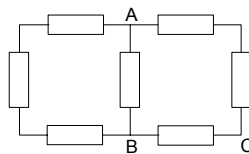


17. Ruch ładunku w polu elektromagnetycznym. Prąd elektryczny

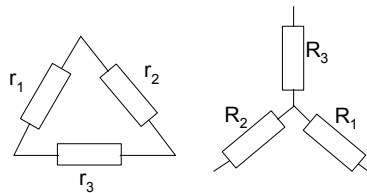
Wybór i opracowanie Marek Chmielewski

17.1. Z aluminiowego pręta o przekroju poprzecznym S wykonano zamknięty pierścień o promieniu r . Ten pierścień wiruje z prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jego środek prostopadle do płaszczyzny pierścienia. Ruch pierścienia został gwałtownie zatrzymany. Przyjmując, że w czasie hamowania trwającego t przyspieszenie kątowe było stałe, oblicz natężenie prądu płynącego podczas hamowania ruch. Przewodnictwo aluminium wynosi σ .

17.2. Jednakowe oporniki o oporach R każdy połączono jak na rysunku. Oblicz opór zastępczy układu między punktami A i B oraz B i C.



17.3. Fragment rozgałęzionego obwodu składa się z trzech oporników połączonych w trójkąt. Znaleźć oporność R_1, R_2, R_3 elementów gwiazdy, która wmontowana w obwód na miejsce trójkąta będzie równoważna trójkątowi.



17.4. Pyłek o masie m i ładunku q spada w próżni w polu płaskiego kondensatora, naładowanego do napięcia U . Okładki kondensatora są ustawione pionowo i oddalone od siebie o d . Jaka powinna być wysokość okładek, by pyłek nie uderzył o okładkę. W chwili początkowej pyłek znajdowała się tuż przy powierzchni jednej z okładek.

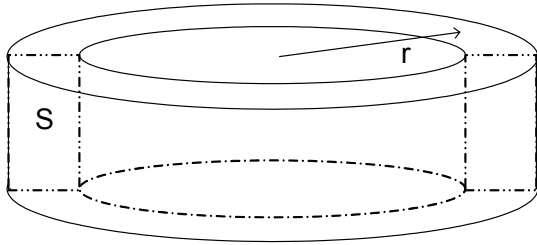
17.5. W jednorodnym polu magnetycznym o indukcji B z tego samego punktu wybiegają dwie cząstki o masie m i ładunku Q każda, z tymi samymi prędkościami, ale różnie skierowanymi. Wektor prędkości pierwszej cząstki V_1 tworzy z kierunkiem wektora B kąt α , a wektor prędkości drugiej cząstki V_2 – kąt β , przy czym $\alpha > \beta$. W jakim odstępie czasu t po pierwszej powinna wybiec druga cząstka, aby nastąpiło spotkanie. Wektory V_1 , V_2 i B leżą w jednej płaszczyźnie.

17.6. Oblicz, jaka masę m musiałaby mieć cząstka naładowana ładunkiem elementarnym e aby w próżni okrążyła kulę ziemską wzdłuż równika magnetycznego, jeżeli składowa pozioma wektora indukcji magnetycznej ma średnia wartość B_s , a prędkość cząstki wynosi V .

17.7. Elektron o energii kinetycznej E wlatuje w jednorodne pole magnetyczne o indukcji B . Oblicz promień okręgu, po którym będzie krążył elektron w tym polu. Ładunek elektronu wynosi q , masa m . Wektor prędkości elektronu V jest prostopadły do wektora B . Jaka będzie częstotliwość obiegu elektronu po orbicie? Zbadać, jak zależy częstotliwość obiegu elektronu po orbicie od jego energii kinetycznej.

17. Rozwiązania

17.1.R. Podczas hamowania na elektrony działają siły bezwładności



$$F = ma = m \frac{dV}{dt} = mr \frac{d\omega}{dt}$$

$$mr \frac{d\omega}{dt} = Ee$$

$$j = \sigma E = \frac{i}{S} \Rightarrow E = \frac{i}{s\sigma}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \text{const} \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega}{t}$$

$$mr \frac{\omega}{t} = \frac{ie}{s\sigma} \Rightarrow i = \frac{mr\omega s\sigma}{et}$$

17.2.R.

Korzystając z praw Kirchhoffa

a)

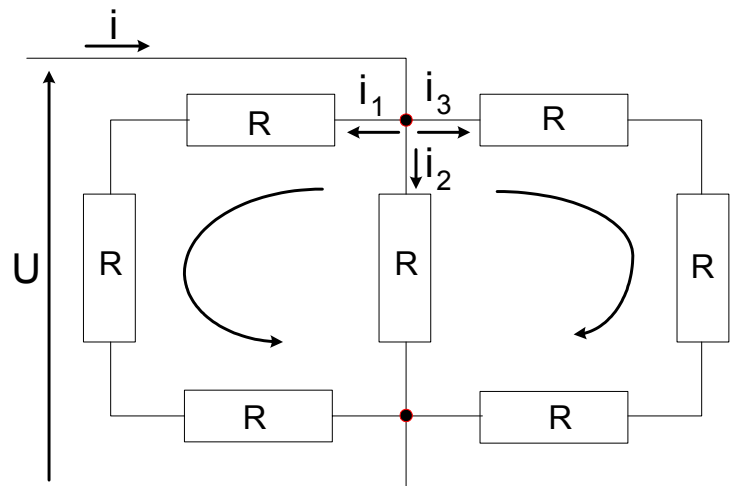
$$R_z = \frac{U}{i}$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 \quad i_1 = i_3$$

$$U = i_2 R = 3i_3 R$$

$$i_2 = \frac{U}{R} \quad i_3 = \frac{U}{3R} \quad i = 2i_3 + i_2$$

$$i = \frac{5U}{3R} \quad R_z = \frac{U}{\frac{5U}{3R}} = \frac{3}{5}R$$



b)

$$R_z = \frac{U}{i}$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

$$i_1 + i_2 = i_4$$

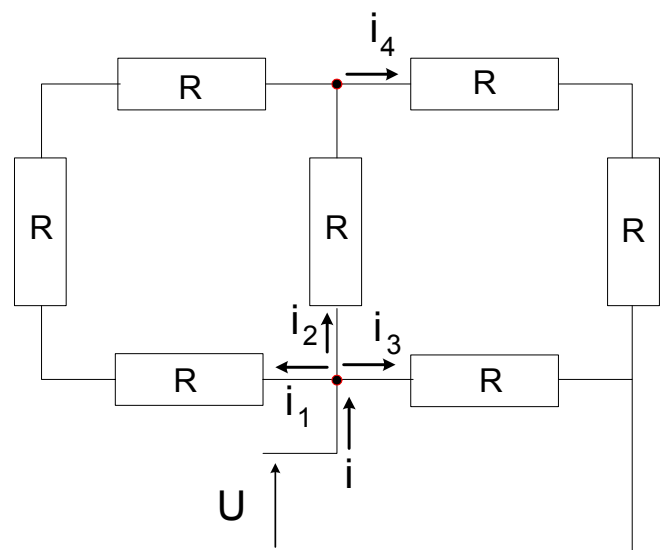
$$i_3 + i_4 = i$$

$$i_1 R + i_1 R + i_1 R = i_2 R$$

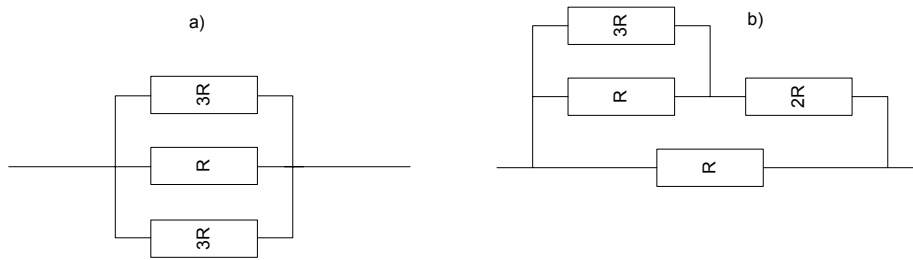
$$i_2 R + i_4 R + i_4 R = i_3 R$$

$$U = i_3 R$$

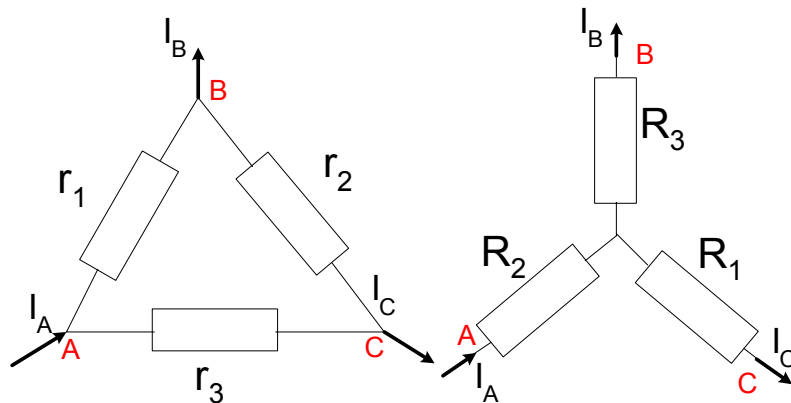
$$\left. \begin{array}{l} i = i_1 + i_2 + i_3 \\ i_1 + i_2 = i_4 \\ i_3 + i_4 = i \\ i_1 R + i_1 R + i_1 R = i_2 R \\ i_2 R + i_4 R + i_4 R = i_3 R \\ U = i_3 R \end{array} \right\} R_z = \frac{11}{15}R$$



Uwaga w obu przypadkach można wyznaczyć rezystancje zastępczą szukając oporu poszczególnych gałęzi obwodów.



17.3.R.



Zamiennik musi działać tak aby prądy jak i spadki napięć w jednym jak i drugim układzie były takie same więc:

Dla układu trójkąta

$$I_A = \frac{U_{AB}}{r_1} + \frac{U_{AC}}{r_3} \quad I_C = \frac{U_{BC}}{r_2} + \frac{U_{AC}}{r_3}$$

$$U_{AC} = U_{AB} + U_{BC}$$

$$I_A = U_{AB} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} \right) + \frac{U_{BC}}{r_3} \quad I_C = \frac{U_{AB}}{r_3} + U_{BC} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right)$$

Dla układu gwiazdy

$$U_{AB} = I_A R_2 + I_B R_3 \quad U_{BC} = -I_B R_3 + I_C R_1$$

$$I_B = I_A - I_C$$

$$U_{AB} = I_A (R_2 + R_3) - I_C R_3 \quad U_{BC} = -I_A R_3 + I_C (R_1 + R_3)$$

Układy te należy rozwiązać ze względu na I_A oraz I_C

$$I_A = \frac{(R_1 + R_3)U_{AB}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + \frac{R_3 U_{BC}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

$$I_C = \frac{R_3 U_{AB}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + \frac{(R_2 + R_3)U_{BC}}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Porównując wyrażenia na prąd dla trójkąta i gwiazdy można wyznaczyć szukane zależności przez przyrównanie wyrażeń przy U_{AB} i U_{BC} .

$$r_3 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_3}$$

W analogiczny sposób obliczamy kolejne zależności. Łatwo zauważyć regularność w uzyskiwaniu tych wyrażeń.

$$r_1 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1} \quad r_2 = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_2}$$

17.4.R.

Rozpatrujemy układ równań

$$x(t) = \frac{a_x t^2}{2} + V_{0x} t + x_0$$

$$y(t) = \frac{a_y t^2}{2} + V_{0y} t + y_0$$

Z warunków zadania otrzymujemy:

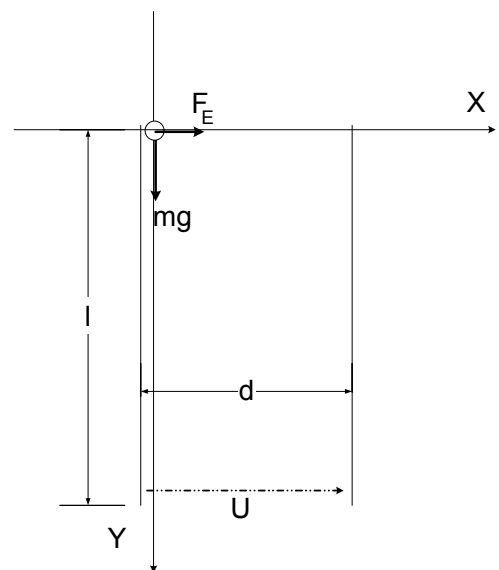
$$V_{0x} = V_{0y} = x_0 = y_0 = 0$$

$$F_e = Eq = \frac{U}{d} q \quad ma_x = \frac{U}{d} q \Rightarrow a_x = \frac{Uq}{md}$$

$$a_y = g$$

$$x(t_k) = d = \frac{Uq t_k^2}{2md} \Rightarrow t_k = \sqrt{\frac{2md^2}{Uq}}$$

$$y(t_k) = l_{\max} = \frac{g t_k^2}{2} = \frac{gmd^2}{Uq} \Rightarrow l < \frac{gmd^2}{Uq}$$



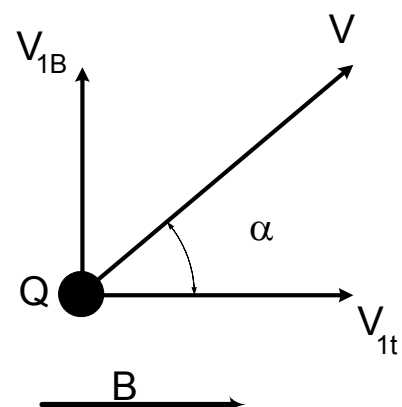
17.5.R.

Obie cząstki będą się poruszały po liniach śrubowych

Jest to ruch złożony z ruchu jednostajnego z prędkościami

$$V_{1t} = V \cos \alpha$$

$$V_{2t} = V \cos \beta$$



i z ruchu po okręgu przy czym:

$$\frac{mV_B^2}{R} = QV_B B \quad R = \frac{mV_B}{QB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{V_B} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{QB}$$

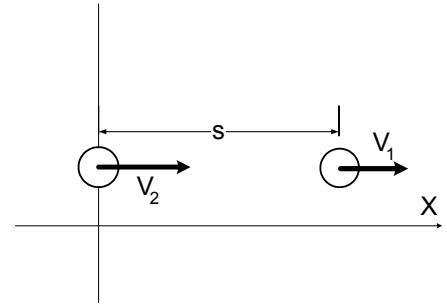
$$s = V_1 t_0$$

Okres obiegu nie zależy od prędkości

Czas potrzebny na to by cząstka 2 dogoniła cząstkę 1 można zapisać w następujący sposób

$$x_1 = x_0 + V_{1t} t_0 \quad x_2 = V_{2t} t \quad x_1 = x_2 \Rightarrow t = t_k$$

$$t_k = \frac{V_{1t} t_0}{V_{2t} - V_{1t}} = \frac{t_0 V \cos \alpha}{V \cos \beta - V \cos \alpha}$$



Aby cząstki się spotkały całkowita różnica czasu musi być równa minimum jednemu całkowitemu okresowi

$$t_k = T \Rightarrow t_0 = \frac{2\pi m}{QB} \frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

17.6.R.

Przy założeniu, że siła ciężkości jest pomijalnie mała

$$mg \ll \frac{mV^2}{R}$$

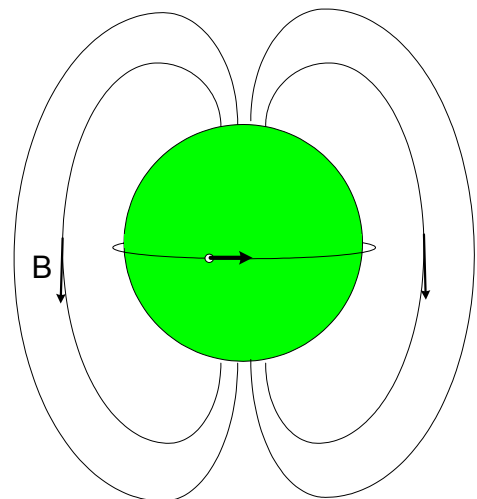
Zadanie to można rozwiązać rozpatrując działanie tylko siły pochodzącej od pola magnetycznego F_l .

$$\vec{V} \perp \vec{B} \Rightarrow F_l = qVB$$

$$\frac{mV^2}{R} = qVB \Rightarrow m = \frac{RqB}{V}$$

W przypadku uwzględnienia siły grawitacji, która jest zawsze równoległa do siły dośrodkowej, należy rozwiązać następujące równanie.

$$\frac{mV^2}{R} + mg = qVB \Rightarrow m = \frac{qVB}{\frac{V^2}{R} + g}$$



17.7.R.

$$E = \frac{mV^2}{2} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{2E}{m}} \qquad \frac{mV^2}{R} = qVB \Rightarrow R = \frac{mV}{qB} = \frac{\sqrt{2mE}}{qB}$$
$$f = \frac{1}{T} \qquad T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi mV}{qBV} = \frac{2\pi m}{qB} \Rightarrow f = \frac{qB}{2\pi m}$$

W przypadku gdy $V \ll c$ (mechanika klasyczna) częstotliwość obiegu ładunku po okręgu nie zależy od prędkości, a więc nie zależy od energii kinetycznej. Jeżeli prędkości są duże (mechanika relatywistyczna) masa cząstki zależy od energii kinetycznej, dlatego energia ta ma wpływ na częstotliwość obiegu ładunku.