11. Termodynamika.

Wybór i opracowanie zadań od 11.1 do 11.15 - Bogusław Kusz.

11.1.
W zamkniętej butelce o objętości V_0=500cm^3 znajduje się powietrze o temperaturze t_0=27^{0}C i ciśnieniu p_0=1000 hPa. Po pewnym czasie słońce ogrzało butelkę do temperatury t_k=57^{0}C. Oblicz liczbę cząsteczek gazu znajdującego się w butelce, końcowe ciśnienie powietrza oraz ciepło pobrane przez gaz. Narysuj wykres *p(V)*.

11.2.
Butla gazowa o objętości V_1=0,3m^3 wytrzymuje ciśnienie p_{kr}=10^{7}Pa. Znajduje się w niej *m*=3369g azotu o temperaturze t_1=27^{0}C. Obliczyć ciśnienie gazu w temperaturze t_1. Jeśli w wyniku pożaru butla ogrzeje się to w jakiej temperaturze nastąpi jej rozerwanie? Masa molowa azotu: μ_p=28g.

11.3.
W procesie izobarycznym *n*=2mole wodoru o temperaturze T_1=300K i ciśnieniu p_1=10^{6}Pa, zmniejszyło swoją objętość *k*=2 razy. Oblicz temperaturę końcową, pracę i ciepło występujące w tym procesie. Przedstaw pracę na wykresie *p(V)*.

11.4.
Jeden mol tlenu jest ogrzewany pod stałym ciśnieniu atmosferycznym p_0=1033 hPa począwszy od temperatury t_0=0^{0}C. Oblicz ile energii trzeba doprowadzić do gazu w celu potrojenia objętości jego objętości i jaką pracę wykonał gaz ?

11.5.
Cienki worek foliowy zanurzony w wodzie o temperaturze *t*=20^{0}C zawiera powietrze o objętości V_1=20 dm^3 i ciśnieniu p_1=1000hPa. Jaką objętość będzie miał worek po zanurzeniu go o *h*=10m? Oblicz ciepło oddane przez gaz oraz narysuj wykres tej przemiany przy założeniu, że temperatura gazu nie uległa zmianie. Dane: gęstość wody ρ=1g/cm^3, przyspieszenie ziemskie *g*=10m/s^2.

11.6.
W procesie izotermicznym objętość *n* moli powietrza o temperaturze *T* wzrosła *s* razy. Ile razy zmalało ciśnienie ? Ile wynosi zmiana energii wewnętrznej ? Jaką pracę wykonał gaz ?

11.7.
W wyniku szybkiego rozprężeniu *n*=2 moli tlenu jego objętość wzrosła *s*=4 razy. Obliczyć przyrost energii wewnętrznej tego gazu jeśli jego ciśnienie początkowe wynosiło p_1=8,31·10^{6}Pa a temperatura T_1=300K.

11.8.
Podczas izobarycznego sprężania tlenu o masie *m* = 10 kg i temperaturze początkowej *t* = 100°C, objętość jego zmniejszyła się *s* = 1,25 razy. Obliczyć:
a) wykonaną podczas sprężania pracę,
b) ilość odprowadzonego ciepła.

11.9.

Znaleźć rodzaj gazu, który został sprężony izotermicznie oraz jego objętość początkową, jeżeli ciśnienie m=2 kg gazu po jego sprężeniu zwiększyło się trzykrotnie, a praca wykonana przy sprężaniu $W = -1{,}37 \cdot 10^3$ kJ. Przed sprężeniem ciśnienie gazu równało się $p_1 = 5 \cdot 10^5$ Pa, a jego temperatura t= 27°C.

11.10. Masę m = 160 g tlenu ogrzewa się od t_1 = 50°C do t_2 = 60°C. Obliczyć ilość pobranego ciepła i zmianę energii wewnętrznej tlenu w przypadku, gdy ogrzewanie zachodziło:

a) izochorycznie,
b) izobarycznie.

11.11.
Dwa identyczne naczynia połączone są zaworem. W jednym z nich znajduje się azot pod ciśnieniem $p_1 = 2{,}64 \cdot 10^5$ Pa i w temperaturze t_1= 27°C a w drugim panuje próżnia. Znaleźć końcową temperaturę i ciśnienie gazu, jeżeli po otwarciu zaworu część gazu przeszła do pustego naczynia i ciśnienia w obu naczyniach wyrównały się. Proces przejścia azotu z jednego naczynia do drugiego jest procesem adiabatycznym.

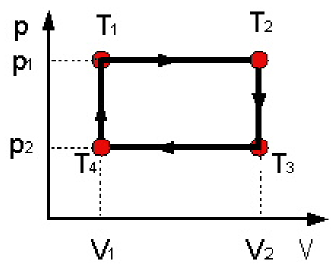
11.12.
W silniku Carnota następują cztery przemiany stałej ilości gazu:

- izotermiczne rozprężanie gazu z objętości V_1 do V_2 w temperaturze T_1,
- adiabatyczne rozprężanie z objętości V_2 do V_3,
- izotermiczne sprężanie gazu z objętości V_3 do V_4 w temperaturze T_2,
- adiabatyczne rozprężanie z objętości V_4 do V_1.

Oblicz sprawność takiego silnika gdy :
a/ T_1=373K i T_2=273K
b/ T_1=773K i T_2=273K
c/ T_1=373K i T_2=3K.

11.13.* W silniku wykorzystano n=5 moli azotu w cyklu:
1-2 sprężono izochorycznie gaz o temperaturze T_1=300K w objętości V_1 do ciśnienia $p_2 = 3p_1$
2-3 rozprężono adiabatycznie do ciśnienia początkowego p_1 i objętości V_3,
3-1 następnie przy stałym ciśnieniu osiągnięto stan pierwotny. Narysu wykres *p(V)* tego cyklu oraz oblicz wydajność silnika.

11.14.
Oblicz wydajność silnika pracującego w cyklu pokazanym na rysunku.
Dane: T_1=600K, T_2=900K, T_3=600K, gaz jednoatomowy - κ=1,67.



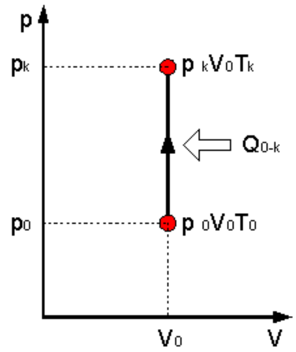
11.15.
Dlaczego podczas pompowania dętki roweru rozgrzewa się pompka?

11. Rozwiązania:

11.1.R.

Jest to przemiana izochoryczna stałej ilości gazu doskonałego dla, której:

$$V_0 = const. \quad \Rightarrow \quad \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_k V_0}{T_{k.}} = nR \quad i \quad \frac{p_0}{T_0} = \frac{p_k}{T_{k.}} \quad (1)$$



Liczba moli i cząsteczek gazu wynosi odpowiednio:

$$n = \frac{p_0 V_0}{T_0 R} \quad i \quad N = N_A n \quad (2).$$

Ciśnienie końcowe gazu wynosi: $p_k = \dfrac{p_0 T_k}{T_0} \quad (3)$.

Ciepło pobrane przez gaz:

$$Q_{0-k} = \Delta U + W = \Delta U + \int_{V_0}^{V_k} p\, dV = \Delta U = C_v n(T_k - T_0) \quad ponieważ \;\; W = 0 \qquad (4)$$

przy czym $C_V = \dfrac{i}{2}R \quad gdzie \quad i = 5$.

Wstawiając dane: V_0=5·10^{-4}m^3, T_0= 300K, T_k= 330K, R=8,31 J/(mol·K), N_A=6,023·10^{23}, do wzorów (2), (3) i (4) otrzymujemy:
liczbę moli n=0,02,
liczbę cząsteczek N=0,12·10^{23},
ciśnienie końcowe p_k=1,1·10^5 Pa oraz
ciepło Q=12,47J.

11.2.R.

$$p_1 = \frac{T_1 mR}{V_1 \mu} = 10^6 Pa, \quad T_{kr} = T_1 \frac{p_{kr}}{p_1} = 3000K.$$

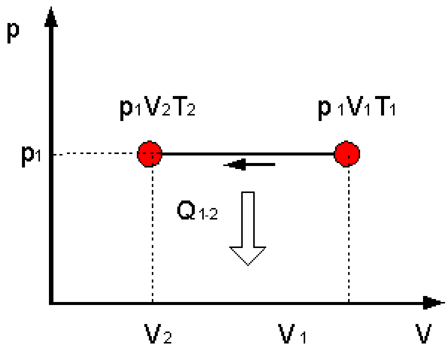
11.3.R.

W procesie izobarycznym mamy:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = nR \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad (1) \qquad \text{oraz}$$

$$p_1 = const. \quad \Rightarrow$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2} \quad \Rightarrow T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = T_1 \frac{1}{k} \quad (2).$$



Ponieważ pojedyncza cząsteczka wodoru zawiera dwa atomy więc jej liczba stopni wynosi i=5 a ciepło molowe jest równe: $C_V = \dfrac{i}{2}R = \dfrac{5}{2}R \quad oraz \quad C_p = \dfrac{i+2}{2}R = \dfrac{7}{2}R \quad (3)$.

Ciepło oddane przez gaz:

$$Q_{1-2} = \Delta U + W = \Delta U + \int_{V_1}^{V_2} p_1 \, dV = C_v n(T_2 - T_1) + p_1 \int_{V_1}^{V_2} dV = C_v n(T_2 - T_1) + p_1(V_2 - V_1)$$

$$Q_{1-2} = C_p n(T_2 - T_1) \quad oraz \quad W = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1 (\frac{1}{k} - 1) = nRT_1(\frac{1}{k} - 1) \qquad (4)$$

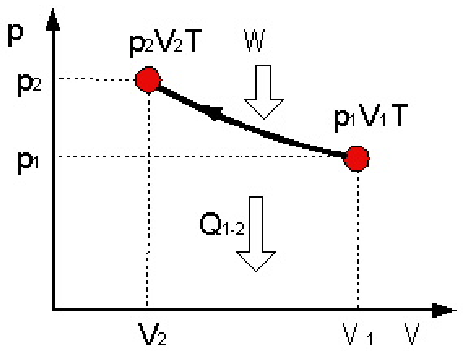
Wynik obliczeń: $T_2 = 150K$, $W = -1246J$, $Q_{1-2} = -9146J$. Ujemna wartość W i Q oznacza, że ciepło zostało oddane przez gaz i praca została wykonana nad sprężeniem gazu.

11.4.R.
$Q = 15880J, \quad W = 4537J.$

11.5.R.
Jest to przemiana izotermiczna gazu doskonałego, więc:

$$T = const. \quad \Rightarrow \frac{p_1 V_1}{T} = nR \ \ czyli \quad n = \frac{p_1 V_1}{TR} \quad oraz$$

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad (1)$$



Na głębokości h ciśnienie hydrostatyczne wynosi:
$p_h = \rho g h \quad czyli \quad p_2 = p_1 + \rho g h \quad (2)$.
Z równań (1) i (2) wynika:

$$V_2 = \frac{p_1 V_1}{p_2} = \frac{p_1 V_1}{p_1 + \rho g h} = \frac{V_1}{2} = 10 dm^3 \quad (3).$$

Ciepło tej przemiany obliczamy:

$$Q_{1-2} = \Delta U + W = W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (4)$$

$$Q_{1-2} = p_1 V_1 \ln 2 = -2000 \ln 2 \ J = -1386J.$$

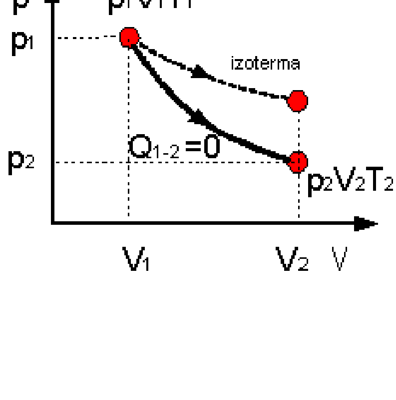
Wynik ujemny świadczy, że w tej przemianie praca została wykonana nad gazem i gaz oddał otoczeniu nadmiar ciepła.

11.6.R.
Ciśnienie zmalało s razy, $\Delta U = 0$, natomiast $W = Q = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT \ln s$.

11.7.R.
Jeśli proces rozprężania jest szybki to można założyć, że w czasie przemiany nie nastąpiła wymiana ciepła z otoczeniem. Jest to przypadek przemiany adiabatycznej dla której charakterystyczne są zależności:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2} = nR \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad (1) \ \ oraz$$

$$p_1 V_1^{\kappa} = p V^{\kappa} = p_2 V_2^{\kappa} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{p_1 V_1^{\kappa}}{V^{\kappa}} (2).$$



Wiemy, że w tej przemianie gazu $Q_{1-2} = \Delta U + W = 0 \quad czyli \quad \Delta U = -W = -\int_{V_1}^{V_2} pdV \quad (3)$.

Z równań (2) i (3) otrzymujemy:

$$\Delta U = -W = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1 V_1^{\kappa}}{V^{\kappa}} dV = -p_1 V_1^{\kappa} \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V^{\kappa}} dV = p_1 V_1^{\kappa} \frac{1}{\kappa - 1}(V_2^{1-\kappa} - V_1^{1-\kappa}) \quad (4).$$

Dla gazu doskonałego o dwuatomowej cząsteczce liczba stopni swobody i=5 a współczynnik κ wynosi:

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5} = 1{,}4 .$$

Ponieważ $V_2 = sV_1 \quad \Rightarrow \quad \Delta U = p_1 V_1^{\kappa} \frac{1}{\kappa - 1} V_1^{1-\kappa}(s^{1-\kappa} - 1) = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1}(s^{1-\kappa} - 1)$.

Wynik obliczeń: $V_1 = 6 \cdot 10^{-4} m^3, \quad \Delta U = -5306 J$ wskazuje, że gaz wykonał pracę kosztem swojej energii wewnętrznej.

Uwaga: dla porównania, na wykresie pokazano wykres izotermicznej przemiany tego gazu.

11.8.R.

Dla tlenu mamy: $i = 5 \quad \Rightarrow \quad C_p = \frac{5}{2} R \quad oraz \quad \mu = 32 g$.

Korzystając z zależności w zadaniu 11.3 otrzymujemy :

a/ $W = T_1 \frac{m}{\mu} R(\frac{1}{s} - 1) = -193727 J$, b/ $Q_{1-2} = T_1 \frac{m}{\mu} C_p (\frac{1}{s} - 1) = \frac{7}{2} W_{1-2} = -678044 J$.

11.9.R.

W procesie izotermicznym mamy:

$$Q_{1-2} = \Delta U + W = W = \int_{V_1}^{V_2} p\, dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = nRT(\ln V_2 - \ln V_1) = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (1)$$

oraz $p_1 V_1 = p_2 V_2 \quad czyli \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1} = 3 \quad (2)$.

Z obu równań wynika: $W = nRT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{1}{3} \quad dlatego \quad \mu = \frac{m}{W} RT \ln \frac{1}{3} = 4 g$.

Jest to hel.

11.10.R.

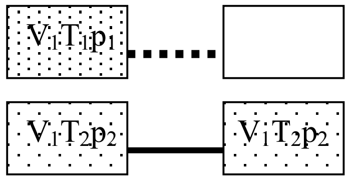
a/ $V = const. \quad \Rightarrow \quad Q_{1-2} = \Delta U = C_V n(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R \frac{m}{\mu}(T_2 - T_1) = 125 J,$

b/ $p = const. \quad \Rightarrow \quad Q_{1-2} = \Delta U + W = C_p n(T_2 - T_1) = \frac{7}{2} R \frac{m}{\mu}(T_2 - T_1) = 175 J$

$oraz \quad \Delta U = C_v n(T_2 - T_1) = \frac{5}{2} R \frac{m}{\mu}(T_2 - T_1) = 125 J.$

11.11.R.

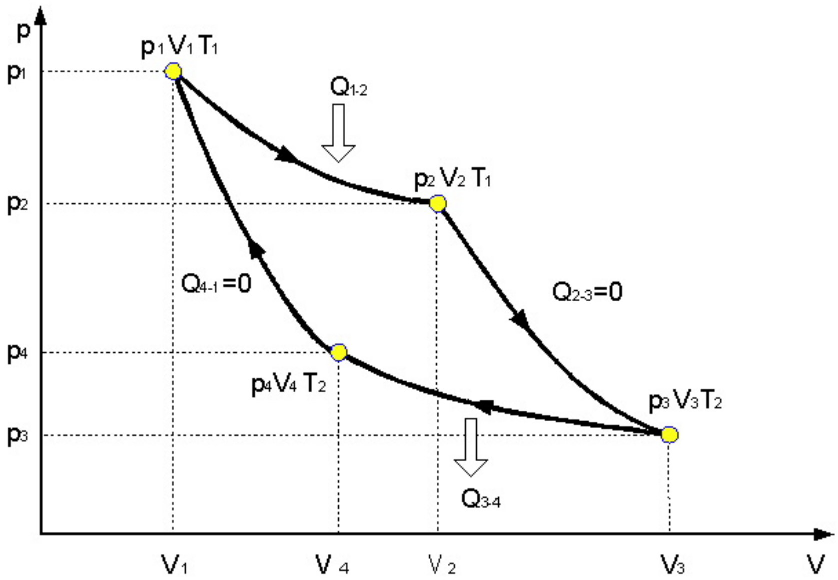
Wskazówka:
Warunki początkowe: p_1, T_1, V_1.



Warunki końcowe: p_2, T_2, $2V_1$.

$p_2=10^5$Pa, $T_2=227$K.

11.12.R.



Przemiana 1-2 jest izotermiczna dlatego:
T_1=const. $p_1V_1 = p_2V_2$ (1) i $\Delta U = 0$ $oraz$

$$Q_{1-2} = \Delta U + W = W = \int_{V_1}^{V_2} p\ dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}\, dV = nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V}\, dV = nRT_1(\ln V_2 - \ln V_1) = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} \quad (2)$$

Przemiana 2-3 jest adiabatyczna dlatego:

$p_2V_2^{\chi} = p_3V_3^{\chi}$ (3) oraz $Q_{2-3} = \Delta U + W = 0$ (4)

Przemiana 3-4 jest izotermiczna dlatego (T_2=const.):

$p_3V_3 = p_4V_4$ (5) i $\Delta U = 0$ $oraz$

$$Q_{3-4} = \Delta U + W = W = \int_{V_3}^{V_4} p\ dV = \int_{V_3}^{V_4} \frac{nRT_2}{V}\, dV = nRT_2 \int_{V_3}^{V_4} \frac{1}{V}\, dV = nRT_2(\ln V_4 - \ln V_3) = nRT_2 \ln\frac{V_4}{V_3} \quad (6)$$

Przemiana 4-1 jest adiabatyczna dlatego:

$p_1V_1^{\chi} = p_4V_4^{\chi}$ (7) oraz $Q_{4-1} = \Delta U + W = 0.$ (8)

Na podstawie równań (1,3,5,7) można udowodnić, że:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (9)$$

Ponieważ:
$V_1 < V_2$ to $Q_{1-2} > 0$ co oznacza, że ciepło jest dostarczone do silnika,
$V_4 < V_3$ to $Q_{4-1} < 0$ co oznacza, że ciepło jest oddawane przez silnik do chłodnicy.

Pracę wykonaną przez silnik można obliczyć ze wzoru:
$$W = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1} \quad (10)$$
Wydajność silnika wynosi: $\eta = \frac{W}{Q_{pobrane}} = \frac{Q_{pobrane} - Q_{oddane}}{Q_{pobrane}}$

Na podstawie wzorów (2,4,6,8,9,10) wydajność silnika pracującego w cyklu Carnota wynosi:
$$\eta = \frac{Q_{1-2} + Q_{3-4}}{Q_{1-2}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$
Obliczenia:
a/ T_1=373K i T_2=273K to η=26,8%,
b/ T_1=773K i T_2=273K to η=64,7%,
c/ T_1=373K i T_2=2,7 K to η=99,3%.

11.13.R.
η=16,6%.

11.14.R.
Wskazówka: rozpoznać rodzaj przemian, napisać równania charakterystyczne dla tych przemian, obliczyć *T₄*, obliczyć ciepło tych przemian, określić podczas której przemiany gaz pobiera ciepło i obliczyć wydajność.
$$T_4 = 400K, \quad \eta = \frac{W}{Q_{1-2} + Q_{4-1}} = \frac{\kappa(T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + \kappa(T_4 - T_3) + (T_1 - T_4)}{(T_1 - T_4) + \kappa(T_2 - T_1)} = 0{,}096$$

11.15.R.
W czasie sprężania powietrza następuje jego ogrzanie. Część tego ciepła przejmuje materiał pompki.