

Rozdział 4

Pole elektryczne

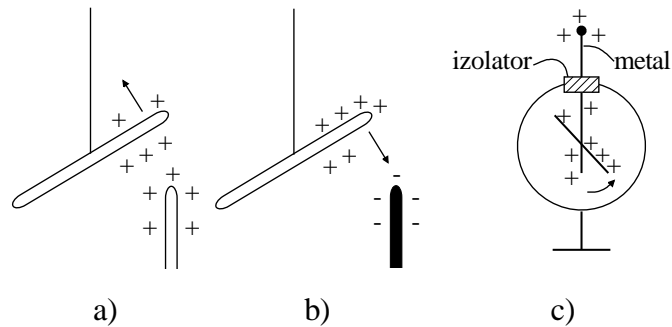
4.1 Ładunki elektryczne

4.1.1 Elektryzowanie ciał. Zasada zachowania ładunku

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione wybrane zagadnienia elektrostatyki. *Elektrostatyka* jest częścią nauki o elektryczności, rozpatrującą zjawiska związane z oddziaływaniem nieruchomych ładunków elektrycznych za pośrednictwem niezależnych od czasu pól elektrycznych (elektrostatycznych).

Podstawowe fakty dotyczące elektrostatyki były znane już w starożytności. M.in. było wiadomo, że przez potarcie niektórych ciał można je naelektryzować. Jeżeli np. dwie pałeczki szklane potarte jedwabiem zbliżymy do siebie, będą się one odpychać (rys. 4.1a). Tak samo będą się odpychać np. dwie pałeczki ebonitowe potarte futrem. Natomiast potarte pałeczki — szklana i ebonitowa będą się przyciągać (rys. 4.1b). Fakty te tłumaczymy zakładając, że przez potarcie wytwarzają się na pałeczkach ładunki elektryczne, które oddziałują na siebie określonymi siłami. Z różnych kierunków działania sił wynika, że ładunki szkła i ebonitu różnią się od siebie. Umówiono się nazywać ładunki, które gromadzą się na potartym szkłe, dodatnimi a gromadzące się na potartym ebonicie — ujemnymi. Można więc stwierdzić, że ładunki jednoimienne (jednego znaku) odpychają się a ładunki różnoimienne (różnych znaków) przyciągają się. Porównując ładunek danego ciała z ładunkiem nagromadzonym na szkłe lub ebonicie można ustalić jego znak.

Przez pocieranie wełną pręta metalowego, trzymanego w ręku, nie można go naelektryzować. Można natomiast naelektryzować w ten sposób pręt metalowy, zamocowany na szklanej lub ebonitowej podstawie. Dla wyjaśnie-



Rysunek 4.1:

nia tego zjawiska przyjmujemy, że metale, ciało ludzkie i ziemia są dobrymi przewodnikami ładunku elektrycznego - ładunki mogą się w nich przemieszczać. Natomiast szkło, ebonit i większość innych tworzyw sztucznych są złymi przewodnikami ładunku elektrycznego, zwanymi *izolatorami* lub *dielektrykami*. Do badania stopnia naelektryzowania ciał służy prosty przyrząd, zwany elektroskopem (rys. 4.1c).

Zjawisko elektryzowania przez potarcie tłumaczymy zakładając, że ciało nie naelektryzowane zawiera równe ilości ładunku dodatniego i ujemnego. Podczas pocierania ciało część ładunku przechodzi z jednego ciała do drugiego i oba ciała elektryzują się. Ciało można naelektryzować również przez połączenie go przewodnikiem z innym naelektryzowanym ciałem. Wówczas część ładunku elektrycznego przepływa od jednego ciała do drugiego. Jest też możliwe naelektryzowanie ciała przez indukcję. Jeżeli do przewodnika zbliżymy naelektryzowane ciało, w przewodniku nastąpi rozdzielenie ładunków obu znaków. Przy podzieleniu przewodnika na dwie części obie zostaną naładowane. Po zetknięciu obu części przewodnika stanie się on znów obojętny. Omówione doświadczenia pozwalają sformułować *zasadę zachowania ładunku*:

Całkowity ładunek układu odosobnionego, tzn. suma algebraiczna ładunków dodatnich i ujemnych nie ulega zmianie.

4.1.2 Jednostka ładunku. Ciągły rozkład ładunku

W układzie SI jednostkę ładunku elektrycznego wyprowadza się z jednostki natężenia prądu (por. podrozdział 1.1). Przez prąd elektryczny rozumiemy

przepływ ładunku elektrycznego przez przewodnik. *Natężenie* I prądu elektrycznego jest to stosunek ładunku elektrycznego Δq , przepływającego przez przekrój poprzeczny przewodnika, do czasu jego przepływu Δt ,

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (4.1)$$

albo, dokładniej,

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}. \quad (4.2)$$

Przepływający przez przewodnik ładunek wyraża się więc wzorem

$$q = \int_0^t I dt, \quad (4.3)$$

który w przypadku *prądu stałego*, $I = const$, upraszcza się do postaci

$$q = It. \quad (4.4)$$

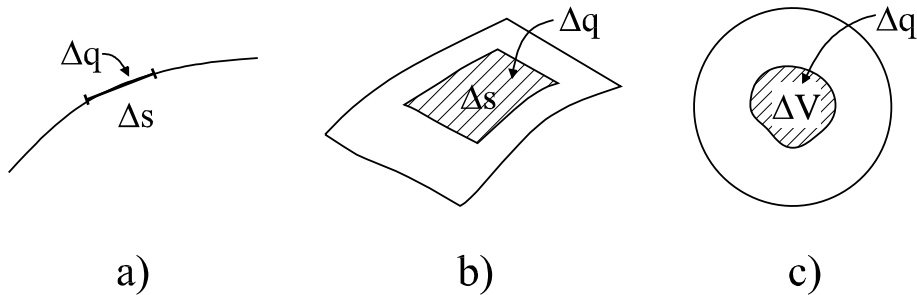
Jednostką natężenia prądu jest amper (A), $[I] = A$ a jednostkę ładunku elektrycznego nazywamy kulombem (C), $[q] = C = A \cdot s$. Jeden kulomb jest to więc ładunek, który przepływa w ciągu jednej sekundy przez przekrój poprzeczny przewodnika, w którym płynie prąd o natężeniu jednego ampera. Należy zauważyć, że kulomb jest bardzo dużą jednostką ładunku. W doświadczeniach z elektryzowaniem ciał mamy zwykle do czynienia z ładunkami rzędu $1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$.

W klasycznej nauce o elektromagnetyźmie ładunek elektryczny traktuje się jako wielkość ciągłą, mogącą przybierać dowolnie małe wartości. W rzeczywistości, ładunek elektryczny jest zawsze wielokrotnością (ze znakiem „+” lub „-”) pewnego niewielkiego ładunku, zwanego *ładunkiem elementarnym*. Istnienie ładunku elementarnego wykazał po raz pierwszy R. Millikan w doświadczeniach przeprowadzonych w latach 1909 - 1914. Wg. współczesnych pomiarów wartość ładunku elementarnego wynosi:

$$e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}. \quad (4.5)$$

Ze względu na jego małą wartość w zwykłych warunkach nie można stwierdzić nieciągłego charakteru ładunku elektrycznego.

Jeżeli rozmiary ciał, na których zgromadzone są ładunki, można zaniedbać w porównaniu z odległościami między nimi to ładunki tych ciał nazywamy punktowymi. Jeżeli natomiast rozmiary ciał są duże, dla scharakteryzowania rozmieszczenia na nich ładunku wygodnie jest wprowadzić pojęcie



Rysunek 4.2:

gęstości ładunku. W przypadku, gdy ładunek jest rozmieszczony na ciele o małych rozmiarach poprzecznych (rys. 4.2a), przez liniową gęstość ładunku rozumiemy wielkość:

$$\lambda = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta s} = \frac{dq}{ds} \quad (4.6)$$

o wymiarze $[\lambda] = \text{C/m}$. Analogicznie, jeśli ładunek jest rozmieszczony na pewnej powierzchni (rys. 4.2b), przez powierzchniową gęstość ładunku rozumiemy:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}, \quad (4.7)$$

przy czym $[\sigma] = \text{C/m}^2$. W przypadku objętościowego rozkładu ładunku (rys. 4.2c) objętościową gęstość ładunku definiujemy jako:

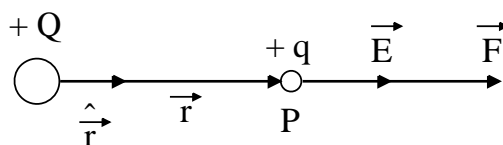
$$\varrho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}, \quad (4.8)$$

gdzie $[\varrho] = \text{C/m}^3$.

4.2 Natężenie i potencjał pola elektrycznego

4.2.1 Natężenie pola

Zgodnie z przyjętym obecnie poglądem ładunki elektryczne oddziałują ze sobą za pośrednictwem *pola elektrycznego*. Każdy ładunek wytwarza wokół siebie określone pole elektryczne. Jeżeli w polu tym umieścimy inny ładunek (nazywany czasem ładunkiem próbnym), będzie na niego działać siła pochodząca od pola elektrycznego. Przyjmujemy, że pole elektryczne istnieje



Rysunek 4.3:

wokół danego ładunku nawet wtedy, gdy nie ma ładunków próbnych, umożliwiającą jego wykrycie. Wzajemne oddziaływanie ładunków zachodzi więc zgodnie ze schematem: *ładunek 1* \leftrightarrow *pole elektryczne* \leftrightarrow *ładunek 2*.

Dla scharakteryzowania pola elektrycznego wprowadza się pojęcie wektora *natężenia pola* \mathbf{E} . Liczbowo natężenie pola elektrostatycznego jest równe stosunkowi siły F , działającej na ładunek próbny q do wielkości tego ładunku. Ponieważ, zgodnie z doświadczeniem, działająca siła jest proporcjonalna do wielkości ładunku próbnego, $F \sim q$, natężenie pola nie zależy od wielkości tego ładunku. Zwrot wektora natężenia pola przyjmujemy za zgodny ze zwrotem siły, działającej na ładunek dodatni (rys. 4.3). Zatem

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}}. \quad (4.9)$$

Wymiarem natężenia pola elektrycznego jest $[E] = \text{N/C}$.

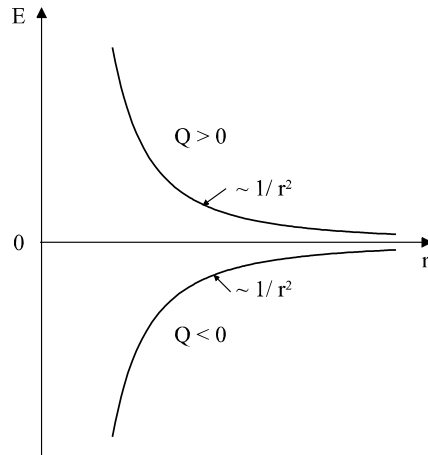
Jeżeli źródłem pola elektrycznego jest pojedynczy ładunek punktowy Q , to można stwierdzić doświadczalnie, że natężenie pola elektrycznego w danym punkcie P przestrzeni jest wprost proporcjonalne do wielkości tego ładunku i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości r tego punktu od ładunku. Wobec tego

$$E = k \frac{Q}{r^2}, \quad (4.10)$$

gdzie k jest pewnym współczynnikiem proporcjonalności. Wektor \mathbf{E} natężenia pola jest równoległy do wektora \mathbf{r} , poprowadzonego od ładunku Q do punktu P (rys. 4.3) i w przypadku dodatniego (ujemnego) ładunku Q ma ten sam (przeciwny) zwrot. Ostatnie równanie można więc zapisać w wektorowej postaci jako

$$\mathbf{E} = k \frac{Q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad (4.11)$$

gdzie $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ jest wektorem jednostkowym, $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$, mającym kierunek i zwrot wektora \mathbf{r} . Zależność natężenia pola elektrycznego ładunku punktowego od odległości pokazuje rysunek 4.4.



Rysunek 4.4:

Przy ustalonej jednostce ładunku elektrycznego wartość współczynnika proporcjonalności k w podanych wzorach można określić, mierząc siłę oddziaływania dwóch ładunków punktowych, umieszczonych w danej odległości. W przypadku gdy ładunki znajdują się w próżni, wartość k wynosi w przybliżeniu

$$k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}. \quad (4.12)$$

W układzie jednostek SI współczynnik k zapisuje się zwykle jako:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (4.13)$$

gdzie współczynnik ϵ_0 nazywa się *stałą dielektryczną* lub *przenikalnością dielektryczną próżni*. Nazwa ta jest myląca, ponieważ ϵ_0 jest, podobnie jak k , stałą zależną od wyboru jednostki ładunku elektrycznego. Wartość tej stałej wynosi

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \approx 8,85418 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}. \quad (4.14)$$

Wzór (4.11) możemy więc zapisać w postaci:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.15)$$

Zgodnie z doświadczeniem, natężenie pola elektrycznego wytworzonego przez określony układ ładunków w nieprzewodzącym ośrodku materialnym

jest ε_r mniejsze niż natężenie pola tego samego układu ładunków w próżni. Stałą ε_r , która charakteryzuje własności elektryczne danego ośrodka, nazywamy jego *stałą dielektryczną* lub *względną przenikalnością dielektryczną*, przy czym zawsze $\varepsilon_r > 1$. Natężenie pola ładunku punktowego w ośrodku materialnym wyraża się zatem wzorem

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.16)$$

Ponieważ siła działająca na ładunek w polu elektrycznym wyraża się, zgodnie z równaniem (4.9) wzorem

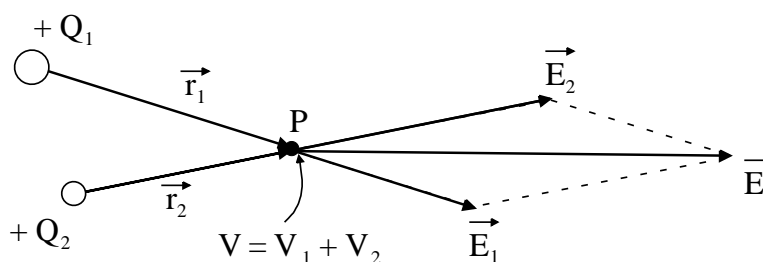
$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (4.17)$$

korzystając z równania (4.16) otrzymujemy następujący wzór, określający siłę oddziaływania dwóch ładunków punktowych

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (4.18)$$

Jest ona wprost proporcjonalna do iloczynu ich wielkości i odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi. Zależności te zostały ustalone doświadczalnie w 1785 r. przez Ch. Coulomba i noszą nazwę prawa Coulomba.

Jeżeli pole elektryczne jest wytworzone przez kilka ładunków punktowych, wypadkowe natężenie pola jest, jak wykazuje doświadczenie, wektorową sumą natężeń pól, pochodzących od poszczególnych ładunków (rys. 4.5). W podobny sposób, zastępując sumę przez całkę, można znaleźć natężenie pola elektrycznego, pochodzące od ładunku elektrycznego rozłożonego w ciągły sposób.



Rysunek 4.5:

Pole elektryczne opisuje się również inną wielkością wektorową, zwaną *wektorem indukcji elektrycznej* \mathbf{D} . Jest on związany z wektorem natężenia pola zależnością

$$\mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}. \quad (4.19)$$

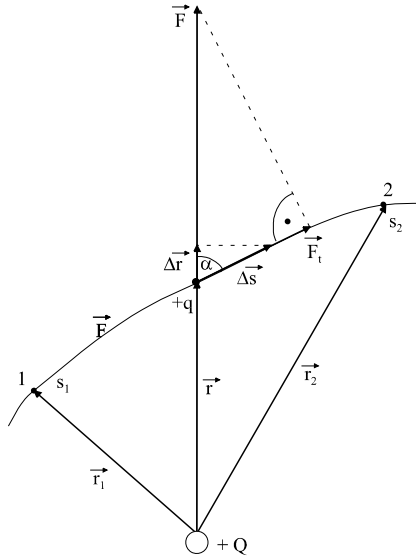
Wymiarem indukcji elektrycznej jest $[D] = \text{C}/\text{m}^2$. Można łatwo stwierdzić, że indukcja elektryczna wytworzona przez układ ładunków jest niezależna od rodzaju ośrodka. Z tego względu wektor indukcji elektrycznej jest wygodny przy opisie własności dielektrycznych ośrodków materialnych.

4.2.2 Potencjał pola

Na początek wyprowadzimy wzór określający energię potencjalną oddziaływania dwóch ładunków punktowych. Ogólny wzór, przedstawiający pracę wykonaną przez daną siłę \mathbf{F} przy przesunięciu ciała z punktu \mathbf{r}_1 do punktu \mathbf{r}_2 , ma postać

$$W_{1-2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds \quad (4.20)$$

(patrz podrozdział 2.3.6). W podanym wzorze F_t jest składową siły \mathbf{F} styczną do toru a s_1 i s_2 — drogami, odpowiadającymi położeniu punktów \mathbf{r}_1 i \mathbf{r}_2 . Rozważymy teraz pracę wykonaną przy przemieszczaniu ładunku q w polu



Rysunek 4.6:

elektrycznym, wytworzonym przez punktowy ładunek Q (rys. 4.6). W tym przypadku kierunek siły \mathbf{F} działającej na ładunek q jest zgodny z kierunkiem wektora wodzącego \mathbf{r} tego ładunku, poprowadzonego od ładunku Q , $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$. Pracę ΔW , wykonaną na małym odcinku drogi Δs , można wyrazić wzorem

$$\Delta W = F_t \Delta s = F \Delta s \cos \alpha = F \Delta r, \quad (4.21)$$

gdzie α jest kątem między wektorami \mathbf{F} i \mathbf{F}_t a Δr rzutem przemieszczenia Δs ładunku na kierunek wektora \mathbf{r} . Należy zauważyć, że praca ΔW nie zależy od kąta α a jedynie od długości odcinka Δr . Praca wykonana na całej drodze, od punktu \mathbf{r}_1 do punktu \mathbf{r}_2 , będzie więc równa

$$W_{1-2} = \int_{r_1}^{r_2} F dr. \quad (4.22)$$

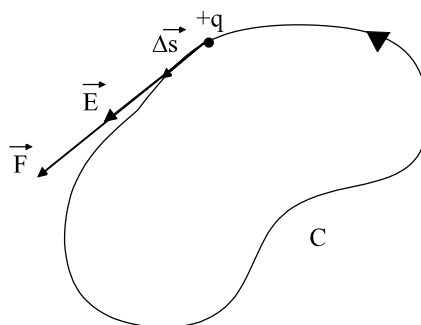
Ponieważ powyższa całka zależy tylko od odległości r_1 i r_2 punktów 1 i 2 od ładunku Q , praca W_{1-2} jest niezależna od drogi całkowania. Pole sił elektrostatycznych jest więc polem zachowawczym (inaczej — polem potencjalnym lub bezwirowym).

Warunek zachowawczości sił można też zapisać w postaci

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (4.23)$$

(podrozdział 2.3.6), gdzie C oznacza dowolną krzywą zamkniętą. Ponieważ siła działająca na ładunek

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad (4.24)$$



Rysunek 4.7:

całka z natężenia pola elektrostatycznego po zamkniętej krzywej C jest zawsze równa zero (rys. 4.7),

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad (4.25)$$

Całkę (4.22) można łatwo obliczyć. Korzystając z prawa Coulomba,

$$F = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2}, \quad (4.26)$$

otrzymujemy

$$W_{1-2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (4.27)$$

Pracę W_{1-2} można wyrazić również wzorem

$$W_{1-2} = E_{p1} - E_{p2}, \quad (4.28)$$

gdzie E_{p1} i E_{p2} — energia potencjalna ładunku q w punktach 1 i 2. Z porównania obu wzorów wynika, że energia potencjalna oddziaływania dwóch ładunków, znajdujących się w odległości r , wyraża się wzorem:

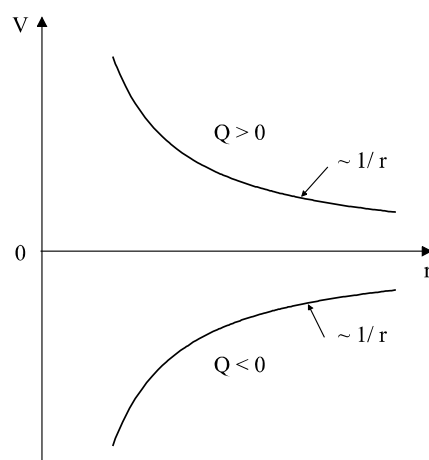
$$E_p = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}. \quad (4.29)$$

Należy zauważyć, że do energii potencjalnej można zawsze dodać dowolną stałą. Przyjmuje się jednak zwykle, że energia potencjalna ładunków dąży do zera gdy $r \rightarrow \infty$, skąd wynika, że wartość tej stałej jest równa zero.

Z ostatniego wzoru widać, że energia potencjalna E_p ładunku próbnego q w polu elektrycznym jest proporcjonalna do wielkości tego ładunku. Wobec tego stosunek energii potencjalnej do ładunku nie zależy od wielkości ładunku i charakteryzuje samo pole elektryczne. Stosunek ten nazywa się *potencjałem V pola elektrycznego* w danym punkcie,

$$V = \frac{E_p}{q}. \quad (4.30)$$

Należy zauważyć, że potencjał pola, w odróżnieniu od natężenia pola \mathbf{E} , jest wielkością skalarną. Jednostką potencjału pola elektrycznego jest wolt (V), $[V] = \text{V} = \text{J/C}$. Jak wynika ze wzorów (4.29) - (4.30), potencjał pola



Rysunek 4.8:

wytwarzanego przez pojedynczy ładunek punktowy Q w odległości r od niego wynosi

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}. \quad (4.31)$$

Zależność potencjału pola od odległości pokazuje rysunek 4.8.

Jeżeli pole elektryczne jest wytwarzane przez większą liczbę ładunków punktowych, wypadkowy potencjał będzie sumą algebraiczną potencjałów, pochodzących od poszczególnych ładunków (patrz rys. 4.5). W przypadku, gdy ładunek elektryczny wytwarzający pole jest rozłożony w ciągły sposób, suma musi być zastąpiona odpowiednią całką.

4.2.3 Związki między natężeniem i potencjałem

Rozważymy obecnie związki między natężeniem i potencjałem pola elektrycznego. Wzór (4.28), określający pracę wykonaną przez siły elektryczne przy przemieszczaniu ładunku q z punktu 1 do punktu 2 pola elektrycznego można teraz, korzystając ze wzoru (4.30), zapisać jako

$$W_{1-2} = q(V_1 - V_2). \quad (4.32)$$

Zgodnie z wzorami (4.20) i (4.24) pracę W_{1-2} można wyrazić również całką

$$W_{1-2} = q \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}. \quad (4.33)$$

Porównując wzory (4.32) i (4.33) otrzymujemy następujący związek między różnicą potencjałów pola elektrycznego w dwóch punktach a całką z natężenia pola po drodze łączącej te punkty:

$$\boxed{V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}}. \quad (4.34)$$

Różnicę potencjałów dwóch punktów pola elektrycznego nazywamy *napięciem* U między tymi punktami,

$$U = V_1 - V_2, \quad (4.35)$$

przy czym wymiarem napięcia jest $[U] = V$. Wobec tego praca wykonana przy przemieszczaniu ładunku jest równa iloczynowi ładunku i napięcia między początkowym i końcowym punktem drogi,

$$W_{1-2} = qU. \quad (4.36)$$

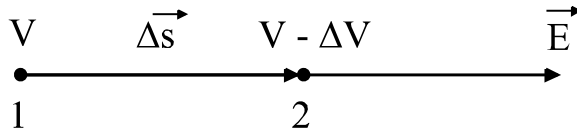
Można również podać bezpośredni związek między natężeniem pola elektrycznego w danym punkcie a potencjałem pola w otoczeniu tego punktu. Jak pokazano w podrozdziale 2.3.6, zachodzi następująca zależność między siłą działającą na ciało i jego energią potencjalną

$$F = -\frac{dE_p}{ds}, \quad (4.37)$$

przy czym pochodna jest liczona w kierunku działania siły. Biorąc pod uwagę wzory (4.24) i (4.30) otrzymujemy zależność

$$\boxed{E = -\frac{dV}{ds}}. \quad (4.38)$$

Wartość liczbowa natężenia pola jest więc równa zmianie potencjału, przypadającej na jednostkową odległość. Należy zwrócić uwagę, że podany wzór stosuje się tylko w przypadku, gdy pochodna potencjału jest obliczana w kierunku pola elektrycznego (rys. 4.9).



Rysunek 4.9:

4.2.4 Linie sił i powierzchnie ekwipotencjalne

W celu graficznego przedstawienia pola elektrycznego wprowadza się pojęcia *linii sił pola* i *powierzchni ekwipotencjalnych*. W każdym punkcie przestrzeni linie sił mają kierunek styczny do wektora natężenia pola i zgodny z nim zwrot (rys. 4.10a). Przyjmuje się dodatkowo, że liczba linii sił ΔN , przechodzących przez niewielką powierzchnię ΔS_{\perp} , prostopadłą do wektora natężenia pola \mathbf{E} (rys. 4.10b), spełnia relację

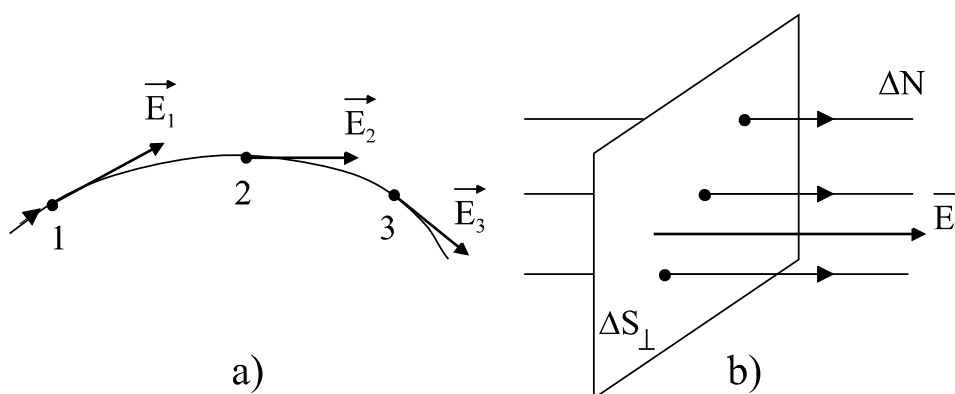
$$\Delta N \sim E \Delta S_{\perp}. \quad (4.39)$$

Powierzchnie ekwipotencjalne są miejscami geometrycznymi punktów pola elektrycznego o jednakowym potencjale. Zwykle rysuje się je tak, aby różnica potencjałów sąsiednich powierzchni ekwipotencjalnych była stała, $\Delta V = \text{const}$. Można łatwo pokazać, że kierunki natężenia i linii sił pola są prostopadłe do powierzchni ekwipotencjalnej. W tym celu rozważymy niewielkie przemieszczenie $\Delta \mathbf{s}$ ładunku po powierzchni ekwipotencjalnej (rys. 4.11). Z definicji powierzchni ekwipotencjalnej wynika, że praca ΔW sił pola elektrycznego jest wtedy równa zero (por. wzór (4.32)). Ponieważ zachodzą zależności

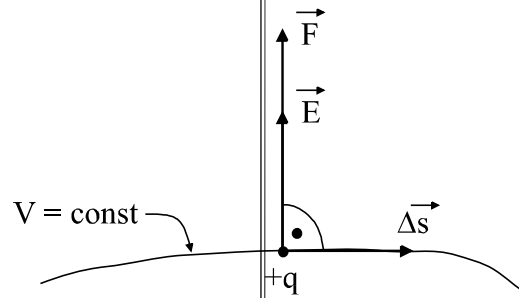
$$\Delta W = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = q \mathbf{E} \cdot \Delta \mathbf{s} = 0, \quad (4.40)$$

więc $\mathbf{E} \perp \Delta \mathbf{s}$.

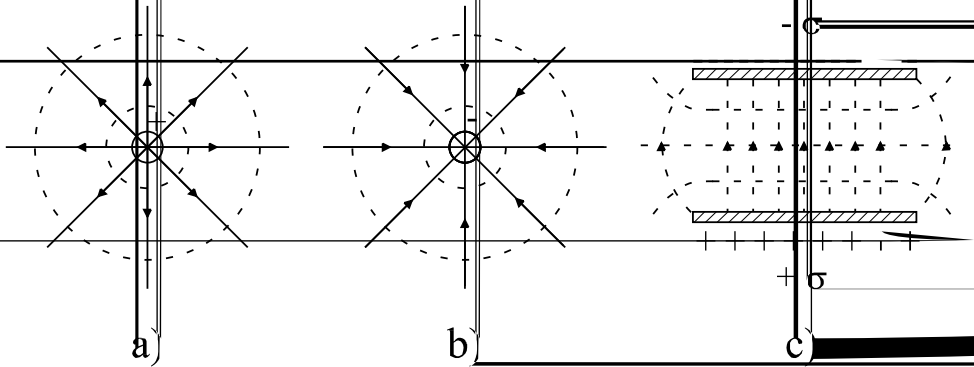
Rysunki 4.12a, b pokazują linie sił (oznaczone ciągłymi liniami) i przekroje powierzchni ekwipotencjalnych (oznaczone przerywanymi liniami) ładunków punktowych — dodatniego i ujemnego. Linie sił są wówczas rozcho-



Rysunek 4.10:



Rysunek 4.11:



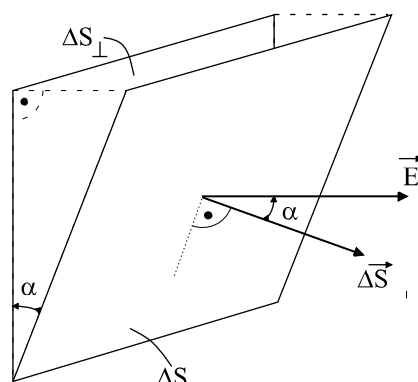
Rysunek 4.12:

dzącymi się radialnie prostymi a powierzchnie ekwipotencjalne — koncentrycznymi sferami. Jeżeli natężenie pola elektrycznego w pewnym obszarze przestrzeni ma stałą wartość i kierunek, nazywamy je *polem jednorodnym*. Pole jednorodne powstaje np. między dwoma równoległymi płaszczyznami, naładowanymi ze stałą gęstością powierzchniową ładunkami o przeciwnych znakach (rys. 4.12c). Linie sił pola jednorodnego są równoległe i równo oddalone od siebie; równoległe są również powierzchnie ekwipotencjalne.

4.3 Prawo Gaussa

4.3.1 Strumień pola elektrycznego

W przypadku ciągłego rozkładu ładunku obliczenie wypadkowego pola elektrycznego wymaga całkowania po elementach naładowanego ciała. Zadanie



Rysunek 4.13:

obliczenia pola elektrycznego można niekiedy rozwiązać w inny sposób, korzystając z tzw. *prawa Gaussa*. Można je traktować jako jedno z podstawowych praw elektrostatyki. Łącznie z równaniem (4.25), wyrażającym potencjalność pola elektrostatycznego, stanowią one kompletny układ równań elektrostatyki.

Dla sformułowania prawa Gaussa wprowadzimy teraz pojęcie *strumienia pola elektrostatycznego*. Załóżmy, że mamy niewielką powierzchnię ΔS , umieszczoną w polu elektrycznym o natężeniu E , przy czym prostopadła do powierzchni tworzy z kierunkiem pola kąt α (rys. 4.13). Przez strumień pola elektrycznego $\Delta\Phi_E$ przez powierzchnię ΔS rozumiemy wyrażenie

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S_{\perp}, \quad (4.41)$$

gdzie ΔS_{\perp} jest polem rzutu powierzchni ΔS na płaszczyznę prostopadłą do wektora natężenia pola \mathbf{E} . Ponieważ

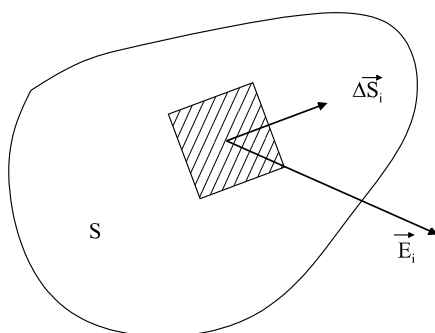
$$\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \alpha, \quad (4.42)$$

więc

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S \cos \alpha. \quad (4.43)$$

Wygodnie jest przypisać rozpatrywanej powierzchni prostopadły do niej wektor $\Delta\mathbf{S}$, którego długość jest równa polu powierzchni, $|\Delta\mathbf{S}| = \Delta S$. Zwrot wektora $\Delta\mathbf{S}$ obieramy w dowolny sposób. Należy jednak zauważyć, że znak strumienia pola zależy od zwrotu wektora $\Delta\mathbf{S}$. Strumień pola elektrycznego można wówczas zapisać jako

$$\boxed{\Delta\Phi_E = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S}}. \quad (4.44)$$



Rysunek 4.14:

Jego wymiarem jest $[\Phi_E] = \text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C} = \text{V} \cdot \text{m}$. Zauważmy, że z przyjętej konwencji przedstawienia linii sił pola elektrycznego wynika, że $\Delta N \sim \Delta \Phi_E$, gdzie ΔN jest liczbą linii sił przechodzących przez daną powierzchnię.

Aby obliczyć strumień pola elektrycznego, przechodzący przez dowolną powierzchnię S , dzielimy ją na niewielkie elementy powierzchni $\Delta \mathbf{S}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ (rys. 4.14). Zakładamy, że na całej powierzchni wektory $\Delta \mathbf{S}_i$ mają ten sam zwrot (w przypadku powierzchni zamkniętej kierujemy je na zewnątrz powierzchni). Mamy wówczas

$$\Delta \Phi_{Ei} = \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \quad (4.45)$$

Całkowity strumień pola elektrycznego Φ_E przez powierzchnię S jest więc w przybliżeniu równy

$$\Phi_E \approx \sum_{i=1}^n \Delta \Phi_{Ei} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i. \quad (4.46)$$

Dokładne wyrażenie na strumień pola otrzymamy przyjmując, że liczba elementów powierzchni dąży do nieskończoności, $n \rightarrow \infty$, przy czym $\Delta \mathbf{S}_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Granicą powyższej sumy jest całka powierzchniowa z wektora natężenia pola \mathbf{E} ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \cdot \Delta \mathbf{S}_i = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4.47)$$

Zatem strumień

$$\boxed{\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}}. \quad (4.48)$$

Można zauważyć, że $N \sim \Phi_E$, gdzie N jest liczbą linii sił pola przechodzących przez powierzchnię ΔS .

4.3.2 Związek między strumieniem i ładunkiem

Założymy teraz, że pole elektryczne jest wytworzone przez pojedynczy ładunek punktowy $+Q$ i obliczymy strumień tego pola przechodzący przez dowolną zamkniętą powierzchnię, *otaczającą* ten ładunek (rys. 4.15). Strumień pola przez niewielki fragment powierzchni ΔS , znajdujący się w odległości r od ładunku, określają wzory

$$\Delta\Phi_E = E\Delta S_{\perp}, \quad (4.49)$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r^2} \quad (4.50)$$

(por. wzór (4.16)). Zatem

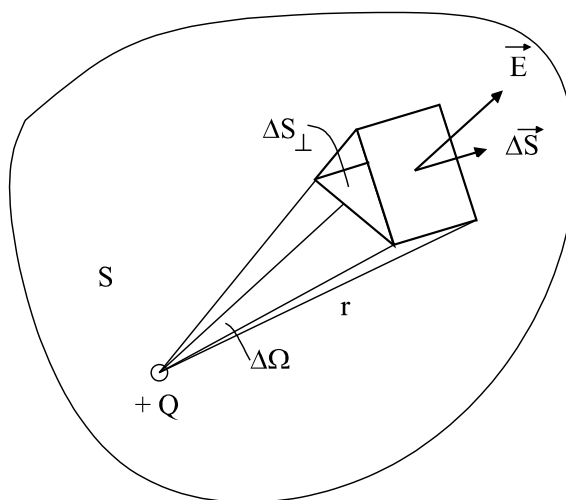
$$\Delta\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2}. \quad (4.51)$$

Ale na podstawie definicji kąta bryłowego $\Delta\Omega$ zachodzi związek

$$\Delta\Omega = \frac{\Delta S_{\perp}}{r^2} \quad (4.52)$$

(rys. 4.15) i przedostatni wzór można zapisać jako

$$\Delta\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \Delta\Omega. \quad (4.53)$$



Rysunek 4.15:

Wynika stąd, że strumień pola elektrostatycznego przez powierzchnię S jest równy

$$\Phi_E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \int_0^{4\pi} d\Omega \quad (4.54)$$

(pełny kąt bryłowy ma wartość $\Omega = 4\pi$). Obliczając całkę we wzorze otrzymujemy związek

$$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r}. \quad (4.55)$$

Wzór ten przedstawia prawo Gaussa dla pojedynczego ładunku punktowego.

Prawo Gaussa można uogólnić na przypadek pola, wytworzonego przez dowolny układ ładunków. Jeżeli wewnątrz zamkniętej powierzchni znajduje się większa ilość ładunków punktowych, to natężenia i strumienie pól pochodzące od tych ładunków sumują się. Gdy istnieją również ładunki punktowe leżące *poza* zamkniętą powierzchnią, to można w podobny sposób pokazać, że pochodzący od nich strumień pola elektrycznego jest równy zeru. Wobec tego w ogólnym przypadku przez ładunek Q w ostatnim wzorze należy rozumieć algebraiczną sumę wszystkich ładunków, obejmowanych przez zamkniętą powierzchnię,

$$Q = \sum_{k=1}^l Q_k. \quad (4.56)$$

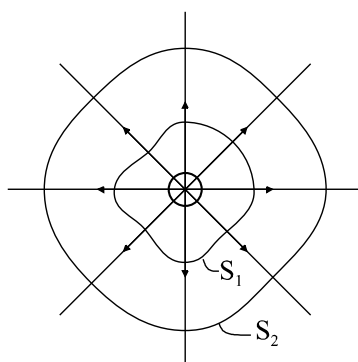
Należy podkreślić, że w przypadku, gdy wewnątrz powierzchni znajduje się jednakowa ilość ładunku dodatniego i ujemnego, to $Q = 0$ i $\Phi_E = 0$. Biorąc pod uwagę definicję strumienia pola elektrycznego (4.48) prawo Gaussa można zapisać jako

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r} \quad (4.57)$$

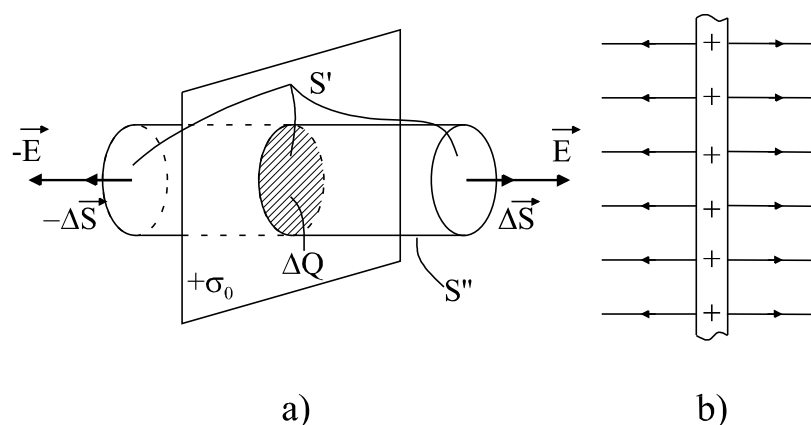
(całkowanie po zamkniętej powierzchni oznaczono kółkiem w symbolu całki). Prawo Gaussa można wyrazić słownie jak następuje:

Strumień pola elektrostatycznego przez dowolną zamkniętą powierzchnię jest równy algebraicznej sumie ładunków obejmowanych przez tę powierzchnię, podzielonej przez iloczyn stałej dielektrycznej próżni i względnej stałej dielektrycznej ośrodka.

Można je zinterpretować poglądowo biorąc pod uwagę, że liczba linii sił przechodzących przez daną powierzchnię jest proporcjonalna do strumienia pola elektrycznego, $N \sim \Phi_E$. Zgodnie z prawem Gaussa strumień pola jest natomiast proporcjonalny do całkowitego ładunku wewnątrz powierzchni, $\Phi_E \sim Q$. Wynika stąd, że liczba linii sił przechodzących przez powierzchnię



Rysunek 4.16:



Rysunek 4.17:

jest proporcjonalna do obejmowanego przez nią ładunku, $N \sim Q$ (liczbom linii wychodzących i wchodzących do danej powierzchni przypisujemy odpowiednio znak „+” i „-”). Jest zrozumiałe, że liczba linii sił przecinających powierzchnię nie zależy od kształtu tej powierzchni a tylko od zawartego wewnątrz niej sumarycznego ładunku (rys. 4.16).

Prawo Gaussa umożliwia proste obliczenie natężenia pola elektrycznego \mathbf{E} , pochodzącego od ciągłego rozkładu ładunku w przypadkach, gdy rozkład ten i natężenie pola cechuje wysoki stopień symetrii. Przykładowo obliczymy pole ładunku rozłożonego ze stałą gęstością $+\sigma_0$ na nieskończonej płaszczyźnie (rys. 4.17). Ze względu na symetrię rozkładu ładunku wektor natężenia

pola \mathbf{E} musi być prostopadły do płaszczyzny. Za „powierzchnię Gaussa” można wybrać powierzchnię S walca o tworzących prostopadłych do płaszczyzny tj. równoległych do wektora \mathbf{E} . Przyjmujemy, że płaszczyzna przecina walec w połowie jego wysokości. Ponieważ strumień pola przechodzącego przez powierzchnię boczną walca S'' jest równy zeru (na tej powierzchni $\mathbf{E} \perp \Delta\mathbf{S}$ i $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S} = 0$), całkowity strumień przechodzący przez powierzchnię S równa się sumie strumieni przechodzących przez podstawy walca o powierzchni S' każda. Zatem:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 2ES'. \quad (4.58)$$

Na podstawie prawa Gaussa otrzymujemy wzór

$$2ES' = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad (4.59)$$

z którego wynika, że

$$E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r S'}. \quad (4.60)$$

Biorąc pod uwagę, że gęstość powierzchniowa ładunku $\sigma_0 = Q/S'$, otrzymujemy stąd wzór

$$E = \frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (4.61)$$

Należy zauważyć, że natężenie pola naładowanej nieskończonej płaszczyzny nie zależy od odległości.

4.4 Pojemność elektryczna

4.4.1 Ładunki elektryczne na przewodnikach

Przewodniki, w odróżnieniu od izolatorów, są ciałami, w których ładunki elektryczne mogą się swobodnie przemieszczać. Dobrymi przewodnikami elektryczności są np. metale. Po wprowadzeniu ładunków na dany przewodnik w krótkim czasie rozłożą się one w taki sposób, aby natężenie wypadkowego pola elektrycznego $\mathbf{E} = 0$ w każdym punkcie wewnątrz przewodnika. W przeciwnym przypadku pole elektryczne powodowało by dalszy ruch ładunków. Wynikają stąd następujące wnioski:

1. Potencjał elektryczny wewnątrz przewodnika i na jego powierzchni jest stały. Jeżeli bowiem dwa punkty przewodnika połączymy krzywą C przebiegającą wewnątrz niego, to całka we wzorze

$$V_1 - V_2 = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.62)$$

znika, ponieważ wzdłuż całej krzywej $\mathbf{E} = 0$. Wynika stąd, że $V_1 = V_2$ tj. $V = \text{const}$.

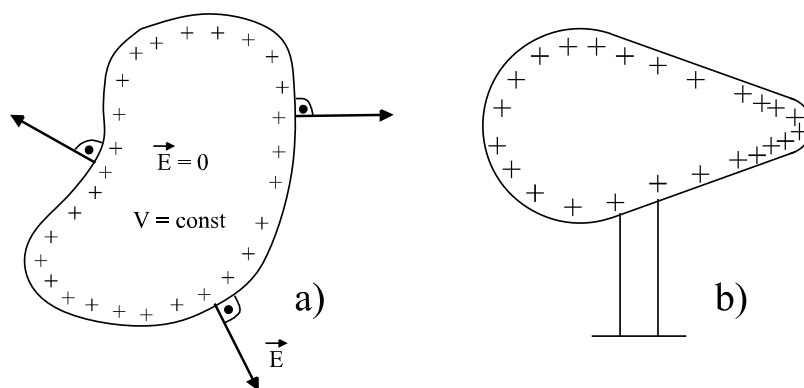
2. Ładunki znajdują się tylko na zewnętrznej powierzchni przewodnika. Gdyby istniał pewien ładunek Q wewnątrz przewodnika, to można byłoby otoczyć go powierzchnią zamkniętą S , przebiegającą całkowicie wewnątrz przewodnika. Stosując do tej powierzchni prawo Gaussa, mielibyśmy

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}. \quad (4.63)$$

Ponieważ jednak na całej powierzchni $\mathbf{E} = 0$, więc strumień pola przez tę powierzchnię znika, skąd wynika, że $Q = 0$.

Ponieważ, zgodnie z pkt 1, powierzchnia przewodnika jest powierzchnią ekwipotencjalną, kierunki wektora natężenia pola i linii sił na zewnątrz przewodnika muszą być prostopadłe do jego powierzchni. Omówione własności rozkładu ładunków na przewodniku oraz wytworzonego pola elektrycznego i potencjału ilustruje rysunek 4.18a.

Powierzchniowa gęstość ładunku σ na danym przewodniku zależy od kształtu jego powierzchni. Największa gęstość ładunku występuje na najbardziej zakrzywionych fragmentach powierzchni, charakteryzujących się najmniejszym promieniem krzywizny; dotyczy to w szczególności ostrz i występów na powierzchni przewodnika. Przy dużych gęstościach ładunku elektrycznego może on przechodzić z ostrza na otaczające je cząsteczki powietrza, wywołując ich ruch w wyniku odpychania elektrostatycznego ładunków (tzw. „wiatr elektryczny”) lub wyładowanie iskrowe. Zależność gęstości



Rysunek 4.18:

ładunku na przewodniku od kształtu powierzchni pokazuje schematycznie rysunek 4.18b.

4.4.2 Pojemność pojedynczego przewodnika i kondensatora

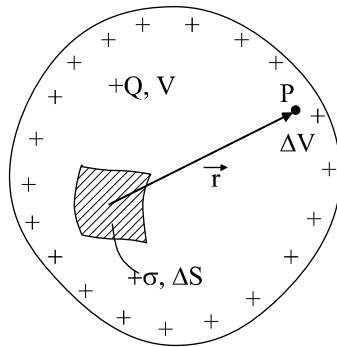
Rozpatrzmy teraz związek między ładunkiem Q przewodnika, znajdującego się w dużej odległości od innych naładowanych ciał i przewodników a jego potencjałem V (rys. 4.19). Ponieważ charakter rozkładu ładunku na przewodniku zależy jedynie od kształtu jego powierzchni, powierzchniowa gęstość ładunku σ na danym przewodniku jest proporcjonalna do sumarycznego ładunku, $\sigma \sim Q$. Potencjał dowolnego punktu przewodnika znajdujemy całkując potencjały pochodzące od poszczególnych fragmentów jego powierzchni, proporcjonalne do gęstości ładunku, $\Delta V \sim \sigma \Delta S$. Wynika stąd, że potencjał przewodnika jest wprost proporcjonalny do jego całkowitego ładunku, $V \sim Q$ a stosunek ładunku przewodnika do jego potencjału jest wielkością stałą,

$$\frac{Q}{V} = \text{const.} \quad (4.64)$$

Stosunek ten nazywamy *pojemnością elektryczną* C danego przewodnika,

$$\boxed{C = \frac{Q}{V}}. \quad (4.65)$$

Jednostką pojemności elektrycznej jest farad (F), $[C] = C/V = F$. Jeden farad jest więc pojemnością przewodnika, na którym ładunek jednego kulomba wytwarza potencjał jednego volta. Farad jest stosunkowo dużą jednostką po-



Rysunek 4.19:

jemności. W praktyce pojemność wyraża się zwykle w podwielokrotnościach farada, np. w mikrofaradach ($1\mu\text{F} = 10^{-6}\text{F}$).

Pojemność danego przewodnika zależy od jego rozmiarów i kształtu. Dla przykładu obliczymy pojemność przewodzącej kuli o promieniu R . Korzystając z prawa Gaussa można pokazać, że pole elektryczne *na zewnątrz* kuli o całkowitym ładunku Q jest identyczne z potencjałem wytworzonym przez ładunek punktowy Q , umieszczony w jej środku. Potencjał kuli wyraża się więc wzorem (4.31), w którym $r = R$,

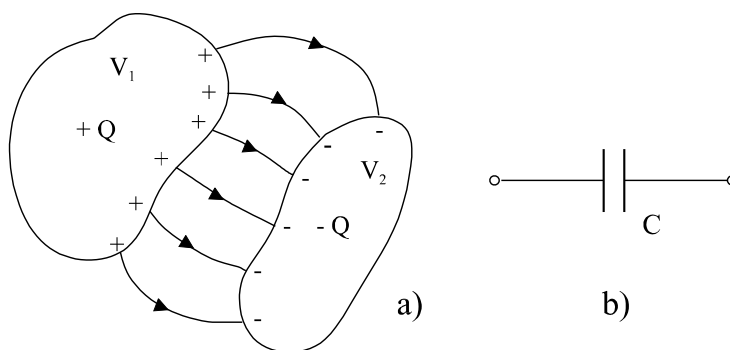
$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r R}. \quad (4.66)$$

Zgodnie ze wzorem (4.65) pojemność kuli jest równa

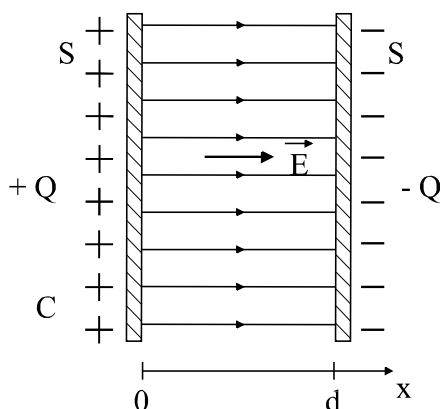
$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon_r R. \quad (4.67)$$

Z podanego wzoru wynika, że wymiar stałej dielektrycznej próżni można wyrazić jako $[\epsilon_0] = \text{F/m}$. Interesujący wynik daje obliczenie promienia kuli, której pojemność w próżni wynosi $C = 1 \text{ F}$. Jest on równy $R = 9 \cdot 10^9 \text{ m}$!

Dotychczas rozpatrywaliśmy pojemność elektryczną odosobnionego przewodnika, znajdującego się w dużej odległości od innych ciał. Jeżeli w pobliżu danego przewodnika znajdują się naładowane ciała lub nawet nie naładowane przewodniki, jego pojemność elektryczna ulega zmianie. Duże znaczenie praktyczne ma układ położonych blisko siebie przewodników, których ładunki mają jednakowe wartości bezwzględne i przeciwne znaki, $+Q$ i $-Q$ (rys. 4.20). Taki układ przewodników nazywamy *kondensatorem* a poszczególne przewodniki — jego *okładkami* (rys. 4.20b pokazuje schematyczne oznaczenie kondensatora). Podobnie jak w przypadku pojedynczego przewodnika



Rysunek 4.20:



Rysunek 4.21:

można wykazać, że napięcie między okładkami kondensatora $U = V_1 - V_2$ (V_1 i V_2 — potencjały okładek) jest proporcjonalne do bezwzględnej wartości Q ładunku, zgromadzonego na każdej z okładek. Wynika stąd, że stosunek ładunku do napięcia jest stałą wielkością,

$$\frac{Q}{U} = \text{const.} \quad (4.68)$$

Stosunek ten nazywamy *pojemnością elektryczną* C kondensatora,

$$\boxed{C = \frac{Q}{U}}. \quad (4.69)$$

Pojemność kondensatora zależy od kształtu i rozmiarów oraz od względnego położenia jego okładek. Obliczymy przykładowo pojemność *kondensatora płaskiego*. Składa się on z dwóch przewodzących, równoległych płytek o powierzchni S każda, umieszczonych w odległości d , małej w porównaniu z liniowymi rozmiarami płytek (rys. 4.21). Można przyjąć w przybliżeniu, że pole elektryczne kondensatora jest równe sumie pól fragmentów dwóch nieskończonych płaszczyzn, posiadających równomiernie rozłożone ładunki $+Q$ i $-Q$ (patrz podrozdział 4.3.2). Biorąc pod uwagę kierunki pola elektrycznego, wytworzonego przez ładunki na każdej z okładek można stwierdzić, że na zewnątrz kondensatora całkowite natężenie pola elektrycznego $E = 0$ a między okładkami kondensatora natężenie pola jest dwukrotnie większe, niż w przypadku pojedynczej naładowanej płaszczyzny (wzór 4.60), tj.

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}. \quad (4.70)$$

Napięcie między okładkami kondensatora możemy obliczyć ze wzoru (4.34),

$$U = V_1 - V_2 = \int_0^d E dx. \quad (4.71)$$

Ponieważ pole elektryczne wewnątrz kondensatora jest w przybliżeniu jednorodne, $E = const$, więc

$$U = Ed \quad (4.72)$$

i uwzględniając wzór (4.70) otrzymujemy związek

$$U = \frac{Qd}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}. \quad (4.73)$$

Na podstawie definicji pojemności kondensatora (4.69) dostajemy wzór

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}. \quad (4.74)$$

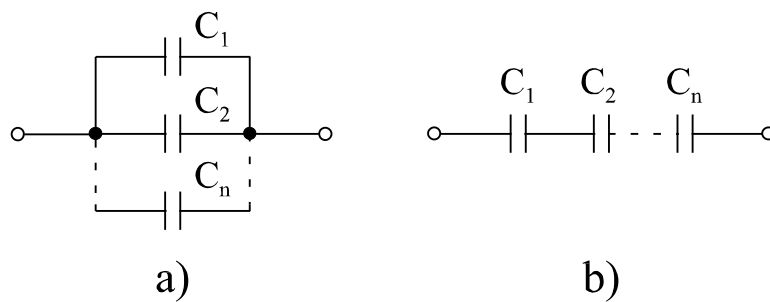
Pojemność płaskiego kondensatora jest więc proporcjonalna do powierzchni jego okładek i odwrotnie proporcjonalna do odległości między nimi.

Przypomnijmy jeszcze (bez wyprowadzania) wzory, określające wypadkową pojemność C połączonych ze sobą kondensatorów o pojemnościach C_i ($i = 1, 2, \dots, n$). W przypadku *połączenia równoległego* kondensatorów (rys. 4.22a).

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad (4.75)$$

a w przypadku ich *połączenia szeregowego* (rys. 4.22b)

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (4.76)$$



Rysunek 4.22:

4.4.3 Energia pola elektrycznego

W podrozdziale (4.2.2) wyprowadzono wzór, określający energię potencjalną oddziaływania dwóch ładunków punktowych. Również naładowany przewodnik lub kondensator posiada określoną energię, związaną ze wzajemnym oddziaływaniem ładunków elektrycznych. Rozpatrzmy przewodnik o pojemności elektrycznej C , którego ładunek i potencjał w danej chwili czasu wynoszą odpowiednio Q' i V' (rys. 4.23). Praca wykonywana przez siły pola elektrostatycznego przy przeniesieniu niewielkiego ładunku $\Delta Q'$ z przewodnika do nieskończoności wynosi (por. wzór (4.32))

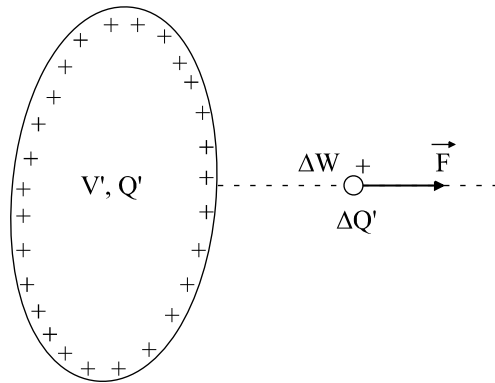
$$\Delta W = -V' \Delta Q'. \quad (4.77)$$

W podanym wzorze uwzględniono, że potencjał pola w nieskończonej odległości od układu ładunków jest równy zero. Znak „-” wynika z faktu, że całkowity ładunek przewodnika maleje. Ponieważ potencjał przewodnika $V' = Q'/C$, więc:

$$\Delta W = -\frac{Q'}{C} \Delta Q'. \quad (4.78)$$

Wynika stąd, że całkowita praca W , wykonana przy rozładowaniu przewodnika, wynosi

$$W = -\int_Q^0 \frac{Q'}{C} dQ' = \frac{1}{C} \int_0^Q Q' dQ' = \frac{Q^2}{2C}, \quad (4.79)$$



Rysunek 4.23:

gdzie Q jest początkowym ładunkiem przewodnika. Powyższy wzór określa jednocześnie energię E_p naładowanego ciała,

$$\boxed{E_p = \frac{Q^2}{2C}}. \quad (4.80)$$

W podobny sposób można wykazać, że podany wzór jest również słuszny w przypadku naładowanego kondensatora.

Można teraz postawić pytanie: gdzie zlokalizowana jest energia oddziaływających ładunków elektrycznych? Fakt przenoszenia energii przez fale elektromagnetyczne wskazuje, że energia ta jest „zmagazynowana” w polu elektrycznym, wytworzonym przez ładunki. Zastosujemy teraz ostatni wzór do szczególnego przypadku energii płaskiego kondensatora. Korzystając z definicji pojemności (4.69) można przepisać ten wzór w postaci

$$E_p = \frac{QU}{2}. \quad (4.81)$$

Ze wzoru (4.70) wynika, że ładunek

$$Q = \varepsilon_0 \varepsilon_r ES. \quad (4.82)$$

Uwzględniając dodatkowo wzór (4.72), otrzymujemy wyrażenie

$$E_p = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r ES E d}{2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}{2} V, \quad (4.83)$$

w którym $V = Sd$ jest objętością ograniczoną okładkami kondensatora. Wiadąc, że energia naładowanego kondensatora jest proporcjonalna do objętości, w której istnieje pole elektryczne. Sugeruje to, że energia pola elektrycznego jest rozłożona w przestrzeni z gęstością objętościową w_e , zdefiniowaną wzorem

$$w_e = \frac{E_p}{V}. \quad (4.84)$$

Zgodnie z powyższymi wzorami, gęstość energii pola elektrycznego wynosi

$$\boxed{w_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E^2}{2}} \quad (4.85)$$

i jest proporcjonalna do kwadratu natężenia pola. Wzór ten, jakkolwiek wyprowadzony dla jednorodnego pola elektrycznego w kondensatorze, jest słuszny w przypadku pola wytworzonego przez dowolny układ ładunków.

