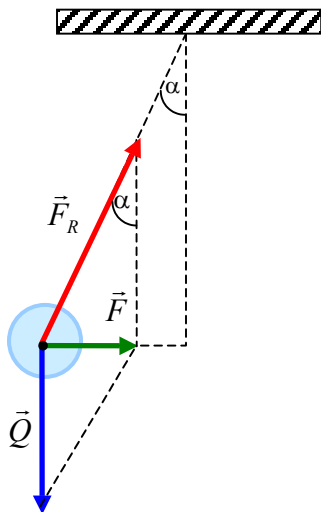
$$\Delta F_R = F_{R_1} - F_{R_2} = 2ma = 2 \frac{Q}{g} \cdot a,$$

czyli:

$$a = \frac{\Delta F_R \cdot g}{2Q} = \frac{50 \text{ N} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 500 \text{ N}} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

#### 5.1.4.R.

Na ciężarek działają siły: ciężkości  $\vec{Q} = m \vec{g}$  oraz reakcji nici  $\vec{F}_R$ . Ich wypadkowa  $\vec{F}$  nadaje ciężarkowi poziome przyspieszenie  $\vec{a}$ . Jest to zarazem przyspieszenie wagonu.



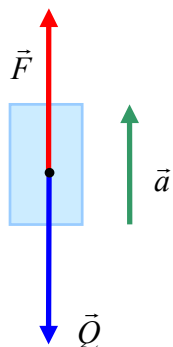
$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{Q} + \vec{F}_R = m \vec{a} \\ Q &= m g, \quad F = m a \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{F}{Q} = \frac{a}{g} \\ a &= g \operatorname{tg} \alpha \\ \frac{Q}{F_R} &= \cos \alpha \\ F_R &= \frac{Q}{\cos \alpha} = \frac{m g}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

Siła napinająca nić ma taką samą wartość jak siła  $F_R$  z jaką nić działa na ciężarek.

Liczbowe wartości:  $a = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \operatorname{tg} 15^\circ = 2,68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad F_R = \frac{0,1 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\cos 15^\circ} = 1,035 \text{ N}.$

#### 5.1.5.R.

Na ciało działają dwie siły: ciężkości  $\vec{Q}$  i siła  $\vec{F}$  przyłożona przez linę.



Ciało porusza się w górę z przyspieszeniem  $\vec{a}$ , czyli:

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{F} + \vec{Q}, \\ m a &= F - Q, \\ m &= \frac{Q}{g}, \\ F &= m a + Q = \frac{Q}{g} \cdot a + Q. \end{aligned}$$

Siła napinająca linę jest równa, co do wartości, sile  $F$  i maksymalna wartość przyspieszenia  $a_{max}$  spełnia równanie:

$$F_{max} = \frac{Q}{g} a_{max} + Q,$$

$$a_{max} = \frac{(F_{max} - Q)g}{Q} = \left( \frac{F_{max}}{Q} - 1 \right) g .$$

Przyspieszeniu  $a_{max}$  odpowiada najkrótszy czas  $t_{min}$  podnoszenia ciała na wysokość  $h$ , taki że:

$$h = \frac{1}{2} a_{max} \cdot t_{min}^2 .$$

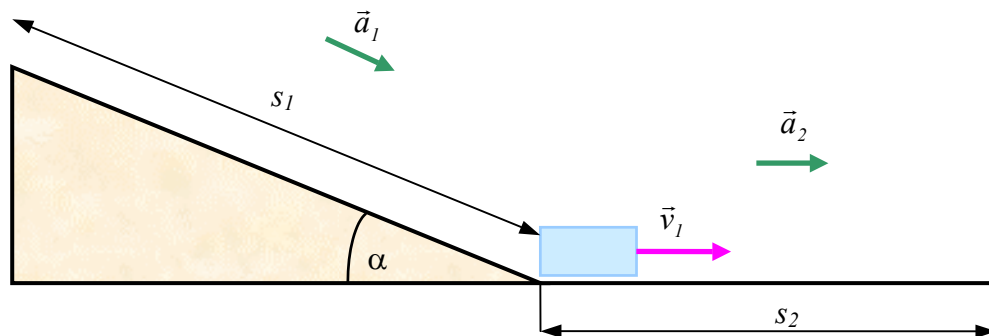
Ostatecznie:

$$t_{min} = \sqrt{\frac{2h}{a_{max}}} = \sqrt{\frac{2h}{\left( \frac{F_{max}}{Q} - 1 \right) g}} .$$

**Uwaga:** na wysokości  $h$  prędkość ciała wynosi  $v_{max} = a_{max} \cdot t_{min} = \sqrt{2h \cdot a_{max}}$ .

### 5.1.6.R.

Drogę sanek przedstawia rysunek:



Niech  $a_1$  i  $a_2$  oznaczają przyspieszenia na odcinkach drogi  $s_1$  i  $s_2$ , a  $t_1$  i  $t_2$  czasy przebycia tych odcinków.  $v_1$  jest prędkością u dołu zbocza. Związki między tymi wielkościami przedstawiają następujące równania kinematyczne:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 , \tag{1}$$

$$v_1 = a_1 t_1 , \tag{2}$$

$$s_2 = v_1 t_2 + \frac{1}{2} a_2 t_2^2 , \tag{3}$$

$$0 = v_1 + a_2 t_2 . \tag{4}$$

Eliminując czas  $t_1$  z równań (1) i (2) znajdujemy:

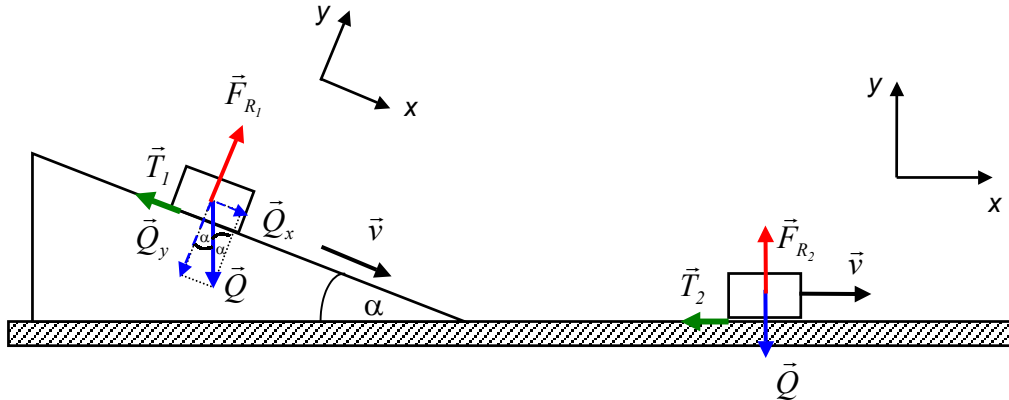
$$v_1 = \sqrt{2s_1 a_1} . \tag{5}$$

Równania (3) i (4) pozwalają otrzymać:

$$s_2 = -\frac{v_1^2}{2a_2} , \tag{6}$$

$$\text{czyli } s_2 = -\frac{2s_1 a_1}{2a_2} = -\frac{a_1}{a_2} s_1 . \tag{7}$$

Dalej należy wyznaczyć przyspieszenia  $a_1$  i  $a_2$ , które zależą od współczynnika tarcia (tarcie kinetyczne). Układ sił działających na sanki na odcinkach  $s_1$  i  $s_2$  przedstawia rysunek:



Na sanki działają trzy siły: ciężkości  $\vec{Q}$ , tarcia kinetycznego  $\vec{T}_1$  lub  $\vec{T}_2$  oraz reakcji podłoża  $\vec{F}_{R_1}$  lub  $\vec{F}_{R_2}$ . Siły  $\vec{Q}_x$  i  $\vec{Q}_y$  są rzutami wektora  $\vec{Q}$  na kierunek równoległy i prostopadły do równi (zbocza),  $\vec{v}$  oznacza prędkość ciała. Ponieważ ciało nie porusza się w kierunku prostopadłym do podłoża (kierunek y), to I zasada dynamiki pozwala napisać:

$$\vec{F}_{R_1} + \vec{Q}_y = 0, \quad \text{czyli} \quad F_{R_1} - Q_y = 0 \quad (8)$$

$$\text{oraz } \vec{F}_{R_2} + \vec{Q} = 0, \quad F_{R_2} - Q = 0 \quad (9)$$

gdzie  $Q = mg$ , a  $Q_y = Q \cos \alpha = mg \cos \alpha$ ,  $m$  – masa ciała.

Dla kierunku równoległego do podłoża (kierunek x) stosujemy II zasadę dynamiki (ruch jednostajnie zmienny):

$$\vec{Q}_x + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1, \quad \text{co oznacza:} \quad Q_x - T_1 = ma_1, \quad (10)$$

$$\text{gdzie } Q_x = Q \sin \alpha = mg \sin \alpha \quad \text{oraz } \vec{T}_2 = m\vec{a}_2$$

$$-T_2 = ma_2 \quad (11)$$

Wartości sił tarcia  $T_1$  i  $T_2$  określają związki:

$$T_1 = f F_{R_1}, \quad (12)$$

$$T_2 = f F_{R_2}. \quad (13)$$

Przyspieszenie  $a_1$  znajdujemy z równań (8), (10) i (12):

$$a_1 = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (14)$$

Jest to wyrażenie pozwalające obliczyć przyspieszenie ciała zsuwającego się z równi pochyłej o kącie nachylenia  $\alpha$ , gdy współczynnik tarcia wynosi  $f$ .

Przyspieszenie  $a_2$  wyznaczamy z równań: (9), (11) i (13):

$$a_2 = -f g. \quad (15)$$

Znak minus oznacza, że przyspieszenie ma zwrot przeciwny do przyjętego za dodatni (kierunek x) i ruch jest jednostajnie opóźniony. Wracając do równania (7), po skorzystaniu z (14) i (15) mamy:

$$s_2 = \frac{\sin \alpha - f \cos \alpha}{f} \cdot s_1.$$

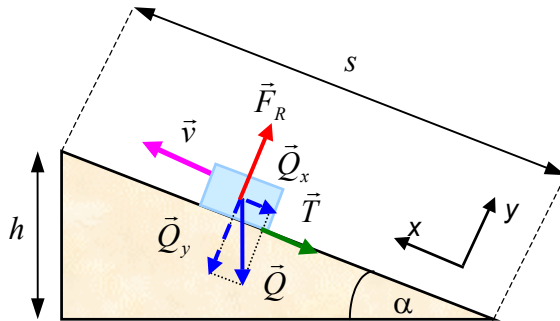
Po przekształceniu znajdujemy poszukiwany współczynnik tarcia:

$$f = \frac{\sin \alpha}{\frac{s_2}{s_1} + \cos \alpha}. \quad (16)$$

Dla  $\alpha = 30^\circ$ ,  $s_1 = 20 \text{ m}$ ,  $s_2 = 200 \text{ m}$  otrzymujemy:  $f = 0,046$ .

### 5.1.7.R.

Układ sił ciężkości  $\vec{Q}$ , tarcia  $\vec{T}$  i reakcji  $\vec{F}_R$ , które działają na samochód przedstawia rysunek.



Równanie wektorowe, wynikające z II zasady dynamiki, ma postać:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R + \vec{T}.$$

Rzutuując wektory na kierunki x i y otrzymamy równania wiążące wartości sił:

$$ma = -Q_x - T, \quad (1)$$

$$0 = -Q_y + F_R, \quad (2)$$

gdzie:

$$Q_x = Q \sin \alpha = mg \sin \alpha,$$

$$Q_y = Q \cos \alpha = mg \cos \alpha, \quad (3)$$

$$T = f F_R.$$

Wartość przyspieszenia  $a$  w kierunku x wyznaczona z równań (1) ÷ (3) wynosi:

$$a = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha). \quad (4)$$

Znak minus oznacza, że wektor  $\vec{a}$  ma zwrot przeciwny do zwrotu osi x.

Samochód do chwili zatrzymania się przebędzie drogę  $s$  w czasie  $t$ , a jego prędkość zmaleje od wartości  $v_0$  (na dole zbocza) do zera (na wysokości  $h$ ).

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (5)$$

$$0 = v_0 + at \quad (6)$$

$$h = s \cdot \sin \alpha \quad (7)$$

Z równań (5) i (6) otrzymamy:

$$s = -\frac{v_0^2}{2a}. \quad (8)$$

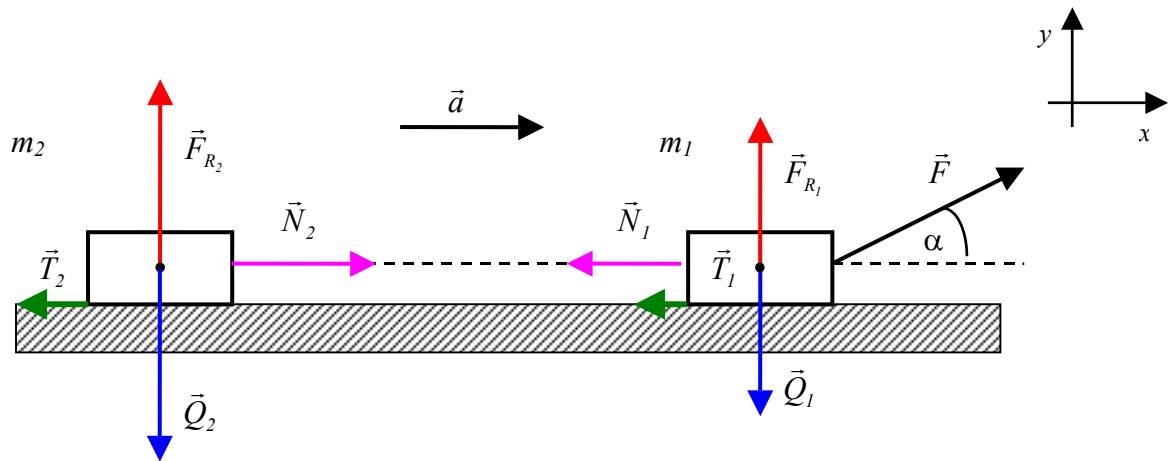
Ostatecznie równania (4), (7) i (8) dają:

$$h = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Dla  $v_0 = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $f = 0,1$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , otrzymamy:  $h = 17,5 \text{ m}$ .

### 5.1.8.R.

Na klocki działają siły, jak na rysunku.



$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$  - siły ciężkości,

$\vec{T}_1, \vec{T}_2$  - siły tarcia,

$\vec{F}_{R_1}, \vec{F}_{R_2}$  - siły reakcji podłoża,

$\vec{N}_1, \vec{N}_2$  - siły, jakimi nić działa na klocki,

$\vec{F}$  - dodatkowa siła zewnętrzna.

Oba klocki (bryły sztywne) i nierozciągliwa nić poruszają się z takim samym przyspieszeniem  $\vec{a}$  (kierunek x).

Druga zasada dynamiki w zapisie wektorowym ma postać:

$$m_1 \vec{a} = \vec{F} + \vec{Q}_1 + \vec{F}_{R_1} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 \quad \text{dla klocka o masie } m_1$$

oraz

$$m_2 \vec{a} = \vec{N}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{F}_{R_2} + \vec{T}_2 \quad \text{dla klocka o masie } m_2.$$

Rzutuując te wektory na kierunki x i y otrzymujemy równania:

$$m_1 a = F \cos \alpha - N_1 - T_1 \quad (1)$$

$$0 = F \sin \alpha - Q_1 + F_{R_1}$$

$$m_2 a = N_2 - T_2 \quad (2)$$

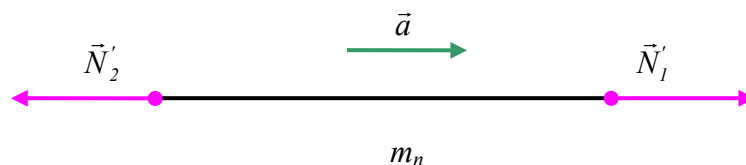
$$0 = -Q_2 + F_{R_2}$$

Równania uzupełniające:

$$Q_1 = m_1 g, \quad T_1 = f_1 F_{R_1} \quad (3)$$

$$Q_2 = m_2 g, \quad T_2 = f_2 F_{R_2}$$

Przyjmujemy na chwilę, że nić posiada masę  $m_n$ . Klocki na nić działają siłami  $\vec{N}'_1$  i  $\vec{N}'_2$ .



Oznacza to, że:

$$m_n a = N'_1 - N'_2. \quad (4)$$

Widać, że gdy  $m_n = 0$  (nić nieważka) to  $N'_1 = N'_2$ . Ale zgodnie z III zasadą dynamiki:

$N'_1 = N_1$  oraz  $N'_2 = N_2$ . A więc dla nieważkiej nici:

$$N_1 = N_2 = N. \quad (5)$$

Równania: (1), (2), (3), (4) i (5) pozwalają wyznaczyć przyspieszenie układu:

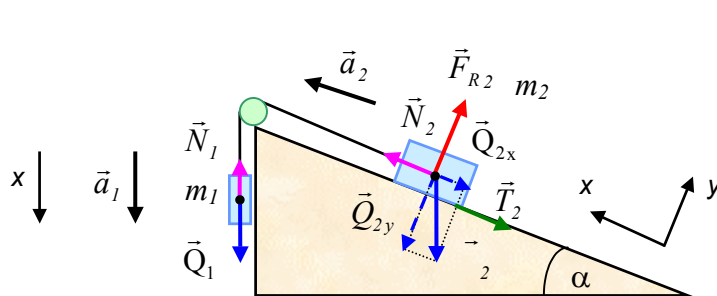
$$a = \frac{F(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha) - g(f_1 m_1 + f_2 m_2)}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

oraz siłę napinającą nić:

$$N = m_2 \frac{F(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha) + m_1 g(f_2 - f_1)}{m_1 + m_2}. \quad (7)$$

Powyższa analiza jest słuszna, jeżeli  $Q_1 > F \sin\alpha$  (klocek nie odrywa się od podłoża) i  $F(\cos\alpha + f_1 \sin\alpha) \geq g(f_1 m_1 + f_2 m_2)$  (czyli  $a \geq 0$ ). Maksymalna wartość przyspieszenia i napięcia nici wystąpi dla kąta  $\alpha_m$ , takiego, że  $\operatorname{tg}\alpha_m = f_1$  (maksimum wyrażenia:  $\cos\alpha + f_1 \sin\alpha$ ). Wzory (6) i (7) można stosować również w przypadku, gdy siła  $\vec{F}$  skierowana jest w dół względem poziomu. Wtedy przyjmujemy  $\alpha < 0$ .

### 5.1.9.R.



$\vec{Q}_1, \vec{Q}_2$  - siły ciężkości,  
 $\vec{N}_1, \vec{N}_2$  - siły z jakimi nić  
 działa na ciężarki,  
 $\vec{T}_2$  - siła tarcia,  
 $\vec{F}_{R2}$  - reakcja podłoża.

Równania wektorowe są następujące:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{N}_1,$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{N}_2 + \vec{Q}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_{R2}.$$

Rzuty tych wektorów na kierunki x i y tworzą równania:

$$m_1 a_1 = Q_1 - N_1 \quad \text{oraz} \quad m_2 a_2 = N_2 - Q_{2x} - T_2 \quad (1)$$

$$0 = F_{R2} - Q_{2y}.$$

Gdzie  $Q_1 = m_1 g$ ,  $Q_2 = m_2 g$ ,

$$Q_{2x} = Q_2 \sin\alpha = m_2 g \sin\alpha, \quad Q_{2y} = Q_2 \cos\alpha = m_2 g \cos\alpha,$$

$$T_2 = f_2 F_{R2}.$$

Nierozciągłość nici oznacza, że  $a_1 = a_2 = a$ . Z kolei nieważkość nici i bloczka sprawia, że:

$N_1 = N_2 = N$  (patrz rozwiązanie zad. 5.1.8.). Wykorzystując powyższe związki

otrzymujemy następujący układ równań:

$$m_1 a = m_1 g - N,$$

$$m_2 a = N - m_2 g \sin\alpha - f_2 m_2 g \cos\alpha.$$

Jego rozwiązaniem jest:

$$a = \frac{m_1 - m_2 (\sin\alpha + f_2 \cos\alpha)}{m_1 + m_2} \cdot g,$$

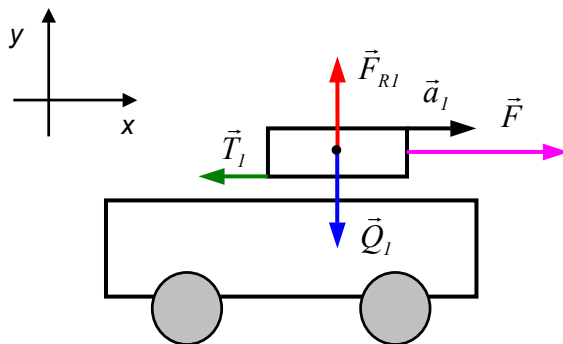
$$N = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin\alpha + f_2 \cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

**Uwaga:** jeżeli ciężarki poruszałyby się w przeciwną stronę, wartości przyspieszenia i siły naciągu nici wynosiłyby:

$$a = \frac{m_2 (\sin\alpha - f_2 \cos\alpha) - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$N = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin\alpha - f_2 \cos\alpha)}{m_1 + m_2}.$$

### 5.1.10.R.

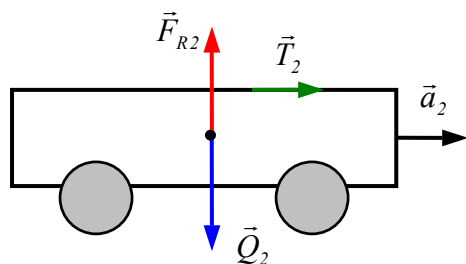


II zasada dynamiki dla klocka, kierunek poziomy, równanie skalarne:

$$m a_1 = F - T_1 \quad (1)$$

gdzie  $a_1$  – przyspieszenie klocka w układzie odniesienia związanym z Ziemią,

$T_1$  – siła tarcia działająca na klocek.



II zasada dynamiki dla wózka, kierunek poziomy:

$$M a_2 = T_2 \quad (2)$$

gdzie  $a_2$  – przyspieszenie wózka w układzie odniesienia związanym z Ziemią,  $T_2$  – siła tarcia działająca na wózek.

Oczywiście z III zasady dynamiki mamy:  $T_1 = T_2 = T$ .

Przyspieszenie klocka względem wózka wynosi:  $a_w = a_1 - a_2$ . (3)

Korzystając z równań (1) i (2) otrzymamy:

$$a_w = \frac{F - T \left(1 + \frac{m}{M}\right)}{m}. \quad (4)$$

Przyspieszenie  $a_w$  spełniać musi warunek:  $a_w \geq 0$ , co oznacza, że powinna wystąpić relacja:

$$F \geq T \left(1 + \frac{m}{M}\right). \quad (5)$$

Siła tarcia przyjmować może wartości od 0 do  $T_{max} = f F_{RI} = f Q_I = f mg$ . W tym zadaniu

$$T_{max} = 0,2 \cdot 3 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \text{ N}, \text{ czyli } T_{max} \left(1 + \frac{m}{M}\right) = 6 \text{ N} \left(1 + \frac{3}{15}\right) = 7,2 \text{ N}.$$

Ponieważ  $F = 20 \text{ N}$ , widać, że nierówność (5) jest spełniona, czyli  $a_w > 0$  i klocek przesuwa się względem wózka. Występujące tarcie jest tarcie kinetycznym, a siła tarcia przyjmuje wartość  $T_{max}$ .

Zatem przyspieszenie klocka względem wózka wynosi:

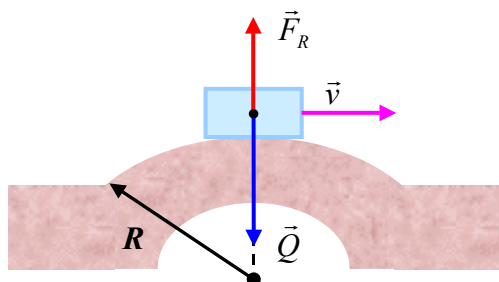
$$a_w = \frac{F - T_{max} \left(1 + \frac{m}{M}\right)}{m} = \frac{20 \text{ N} - 7,2 \text{ N}}{3 \text{ kg}} = 4,27 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Dla  $F \leq 7,2 \text{ N}$ , klocek względem wózka nie porusza się i  $a_w = 0$ .

## 5.2. Dynamika ruchu punktu materialnego po okręgu.

### 5.2.1.R.

Na samochód działają siły: ciężkości  $\vec{Q}$ , reakcji mostu  $\vec{F}_R$ , pociągowa silnika i tarcia. Dwie ostatnie skierowane są stycznie do toru i równoważą się. W najwyższym punkcie mostu, siły  $\vec{Q}$  i  $\vec{F}_R$  są współliniowe, a ich wypadkowa jest siłą dośrodkową  $\vec{F}_d$ . Czyli:



$$\begin{aligned} Q - F_R &= F_d \\ Q &= mg \\ F_d &= \frac{mv^2}{R} \end{aligned}$$

a więc:  $F_R = m \left( g - \frac{v^2}{R} \right)$ .

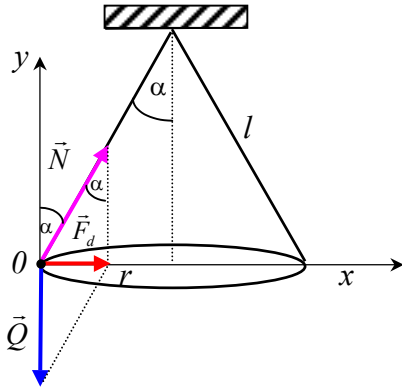
Dla  $m = 2000 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $v = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$ ,  $R = 100 \text{ m}$ , otrzymamy:  $F_R = 1,55 \cdot 10^4 \text{ N}$ . Siła nacisku na most ma wartość liczbową równą  $F_R$ . Jeżeli samochód traci

kontakt z podłożem, to  $F_R = 0$ , czyli  $g = \frac{v_l^2}{R}$ .

Zatem prędkość  $v_l = \sqrt{gR} = 31,6 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 113,8 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ .

### 5.2.2.R.

Na ciężarek działają dwie siły: siła ciężkości  $\vec{Q}$  i siła nici  $\vec{N}$ . Ich wypadkowa jest siłą dośrodkową  $\vec{F}_d$ :



$$\vec{F}_d = \vec{Q} + \vec{N},$$

$$Q = mg.$$

Rzutuując te siły na osie x i y otrzymamy:

$$F_d = N \sin \alpha,$$

$$N \cos \alpha - Q = 0.$$

Wartość siły dośrodkowej opisuje wzór:

$$F_d = m\omega^2 r,$$

gdzie  $\omega$  - prędkość kątowna ciężarka,

$r$  - promień okręgu, po którym porusza się ciężarek,  $r = l \sin \alpha$ .

Z powyższych zależności otrzymamy:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l \cos \alpha}}, \quad N = \frac{mg}{\cos \alpha}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \alpha}{g}}.$$

Wartości liczbowe:  $\omega = 5,3 \frac{1}{s}$ ,  $N = 1,4 \text{ N}$ ,  $T = 1,18 \text{ s}$ .

### 5.2.3.R.

Jeżeli kierowca hamuje, samochód porusza się ruchem prostoliniowym jednostajnie opóźnionym i do zatrzymania się w czasie  $t$  przebywa drogę  $s$ , taką że:

$$s = vt + \frac{1}{2} at^2,$$

$$0 = v + at,$$

gdzie  $a = -\frac{T}{m}$  - przyspieszenie,

$T = fmg$  - siła tarcia,

$m$  - masa samochodu i kierowcy.

Czyli

$$s = \frac{v^2}{2fg}.$$

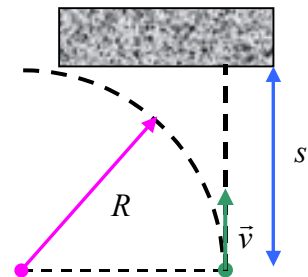
Jeżeli kierowca zakręca to samochód porusza się po okręgu o promieniu  $R$  i siłą dośrodkową jest siła tarcia:

$$F_d = T,$$

$$\frac{mv^2}{R} = T.$$

Czyli promień okręgu wynosi:

$$R = \frac{mv^2}{T}.$$



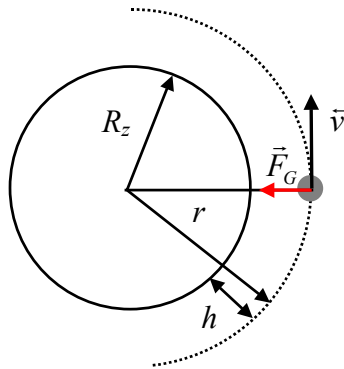
Minimalny promień odpowiada maksymalnej wartości siły tarcia  $T = T_{max} = fmg$ ,

$$R_{min} = \frac{v^2}{fg}.$$

Widać, że  $s < R_{min}$ , a więc kierowca powinien zdecydować się na hamowanie.

### 5.2.4.R.

Na satelitę o masie  $m$ , poruszającego się z prędkością  $v$  po orbicie kołowej o promieniu  $r$  działa tylko siła grawitacji, która jest siłą dośrodkową:



$$F_G = F_d,$$
$$\frac{GmM_z}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

gdzie  $r = R_z + h$ ,

$G$  – stała grawitacji,

$M_z$  – masa Ziemi,

$R_z$  – promień Ziemi.

$$\text{Otrzymamy: } v = \sqrt{\frac{GM_z}{R_z + h}}.$$

Dla  $h = 0$  prędkość  $v$  nosi nazwę **pierwszej prędkości kosmicznej**. Jej wartość liczbową wynosi  $v = 7,9 \text{ km/s}$ .

### 5.2.5.R.

$$\text{Odp.: } M_z = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

### 5.2.6.R.

Satelita stacjonarny porusza się po orbicie o promieniu  $r$ , której płaszczyzna pokrywa się z płaszczyzną równikową. Okres obiegu równy jest dobie ziemskiej. Zatem (patrz: zad. 5.2.4.)

$$\frac{GmM_z}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r,$$

$$v = \omega r,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ponieważ przyspieszenie ziemskie  $g = \frac{GM_z}{R_z^2}$ , promień satelity stacjonarnego przedstawia

wzór:

$$r = \sqrt[3]{\left(\frac{R_z T}{2\pi}\right)^2 g}.$$

Liczbowa wartość:  $r = 4,22 \cdot 10^7 \text{ m} = 42\,200 \text{ km}$ .

## 5.3. Dynamika ruchu obrotowego bryły sztywnej.

### 5.3.1.R.

Na koło działa siła tarcia, której moment hamujący  $M$  określa II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = I\varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  - przyspieszenie kątowe,  $I$  – moment bezwładności.

Prędkość kątowa  $\omega$  i przyspieszenie kątowe  $\varepsilon$  łączy zależność:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

którą w przypadku ruchu jednostajnie opóźnionego (co zakładamy) można zapisać:

$$\varepsilon = \frac{\omega_k - \omega_0}{\Delta t},$$

gdzie  $\omega_k$  – prędkość końcowa, tutaj  $\omega_k = 0$ ,

$\omega_0$  – prędkość początkowa  $\omega_0 = 2\pi n$ ,

$n$  – początkowa liczba obrotów koła w ciągu sekundy.

Czyli

$$\varepsilon = -\frac{2\pi n}{\Delta t},$$

a

$$M = -\frac{2\pi n I}{\Delta t}.$$

Minus „-” we wzorach oznacza, że ruch jest opóźniony i wektor momentu siły ma zwrot przeciwny do wektora prędkości kątowej.

Do chwili zatrzymania koło przebędzie drogę kątową  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2} \varepsilon \Delta t^2.$$

Uwzględnienie powyższych zależności daje:

$$\varphi = \pi n \Delta t.$$

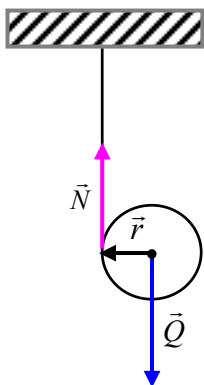
Całkowita liczba obrotów:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2} n \Delta t.$$

Liczbowe wartości:

dla  $n = 600 \text{ obr/min} = 10 \frac{1}{s}$ ,  $I = 0,2 \text{ kgm}^2$ ,  $\Delta t = 20s$  otrzymamy:  $M = -0,63 \text{ Nm}$ ,  $N = 100 \text{ obrotów}$ .

### 5.3.2.R.



Na rurę działają dwie siły: siła ciężkości  $\vec{Q}$  i siła nici  $\vec{N}$ . Druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego rury ma postać:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{N},$$

czyli

$$ma = Q - N,$$

$$Q = mg,$$

gdzie  $a$  – przyspieszenie środka masy rury.

II zasada dynamiki dla ruchu obrotowego rury względem jej osi ma postać:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{N} = I\vec{\varepsilon}.$$

Czyli:

$$rN \sin 90^\circ = I\varepsilon,$$

gdzie  $r$  – promień rury,  
 $I = mr^2$  - moment bezwładności względem osi rury,  
 $\varepsilon$  - przyspieszenie kątowe.

Ponieważ między nicią i rurą nie ma poślizgu, to

$$\varepsilon = \frac{a}{r}.$$

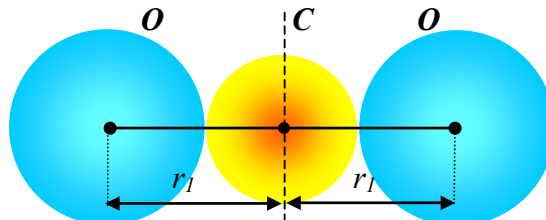
Po przekształceniach otrzymamy:

$$a = \frac{I}{2} g, \quad N = \frac{I}{2} Q.$$

Siła napięcia nici ma wartość równą  $N$ .

### 5.3.3.R.

Model cząsteczki  $\text{CO}_2$  przedstawia rysunek. Całe masy atomów zlokalizowane są praktycznie w jądrach, które traktujemy jak punkty materialne.



Moment bezwładności molekuly względem osi prostopadłej do osi molekuly dany jest wzorem:

$$I = 2m_O r_1^2,$$

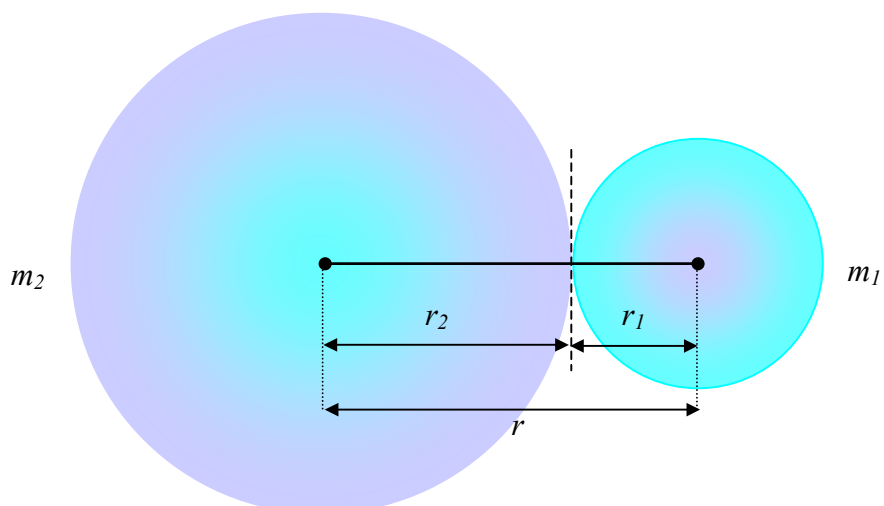
gdzie  $m_O$  – masa atomu tlenu,  $m_O = \frac{A_O}{N_A}$ ,

$A_O = 16 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  – masa molowa tlenu atomowego,  
 $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  – liczba Avogadra.

Jeżeli  $r_1 = 1,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  otrzymamy:

$$I = 6,8 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2.$$

### 5.3.4.R.



Moment bezwładności molekuly względem osi prostopadłej do osi molekuly

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2, \quad (1)$$

$$r = r_1 + r_2. \quad (2)$$

Z definicji środka masy:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2. \quad (3)$$

Rozwiązując układ równań (2) i (3) ze względu na  $r_1$  i  $r_2$  i wstawiając otrzymane wyniki do równania (1) otrzymamy:

$$I = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2 = \mu r^2,$$

gdzie  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  jest masą zredukowaną układu.

W przypadku molekuly CO:

$$m_1 = m_O = \frac{A_O}{N_A} = 2,66 \cdot 10^{-26} \text{ kg},$$

$A_O = 16 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  – masa molowa tlenu atomowego,

$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  – liczba Avogadra,

$$m_2 = m_C = \frac{A_C}{N_A} = 1,99 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$A_C = 12 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$  – masa molowa węgla atomowego,

$\mu_{CO} = 1,14 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ ,

$r = 1,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ .

Czyli

$$I_{CO} = 1,46 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2.$$

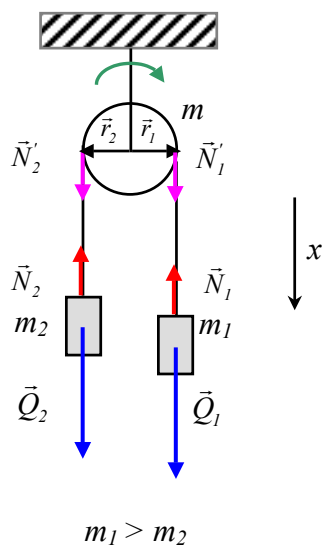
Dla molekuly HCl:

$A_H = 1 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$ ,

$A_{Cl} = 35,45 \cdot 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}$

$$i \quad I_{HCl} = 1,57 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2.$$

### 5.3.5.R.



Należy przeanalizować ruch trzech ciał: dwóch ciężarków, które poruszają się ruchem postępowym i bloczka, który wykonuje ruch obrotowy. Na każdy z ciężarków działają siły: ciężkości  $\vec{Q}_{1,2}$  i siła nici  $\vec{N}_{1,2}$ . Drugą zasadę dynamiki dla tych ciał można zapisać:

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{Q}_1 + \vec{N}_1,$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{Q}_2 + \vec{N}_2.$$

Ponieważ nić jest nierozciągliwa, to wartości przyspieszenia  $a_1$  i  $a_2$  są jednakowe:  $a_1 = a_2 = a$ .

Przyjmując, że ciężarek  $m_1$  porusza się w dół (zwrot dodatni) możemy napisać równania skalarne:

$$m_1 a = Q_1 - N_1, \quad (1)$$

$$-m_2 a = Q_2 - N_2, \quad (2)$$

gdzie  $Q_1 = m_1g$ ,  
 $Q_2 = m_2g$ .

Blok obraca się wokół nieruchomej osi przechodzącej przez jego środek. Momenty sił i reakcji osi są równe 0. Obrót bloku następuje pod wpływem momentów sił napięcia nici:

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \quad (3)$$

gdzie  $\varepsilon$  - przyspieszenie kątowe,

$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{N}'_1$  i  $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{N}'_2$  - momenty sił  $\vec{N}'_1$  i  $\vec{N}'_2$ , z jakimi nić działa na blok.

Jeżeli przyjąć, że wektory  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{N}'_1$  i  $\vec{N}'_2$  leżą w płaszczyźnie kartki, to wektory  $\vec{M}_1$  i  $\vec{M}_2$  są prostopadłe do kartki.  $\vec{M}_1$  zwrócony jest „od nas”, a  $\vec{M}_2$  „do nas”.

Wartości momentów sił wynoszą

$$M_1 = r_1 N_1' \sin 90^\circ = r N_1,$$

$$M_2 = r_2 N_2' \sin 90^\circ = r N_2,$$

gdyż  $r_1 = r_2 = r$  - promień bloczka, a  $N_1' = N_1$  i  $N_2' = N_2$  - na podstawie III zasady dynamiki. Przyjmując zwrot „od nas” za dodatni, możemy zapisać równanie (3) w postaci skalarnej:

$$I\varepsilon = M_1 - M_2 = rN_1 - rN_2. \quad (4)$$

Przyspieszenie kątowe bloczka  $\varepsilon$  i liniowe ciężarków  $a$  wiąże zależność

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \quad (5)$$

gdyż nić nie ślizga się po bloczku. Rozwiązując układ równań (1), (2), (4), (5), po uwzględnieniu, że  $I = \frac{1}{2}mr^2$  otrzymamy:

$$a = \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}},$$

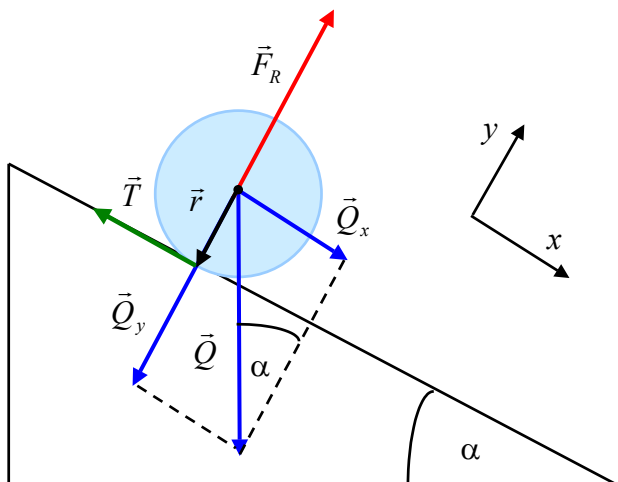
oraz

$$N_1 = m_1(g - a), \quad N_2 = m_2(g + a).$$

Liczbowe wartości dla  $g = 10 \frac{m}{s^2}$ :  $a = 3,33 \text{ ms}^{-2}$ ,  $N_1 = 3,33 \text{ N}$ ,  $N_2 = 2,67 \text{ N}$ .

**Uwaga:** jeżeli bloczek byłby nieważki, czyli  $m = 0$ ,  $I = 0$ , to z równania (4) widać od razu, że  $N_1 = N_2$ .

### 5.3.6.R.



Toczenie się ciała wygodnie jest rozpatrywać jako złożenie ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy. Do obu rodzajów ruchu stosujemy II zasadę dynamiki.

Na ciało toczące się po równi pochyłej działają trzy siły: siła ciężkości  $\vec{Q}$ , siła reakcji równi  $\vec{F}_R$  i siła tarcia  $\vec{T}$ . Drugą zasadę dynamiki dla ruchu postępowego można zapisać:

$$m\vec{a} = \vec{Q} + \vec{F}_R + \vec{T}.$$

Po rzutowaniu wektorów na kierunki  $x$  i  $y$  mamy:

$$ma = Q_x - T, \quad (1)$$

$$0 = F_R - Q_y,$$

$$\text{gdzie } Q_x = Q \sin \alpha = mg \sin \alpha,$$

$$Q_y = Q \cos \alpha = mg \cos \alpha.$$

Ponieważ nie ma poślizgu, to występujące tarcie jest tarcie statycznym:

$$T \leq T_{max} = fF_R = fQ_y = fmg \cos \alpha,$$

gdzie  $f$  – współczynnik tarcia (statycznego).

Druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego ma postać:

$$I\epsilon = \vec{r} \times \vec{T},$$

gdzie  $I$  – moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek masy,

$\epsilon$  – przyspieszenie kątowe.

Ruch obrotowy względem osi symetrii jest wynikiem działania tylko momentu siły tarcia,

gdź momenty sił  $\vec{Q}$  i  $\vec{F}_R$  wynoszą 0. W zapisie skalarnym mamy:

$$I\epsilon = rT \sin 90^\circ = rT, \quad (2)$$

Pamiętając, że przy braku poślizgu obowiązuje zależność:

$$\epsilon = \frac{a}{r}, \quad (3)$$

gdzie  $\epsilon$  – przyspieszenie kątowe w ruchu obrotowym względem osi przechodzącej przez środek masy,

$a$  – przyspieszenie liniowe środka masy,

$r$  – promień ciała,

mamy układ trzech równań (1), (2), (3), z którego wyznaczyć można  $a$ ,  $\epsilon$  i  $T$ .

Po rozwiązaniu tego układu otrzymamy:

$$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mr^2}}, \quad \epsilon = \frac{g \sin \alpha}{r \left( 1 + \frac{I}{mr^2} \right)}, \quad T = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mr^2}{I}}.$$

Warunek, przy którym możliwe jest toczenie bez poślizgu ma postać:

$$\frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mr^2}{I}} \leq fmg \cos \alpha \quad \text{lub} \quad \frac{I}{1 + \frac{mr^2}{I}} \leq fctg \alpha.$$

### 5.3.7.R.

Jeżeli oba ciała rozpoczynają ruch, to tę samą odległość w krótszym czasie przebędzie ciało poruszające się z większym przyspieszeniem. Z rozwiązania zad. 5.3.6. widać, że większe przyspieszenie liniowe będzie miało ciało o mniejszym momencie bezwładności. Ponieważ

$I_{kuli} = \frac{2}{5}mr^2$ , a walca  $I_{walca} = \frac{1}{2}mr^2$ , to jest oczywiste, że szybciej stoczy się kula.

### 5.3.8.R.

Odp:  $s = \frac{7v_0^2}{10g \sin \alpha}$  - droga, jaką przebędzie kula do chwili zatrzymania się,

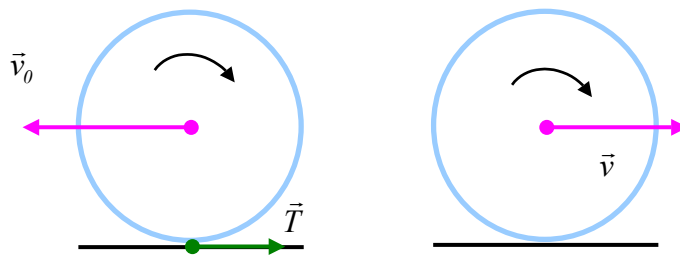
$t = \frac{14v_0}{5g \sin \alpha}$  - czas, po którym kula wróci do podstawy równi.

Dla  $v_0 = 10 \frac{m}{s}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $s = 9,9 m$ ,  $t = 3,36 s$ .

### 5.3.9.R.

Odp:  $s = \frac{12}{49} \frac{v_0^2}{\mu g}$ .

### 5.3.10.R.



Po zetknięciu się obręczy z podłożem zmiany w czasie jej prędkości liniowej i kątowej opisują wyrażenia:

$$v = v_0 - at, \quad \omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

gdzie  $a = \frac{T}{m}$  - przyspieszenie liniowe,

$T$  – siła tarcia kinetycznego występująca w czasie poślizgu,  
 $m$  – masa obręczy,

$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{TR}{I}$  - przyspieszenie kątowe,

$M = TR$  – moment siły tarcia,

$R$  – promień obręczy,

$I$  - moment bezwładności względem osi obręczy  $I = mR^2$ .

Wykorzystując powyższe zależności otrzymujemy następujący związek:

$$v = v_0 - \omega_0 R + \omega R.$$

Po zmianie zwrotu prędkości liniowej, obręcz w końcowej fazie toczy się bez poślizgu, a więc

$$\omega = -\frac{v}{R}, \quad v < 0, \quad \omega > 0,$$

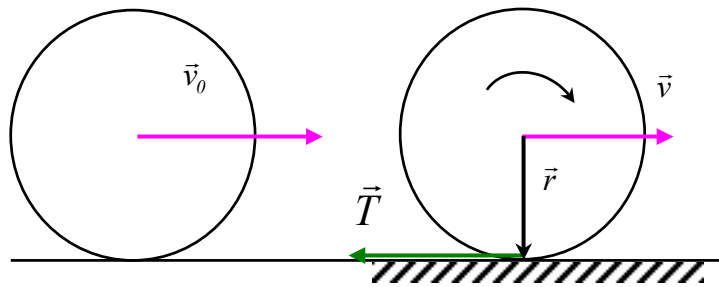
czyli

$$v = \frac{v_0 - \omega_0 R}{2}.$$

Prędkość  $v$  spełni warunek:  $v < 0$  gdy  $\omega_0 R > v_0$ . Jeżeli chcemy np. aby  $v = -v_0$ , to prędkości  $v_0$  i  $\omega_0$  muszą spełniać związek:  $\omega_0 R = 3v_0$ .

### 5.3.11.R.

Jeżeli walec znajdzie się na powierzchni szorstkiej o współczynniku tarcia  $f$ , pojawia się siła tarcia posuwistego  $\vec{T}$ , która zmniejsza prędkość liniową walca. Moment  $\vec{M}$  tej siły względem osi walca nadaje mu ruch obrotowy. Walec będzie toczył się początkowo w obecności poślizgu.



$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{T},$$

$$M = I\varepsilon = rT \sin 90^\circ = rT,$$

gdzie  $T = fmg$ ,  $m$  – masa walca.

Z drugiej zasady dynamiki

$$\vec{T} = m\vec{a},$$

$$-T = ma,$$

więc przyspieszenie walca

$$a = -fg.$$

Po czasie  $t$  prędkość liniowa walca wynosi:

$$v = v_0 + at = v_0 - fgt,$$

a prędkość kątową:

$$\omega = \varepsilon t.$$

Przyspieszenie kątowe:

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{rT}{I} = \frac{rfmg}{I}.$$

Jeżeli począwszy od chwili  $t_1$  ruch walca ma być bez poślizgu, to

$$v_1 = \omega_1 r,$$

czyli

$$v_0 - fgt_1 = \frac{rfmg}{I} t_1 r,$$

stąd

$$t_1 = \frac{v_0}{fg \left( 1 + \frac{mr^2}{I} \right)}.$$

Prędkość liniowa walca w ruchu bez poślizgu jest stała i wynosi:

$$v_I = \frac{v_0}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

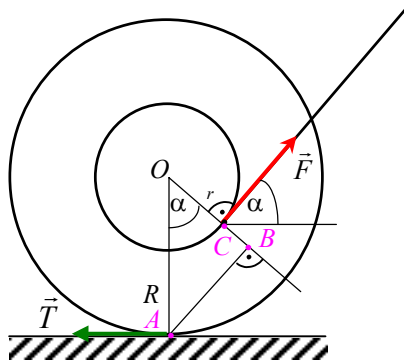
Dla walca  $I = \frac{1}{2} mr^2$ , czyli

$$t_I = \frac{v_0}{3fg}, \quad v_I = \frac{2}{3} v_0.$$

### 5.3.12.R.

Wygodnie jest traktować ruch kołowrotu jako obrót wokół chwilowej osi  $A$ , przechodzącej przez punkty, w których kołowrót styka się z podłożem. Taki obrót uwarunkowany jest tylko momentem siły  $\vec{F}$  względem osi  $A$ . Momenty pozostałych sił: tarcia  $\vec{T}$  oraz ciężkości i reakcji podłoża (niezaznaczonych na rysunku) wynoszą 0. Zatem:

$$M = Fx = I_A \varepsilon,$$



gdzie  $x = CB$ ,

$$\cos\alpha = \frac{OB}{R} = \frac{x+r}{R}, \quad \text{czyli } x = R\cos\alpha - r$$

oraz  $I_A = I_0 + mR^2$  – moment bezwładności względem osi  $A$  (na podstawie *twierdzenia Steinera*),  $I_0$  – moment bezwładności względem osi kołowrotu,

$$\varepsilon = \frac{a}{R} - \text{przyspieszenie kątowe,}$$

$a$  – przyspieszenie liniowe środka masy.

Stąd

$$a = \frac{R\cos\alpha - r}{I_0 + mR^2} RF.$$

Jeżeli  $\cos\alpha > \frac{r}{R}$ , to  $a > 0$  i kołowrót będzie poruszać się w kierunku nici (nić nawija się).

Gdy  $\cos\alpha < \frac{r}{R}$ , nić odwija się z kołowrotu.

Kiedy  $\cos\alpha = \frac{r}{R}$ ,  $\varepsilon = 0$  i ruch obrotowy nie występuje, a ruch postępowy szpuli opisuje równanie:

$$Ma = F \cos \alpha - T = \frac{Fr}{R} - T,$$

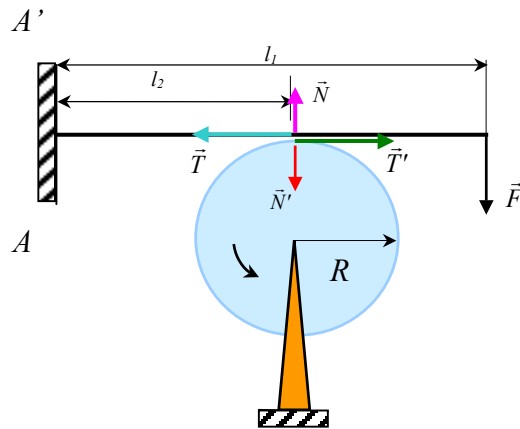
gdzie  $T = f(mg - F \sin \alpha)$

$f$  - współczynnik tarcia posuwistego.

Ponieważ  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}$  otrzymamy:

$$a = \frac{Fr}{mR} - fg + \frac{fF}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2}.$$

### 5.3.13.R.



Rysunek przedstawia siły działające na dźwignię i walec po rozpoczęciu hamowania. Z III zasady dynamiki wynika, że

$$T = T'$$

$$N = N'.$$

Warunek równowagi momentów sił względem osi A-A' można zapisać:

$$F l_1 - N l_2 = 0.$$

Stąd

$$N = \frac{F l_1}{l_2}.$$

Siła tarcia działająca na walec wynosi:

$$T' = f N' = f N = f \frac{F l_1}{l_2}.$$

Związany z nią moment siły

$$M = R T' = R f \frac{F l_1}{l_2}$$

nadaje walcowi przyspieszenie kątowe (opóźnienie):

$$\varepsilon = \frac{M}{I_0}.$$

Prędkość kątowna walca maleje od  $\omega_0$  do  $0$  w czasie  $t$ :

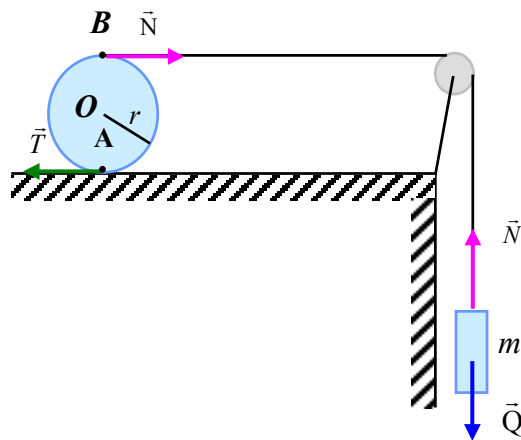
$$0 = \omega_0 - \varepsilon t.$$

Poszukiwana wartość siły  $F$  wynosi:

$$F = \frac{\omega_0 I_0 l_2}{t f R l_1}.$$

### 5.3.14.R.

Sytuację przedstawia rysunek. Rozpatrujemy dwa ciała: walec i ciężarek. Ponieważ nica jest nierozciągliwa i nie ślizga się po walcu, to wartość przyspieszenia liniowego  $a_B$  punktu  $B$  jest taka sama jak wartość przyspieszenia ciężarka  $a$ :  $a_B = a$ .



Nieważkość nici i bloczka pozwala napisać (porównaj rozwiązania zadań 5.1.8. i 5.3.5.):

$$N = N'.$$

Inne zależności:

- przyspieszenie środka masy walca:

$$a_O = \varepsilon r$$

gdzie:  $\varepsilon$  - przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego,  
 $r$  - promień walca,

- przyspieszenie punktu  $B$ :

$$a_B = a = a_O + \varepsilon r = 2 a_O$$

- II zasada dynamiki dla walca:

- ruch postępowy:  $Ma_O = N - T,$

- ruch obrotowy:  $I \varepsilon = Nr + Tr,$

- II zasada dynamiki dla ciężarka:  $ma = Q - N',$   
 czyli  $ma = mg - N.$

Rozwiązaniem tego układu równań jest

- przyspieszenie ciężarka:

$$a = \frac{4g}{4 + \frac{M}{m} + \frac{I}{mr^2}},$$

- siła tarcia działająca na walec:

$$T = \frac{a}{4} \left( \frac{I}{r^2} - M \right).$$

Dla pełnego walca  $I = \frac{1}{2} Mr^2$  czyli:

$$a = \frac{4g}{4 + \frac{3M}{2m}}, \quad T = -\frac{1}{8} Ma.$$

Znak „-” oznacza, że w tym przypadku siła tarcia ma zwrot przeciwny do założonego, czyli skierowana jest „w prawo”.

Dla walca wydrążonego  $I = Mr^2$  czyli:

$$a = \frac{2g}{2 + \frac{M}{m}}, \quad T = 0.$$

Brak siły tarcia oznacza tutaj, że walec wydrążony może toczyć się bez poślizgu nawet po idealnie gładkim stole.

### 5.3.15.R.

Momenty sił ciężkości i reakcji osi względem osi obrotu wynoszą 0. Ich linia działania przechodzi przez oś. Dla układu *student-krzesło-odważniki* spełniona jest zasada zachowania momentu pędu. Początkowy moment pędu układu wynosi:

$$L_1 = (I_0 + 2ml_1^2)\omega_1, \quad \text{gdzie } \omega_1 = 2\pi n_1,$$

a po zgięciu rąk:

$$L_2 = (I_0 + 2ml_2^2)\omega_2, \quad \text{gdzie } \omega_2 = 2\pi n_2.$$

Ponieważ  
otrzymamy:

$$L_1 = L_2$$

$$n_2 = n_1 \frac{I_0 + 2ml_1^2}{I_0 + 2ml_2^2}.$$

Dla  $n_1 = 1 \text{ obr/s}$ ,  $I_0 = 3 \text{ kgm}^2$ ,  $m = 5 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0,8 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,2 \text{ m}$  mamy  $n_2 = 2,8 \text{ obr/s}$ .

### 5.3.16.R.

Na belkę działają dwie siły: siła ciężkości i reakcja osi. Przyjmijmy oś *A* za oś odniesienia. Moment reakcji osi wynosi 0 ponieważ jej linia działania przechodzi przez oś. Moment siły ciężkości również wynosi 0, gdyż zakładamy iż czas hamowania kuli w belce jest bardzo krótki i belka w tym czasie nie odchyli się znacząco od pionu. Można, więc przyjąć, że spełniona jest zasada zachowania momentu pędu. Moment pędu układu *kula-belka* przed uderzeniem kuli równy jest momentowi pędu kuli

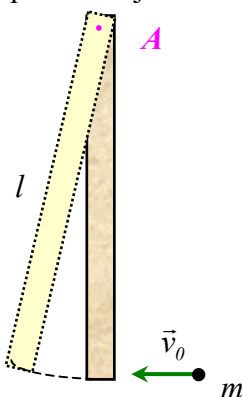
$$L_1 = mv_0 l.$$

Po uderzeniu

$$L_2 = I\omega + ml^2\omega = (I + ml^2)\omega,$$

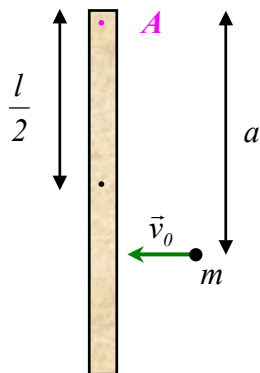
gdzie  $I = \frac{1}{3} Ml^2$ .

Ponieważ  $L_1 = L_2$  otrzymamy:



$$\omega = \frac{mv_0 l}{I + ml^2} = \frac{v_0}{l \left( \frac{M}{3m} + 1 \right)}$$

Składowa pozioma siły reakcji osi jest jedyną siłą zewnętrzną mogącą zmienić pęd układu. Jeżeli siła ta wynosi 0, to spełniona jest zasada zachowania pędu. Przyjmijmy, że kula uderza w belkę w odległości  $a$  od osi obrotu. Pęd układu przed zderzeniem równy jest pędowi kuli



Po uderzeniu kuli pęd układu wynosi:

$$p_2 = m\omega a + Mv_S,$$

gdzie  $v_S = \omega \frac{l}{2}$  – prędkość środka masy belki.

Z kolei z zasady zachowania momentu pędu mamy:

$$mv_0 a = I\omega + ma^2\omega,$$

czyli

$$\omega = \frac{mv_0 a}{I + ma^2}.$$

Po drobnych przekształceniach można zauważyć, że pęd  $p_2$  daje się zapisać w postaci ułamka:

$$p_2 = \frac{p_1}{\frac{Mla}{2} + ma^2}.$$

Widać, że  $p_2 = p_1$  jeżeli  $I = \frac{Mla}{2}$ . Ponieważ  $I = \frac{Ml^2}{3}$  więc dla  $a = \frac{2}{3}l$  spełniona jest zasada zachowania pędu i składowa pozioma siły reakcji osi wynosi zero. Jeżeli np.  $\frac{Mla}{2} > I$  czyli  $a > \frac{2}{3}l$  to  $p_2 > p_1$ , a więc pęd układu wzrasta. Pozioma składowa reakcji osi ma w tym przypadku wartość różną od zera i zwrot taki jak uderzająca kula.

### 5.3.17.R.

Korzystamy z zasady zachowania momentu pędu układu *student-tarcza*. Początkowy moment pędu wynosi  $L_1 = 0$  (student i tarcza nie poruszają się). Jeżeli student chodzi wzdłuż brzegu tarczy z prędkością  $v$  względem niej, a tarcza obraca się z prędkością kątową  $\omega$ , to moment pędu układu  $L_2$  można zapisać:

$$L_2 = m(v - \omega R)R - I\omega,$$

gdzie  $I = \frac{1}{2}MR^2$  - moment bezwładności tarczy. Z zasady zachowania momentu pędu

$L_1 = L_2 = 0$  otrzymamy:

$$\omega = \frac{v}{R \left( 1 + \frac{M}{2m} \right)}.$$

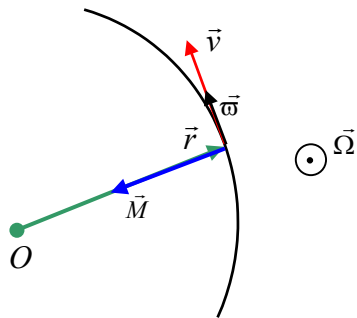
Okres obrotu tarczy wynosi  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , a poszukiwana droga:

$$s = vT = 2\pi R \left(1 + \frac{M}{2m}\right).$$

### 5.3.18.R.

Układ wektorów przedstawia rysunek. Śmigło działa na samolot momentem siły:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L},$$



gdzie  $\vec{\Omega}$  - wektor kątownej prędkości precesji,

$\vec{L} = I\vec{\omega}$  - moment pędu śmigła,

$I$  - moment bezwładności śmigła,

$\omega = 2\pi n$  prędkość kątowna śmigła,

$n$  - częstość obrotów.

Tutaj  $\Omega = \frac{v}{r}$ ,  $v$  - prędkość liniowa samolotu w jego ruchu po okręgu o promieniu  $r$ . Wektor

$\vec{\Omega}$  zwrócony jest „do nas”.

Tak więc wartość momentu siły  $M$  wynosi:

$$M = \frac{2\pi n I v}{r}.$$

Liczbowa wartość dla  $n=2400 \text{ obr/min} = 40 \text{ s}^{-1}$ ,  $I = 15 \text{ kgm}^2$ ,  $v = 360 \text{ km/h} = 100 \text{ m/s}$ ,  
 $r = 800 \text{ m}$ :

$$M = 471 \text{ Nm}.$$

### 5.3.19.R.

Odp.:

$$\Omega = \frac{mgl}{I\omega} = \frac{0,4 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,1 \text{ m}}{0,005 \text{ kgm}^2 \cdot 80 \frac{1}{\text{s}}} = 1 \frac{1}{\text{s}}.$$