

## 20. Model atomu wodoru według Bohra.

Wybór i opracowanie zadań – Jadwiga Mechlińska-Drewko.  
Więcej zadań na ten temat znajdziesz w II części skryptu.

### 20.1.

Opierając się na teorii Bohra znaleźć:

- a/ promień  $n$ -tej orbity elektronu w atomie wodoru,
- b/ prędkość elektronu na tej orbicie,
- c/ jego całkowitą energię na  $n$ -tej orbicie.

### 20.2.

Wyznaczyć długość fali promieniowania emitowanego przez atom wodoru przy przejściu elektronu z orbity  $n$  na orbitę  $k$ .

### 20.3.

Przejście elektronu z  $n$ -tej orbity na orbitę  $k=1$  zachodzi z emisją fotonu o długości  $\lambda=1,026 \cdot 10^{-7}$  m. Znaleźć promień  $n$ -tej orbity.

### 20.4.

Znaleźć dla dwóch pierwszych orbit atomu wodoru wartość siły przyciągania kulombowskiego między elektronem i jądrem oraz natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez jądro w odległości równej promieniowi pierwszej i drugiej orbity.

### 20.5.

Ile razy zwiększy się promień orbity elektronu w atomie wodoru będącego w stanie podstawowym ( $n=1$ ) przy wzbudzeniu go kwantem o energii  $E_\nu=12,09$  eV ?

### 20.6.

W atomie wodoru elektron przeskakuje z drugiej orbity na pierwszą. Wyznaczyć zmianę wartości pędu elektronu oraz zmianę jego energii kinetycznej przy tym przeskoku.

### 20.7.

Seria linii wodorowych z zakresu światła widzialnego (tzw. seria Balmera) powstaje przy przejściu elektronu z wyższych orbit na drugą. Znaleźć granice serii Balmera.

### 20.8.

Wykazać, że częstotliwość fali świetlnej emitowanej przez atom wodoru przy przejściu elektronu z  $n+1$  na  $n$ -tą orbitę dąży, przy dużych  $n$ , do częstotliwości obiegu elektronu na  $n$ -tej orbicie.

### 20.9.

Obliczyć minimalne liniowe rozmiary pozytonium oraz jego energię jonizacji. Pozytonium jest układem złożonym z pozytonu i elektronu krążących wokół wspólnego środka masy.

### 20.10.

Obliczyć wartość orbitalnego momentu magnetycznego elektronu w atomie wodoru w stanie podstawowym.

## Rozwiązania:

### 20.1.R.

Korzystając z równań:

$$mV_n r_n = n \frac{h}{2\pi} \quad i \quad \frac{mV_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2},$$

gdzie:

m- masa elektronu,

$r_n$ - promień n-tej orbity,

$V_n$ - prędkość elektronu na n-tej orbicie,

h- stała Plancka,

e- ładunek elektronu,

$\epsilon_0$ - przenikalność elektryczna próżni,

wyznaczamy:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 \quad i \quad V_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}.$$

Całkowita energia elektronu jest sumą energii kinetycznej  $E_{kn} = \frac{mV_n^2}{2}$

i energii potencjalnej oddziaływania elektronu z jądrem  $E_{pn} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$  czyli

$$E_n = E_{kn} + E_{pn} = -\frac{me^4}{8\pi\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{Rhc}{n^2}, \quad \text{gdzie} \quad R = \frac{me^4}{8\pi\epsilon_0^2 h^3 c} = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

R - stała Rydberga.

### 20.2.R.

$$h\nu = h \frac{c}{\lambda} = E_n - E_k = -\frac{Rhc}{n^2} + \frac{Rhc}{k^2}.$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{k^2} \right) = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

### 20.3.R.

Z poprzednich zadań mamy zależności:

$$(1) \quad \frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$(2) \quad r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2.$$

Po wstawieniu  $n^2$  wyznaczonego z równania (1) do równania (2) mamy:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 \lambda R k^2}{\pi m e^2 (\lambda R - k^2)} = 4,75 \cdot 10^{-10} \text{ m}..$$

**20.4.R.**

Ponieważ

$$F_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n^2} \quad \text{oraz} \quad r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 \quad \text{to} \quad F_n = \frac{\pi m^2 e^6}{4h^4 \epsilon_0^3} \frac{1}{n^4} .$$

Natężenie pola elektrycznego  $E = \frac{F}{q} = \frac{F}{|e|}$ .

Wynik obliczeń:

$$F_1 = 8,22 \cdot 10^{-8} N, \quad E_1 = 5,13 \cdot 10^{11} \frac{V}{m} \quad \text{oraz} \quad F_2 = \frac{F_1}{2^4}, \quad E_2 = \frac{E_1}{2^4} .$$

**20.5.R.**

W wodorze, przy przejściu elektronu z orbity  $n$ -tej na pierwszą orbitę następuje emisja kwantu o energii:

$$E_\nu = h\nu = E_n - E_1 = -\frac{Rhc}{n^2} + \frac{Rhc}{1^2} .$$

Znając wartość energii kwantu można wyznaczyć wartość  $n$ :  $n = \sqrt{\frac{Rhc}{Rhc - E_\nu}} = 3$ .

Elektron w procesie opisanym w zadaniu został wzbudzony na poziom trzeci.

Ponieważ:  $r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$  i  $r_n = r_1 n^2$  to  $\frac{r_n}{r_1} = n^2$  i  $\frac{r_3}{r_1} = 3^2 = 9$ .

**20.6.R.**

Z postulatu Bohra wynika:  $2\pi m V_n r_n = nh$  i  $p_n = \frac{nh}{2\pi r_n}$ .

Ponieważ  $r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$  to  $p_n = \frac{me^2}{2\epsilon_0 h} \frac{1}{n}$  oraz  $E_{kn} = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}$ .

Z powyższych zależności wynika, że:

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{me^2}{2\epsilon_0 h} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{me^2}{4\epsilon_0 h} \quad \text{oraz} \quad \Delta E = E_1 - E_2 = \frac{3me^4}{32\epsilon_0^2 h^2} .$$

**20.7.R.**

Przy przejściu elektronu z  $n$ -tej orbity na  $k$ -tą następuje emisja światła o długości spełniającej

równanie  $\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ . Dla serii Balmera  $k=2$ .

Przy przejściu z  $n=3$  na  $k=2$  nastąpi emisja kwantu o najmniejszej energii (i największej długości fali) w serii Balmera. Jest to długofalowa granica serii przy czym:

$$\frac{1}{\lambda_{\max.}} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{5}{36} R \quad \text{czyli} \quad \lambda_{\max.} = 660 nm .$$

Krótkofalowa granica odpowiada przejściu z  $n = \infty$  na  $k=2$  i wynosi  $\lambda_{\min.} = \frac{4}{R} = 367 nm$ .

### 20.8.R.

Ponieważ  $r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2$  i  $V_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h n}$  częstotliwość obiegu elektronu w atomie wodoru jest równa:  $\nu_n = \frac{V_n}{2\pi r_n} = \frac{m e^4}{4\varepsilon_0^2 h^3} \cdot \frac{1}{n^3}$   $R = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}$ .

Przy przejściu elektronu z orbity  $n+1$  na orbitę  $n$  następuje emisja kwantu o energii:

$$E_\nu = h\nu = E_{n+1} - E_n = -\frac{Rhc}{(n+1)^2} + \frac{Rhc}{n^2} \quad \text{czyli} \quad \nu = Rc \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] = Rc \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{(n+1)^2 n^2}$$

Dla  $n \gg 1$  częstotliwość kwantu dąży do wartości  $\nu_n = \frac{2Rc}{n^3}$  co jest równe częstotliwości obiegu elektronu.

### 20.9.R.

Pozyton jest cząstką o masie równej masie elektronu. Ładunek pozytonu jest równy co do wartości bezwzględnej ładunkowi elektronu i wynosi  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ . Uwzględniając ruch elektronu i pozytonu wokół wspólnego środka masy wprowadzamy masę zredukowaną  $\mu$  układu elektron-pozyton:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \quad \text{gdzie } m_e \text{ i } m_p \text{ odpowiednio masy elektronu i pozytonu.}$$

Korzystając z układu równań:

$$2\pi \mu V_n r_n = n h$$

i

$$\frac{\mu V_n^2}{r_n} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2},$$

przyjmując, że  $m_e = m_p = m$  wyznaczamy

$$r_n = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2.$$

Minimalne rozmiary pozytonium określa promień pierwszej orbity:  $r_1 = \frac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$ .

Energia wiązania pozytonium wynosi:

$$E_w = E_k + E_p = \frac{\mu V_n^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{m e^4}{16\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Energia jonizacji z poziomu pierwszego  $E_j = \frac{m e^4}{16\varepsilon_0^2 h^2} = 6,8 eV$ .

**20.10.R.**

Moment magnetyczny obwodu z prądem

$$\mu = IS$$

$I$  natężenie prądu jaki daje ruch elektronu po orbicie kołowej,  
 $S$  powierzchnia obejmowana przez ten obwód z prądem.

$$I = \frac{e}{T_n} \quad T_n \text{ –okres obiegu elektronu na } n\text{-tej orbicie}$$

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{V_n} \quad S = \pi r_n^2$$

$$\mu_n = \frac{eV_n}{2\pi r_n} \pi r_n^2$$

$$\mu_n = \frac{eV_n r_n}{2}$$

$$\mu_n = \frac{eh}{4\pi m} n = \mu_B n$$

$\mu_B = 0,93 \cdot 10^{-23} \text{ J/T}$  -magneton Bohra.