

## Rozdział 8

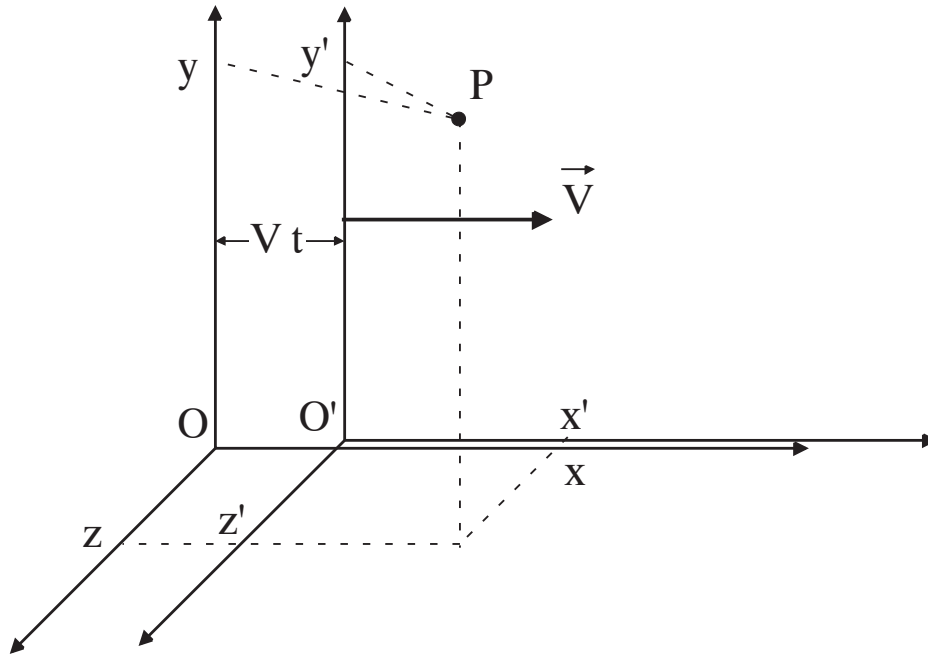
# Szczególna teoria względności

### 8.1 Transformacja Galileusza. Zasada względności Galileusza.

Przy opisie ruchu dowolnego ciała należy określić *układ odniesienia*, względem którego rozpatrujemy ten ruch. Zależnie od wyboru układu odniesienia, ruch ciała może być mniej lub bardziej skomplikowany. W mechanice klasycznej (Newtona) najczęściej rozpatruje się zjawiska zachodzące w *inercjalnych układach odniesienia* (por. rozdział 2.3.1). Zwróćmy uwagę na fakt, że układ odniesienia, poruszający się ruchem prostoliniowym jednostajnym względem inercjalnego układu odniesienia, jest również inercjalnym układem odniesienia. Jeżeli bowiem w pierwszym układzie ciało, na które nie działają zewnętrzne siły, porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym,  $\mathbf{v} = \text{const}$ , to jego ruch w drugim układzie — jak wynika z prawa dodawania prędkości — będzie też ruchem jednostajnym prostoliniowym,  $\mathbf{v}' = \text{const}'$ . Wszystkie zjawiska mechaniczne będą w obu układach przebiegać w ten sam sposób. Odnosi się to np. do zjawisk zachodzących w wagonie poruszającym się ruchem jednostajnym prostoliniowym — przebiegają one tak samo jak wówczas, gdy wagon jest nieruchomy względem powierzchni Ziemi. Wniosek ten pozwala sformułować *zasadę Galileusza*:

Jednostajny, prostoliniowy ruch odosobnionego układu odniesienia nie ma wpływu na zachodzące w nim zjawiska fizyczne.

Wszystkie inercjalne układy odniesienia są więc równouprawnione i nie można za pomocą żadnych doświadczeń mechanicznych stwierdzić, czy dany



Rysunek 8.1:

układ pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Zbadamy teraz związki, zachodzące między wielkościami fizycznymi w mechanice klasycznej, mierzonymi w dwóch różnych inercjalnych układach odniesienia. Jak będzie pokazane dalej, analogiczne rozważania mają podstawowe znaczenie w szczególnej teorii względności. Założymy, że drugi układ odniesienia („primowany”) porusza się względem pierwszego („nieprimowanego”) ze stałą prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x$ , przy czym w chwili początkowej układy pokrywają się (rys. 8.1). Jak widać z rysunku, współrzędne punktu  $P$  w obu układach odniesienia spełniają zależności:

$$\boxed{x' = x - Vt}, \quad (8.1)$$

$$\boxed{y' = y}, \quad (8.2)$$

$$\boxed{z' = z}. \quad (8.3)$$

Mechanika klasyczna zakłada ponadto, że czas w obu układach odniesienia płynie jednakowo:

$$\boxed{t' = t}. \quad (8.4)$$

Powyższe wzory noszą nazwę *transformacji Galileusza*. W mechanice klasycznej przyjmuje się również, że masa poruszającego się ciała nie zależy od jego prędkości:  $m' = m$ .

Transformacja Galileusza pozwala na znalezienie wartości danej wielkości fizycznej w nowym układzie odniesienia, o ile znana jest jej wartość w starym układzie odniesienia. Obliczmy przykładowo prędkość  $\mathbf{v}'$  punktu materialnego w nowym („primowanym”) układzie, jeżeli w starym („nieprimowanym”) układzie wynosi ona  $\mathbf{v}$ . Zgodnie ze wzorami (8.1) - (8.3) otrzymujemy

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - V \Delta t}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} - V = v_x - V \quad (8.5)$$

a więc

$$\boxed{v'_x = v_x - V}. \quad (8.6)$$

Podobnie:

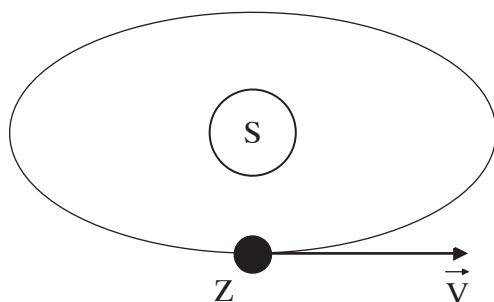
$$\boxed{v'_y = v_y}, \quad (8.7)$$

$$\boxed{v'_z = v_z}. \quad (8.8)$$

Otrzymane wzory przedstawiają prawo składania prędkości mechaniki klasycznej. Jeżeli w szczególności  $\mathbf{v} = \text{const}$  to i  $\mathbf{v}' = \text{const}'$ , jak uprzednio stwierdzono.

## 8.2 Doświadczenie Michelsona - Morley'a. Postulaty Einsteina. Względność czasu i długości

Zasada względności Galileusza została sformułowana w odniesieniu do zjawisk *mechanicznych*. W XIX wieku fizycy uważali, że analogiczna zasada nie obowiązuje jednak w przypadku zjawisk elektromagnetycznych, których szczególnym przypadkiem są zjawiska optyczne. Jak wykazał J.C. Maxwell i H. Hertz, światło jest falą elektromagnetyczną. Prędkość rozchodzenia się światła w próżni wynosi  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. W ubiegłym wieku uważano, że fale elektromagnetyczne rozchodzą się w pewnej substancji — wypełniającej całą przestrzeń łącznie z ciałami materialnymi — zwanej *eterem*. W przypadku zjawisk optycznych można wówczas wskazać pewien wyróżniony układ odniesienia — będzie to układ znajdujący się w spoczynku względem eteru. W



Rysunek 8.2:

tym układzie odniesienia prędkość rozchodzenia się światła we wszystkich kierunkach powinna być jednakowa. Jeżeli inny układ odniesienia poruszałby się z prędkością  $V$  względem eteru, to mierzona w tym układzie prędkość światła powinna wynosić, zgodnie z transformacją Galileusza,  $c' = c \mp V$ , jeżeli kierunek ruchu światła i układu odniesienia jest taki sam (przeciwny).

Próbie wykrycia zależności prędkości światła od ruchu układu odniesienia podjęli w roku 1887 A.A. Michelson i E.W. Morley. W swoich pomiarach wykorzystali oni z precyzyjnego przyrządu zwanego interferometrem Michelsona. Jako ruchomy układ odniesienia służyła Ziemia, której prędkość w ruchu orbitalnym wokół Słońca  $V \approx 30 \text{ km/s}$  (rys. 8.2). . We wspomnianych doświadczeniach — a także w podobnych eksperymentach, przeprowadzonych przez innych badaczy — nie stwierdzono jednak żadnego wpływu ruchu Ziemi na prędkość rozchodzenia się światła w próżni. Negatywny wynik doświadczenia Michelsona - Morley'a wskazuje, że w przypadku zjawisk elektromagnetycznych nie istnieje żaden wyróżniony inercjalny układ odniesienia, a tym samym pozwala zakwestionować istnienie eteru. Obecnie uważamy, że fale elektromagnetyczne mogą rozchodzić się w próżni, bez pośrednictwa jakiegokolwiek ośrodka materialnego. Z drugiej strony wynik tego doświadczenia stoi w sprzeczności z prawem dodawania prędkości w mechanice klasycznej, które można wyprowadzić z transformacji Galileusza. Dylemat ten rozwiązał A. Einstein, tworząc w 1905 r. *szczególną teorię względności*. Za podstawę swojej teorii Einstein przyjął dwa postulaty, będące częściowo wnioskami z doświadczenia Michelsona - Morley'a:

1. *Jednostajny prostoliniowy ruch układu odniesienia nie ma wpływu na zachodzące w nim dowolne zjawiska fizyczne (mechaniczne, elektromagnetyczne i inne). Jest to rozszerzenie zasady względności Galileusza. Wszystkie inercjalne układy odniesienia są więc równouprawnione; nie*

można za pomocą żadnych doświadczeń fizycznych stwierdzić, czy dany układ pozostaje w spoczynku czy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym.

2. *Prędkość światła w próżni nie zależy od prędkości obserwatora i źródła światła i jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia.*

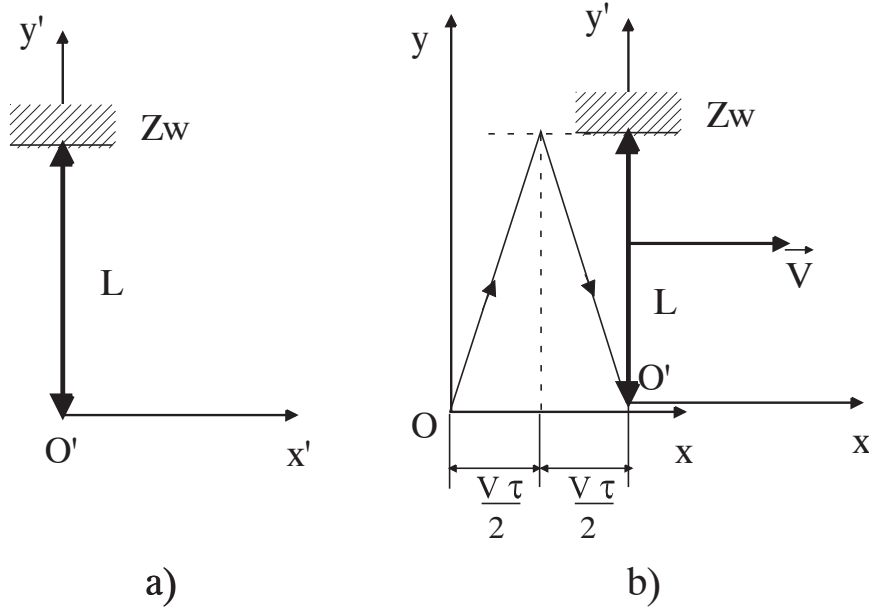
Jak wykazał Einstein, przyjęcie tych postulatów zmusza do rewizji podstawowych pojęć, dotyczących przestrzeni i czasu. Między innymi, w teorii względności transformacja Galileusza musi zostać zastąpiona przez inną transformację, zwaną *transformacją Lorentza*.

Rozpatrzmy teraz — jak przy wyprowadzaniu transformacji Galileusza — dwa inercjalne układy odniesienia, z których drugi („primowany”) porusza się względem pierwszego („nieprimowanego”) ze stałą prędkością  $V$  wzdłuż osi  $x$ , przy czym w chwili początkowej oba układy się pokrywają. Dla uproszczenia na rysunkach będą pokazywane tylko osie  $x$ ,  $x'$  i  $y$ ,  $y'$  obu układów. Zbadamy najpierw zagadnienie pomiaru czasu w obu układach, zakładając słuszność postulatów Einsteina. Dany odstęp czasu można wyznaczyć np. na podstawie przebytej przez światło odległości. Niech w „primowanym” układzie współrzędnych znajduje się pręt o długości  $L$ , ustawiony wzdłuż osi  $y'$ . Światło wysłane z początku układu współrzędnych dociera do zwierciadła „Zw”, umieszczonego na końcu pręta i po odbiciu wraca do punktu  $O'$  (rys 8.3(a)). W układzie „primowanym” światło przebywa tę drogę w czasie

$$\tau' = \frac{2L}{c}. \quad (8.9)$$

Drogę światła, oglądaną w układzie „nieprimowanym” przedstawia rys. 8.3(b). Z pierwszego postulatu Einsteina wynika, że długość pręta ustawionego *prostopadle* do kierunku ruchu powinna być jednakowa w obu układach odniesienia. Gdyby długość ta, zmierzona w obu układach — np. w chwili początkowej — była różna, przeczyłoby to założeniu o równouprawnieniu obu układów. Zatem w układzie „nieprimowanym” światło przebywa dłuższą drogę niż w układzie „primowanym”, stąd czas przebiegu światła w układzie „nieprimowanym”  $\tau$  musi być — wobec założenia stałej prędkości światła — dłuższy od czasu przebiegu światła  $\tau'$  w układzie „primowanym”. Można łatwo obliczyć stosunek obu czasów. Jak wynika z rysunku 8.3(b), czas  $\tau$  określa wzór

$$\tau = \frac{2\sqrt{L^2 + (V\tau/2)^2}}{c}. \quad (8.10)$$



Rysunek 8.3:

Przekształcając powyższy wzór otrzymujemy:

$$c^2 \tau^2 = 4L^2 + V^2 \tau^2, \quad (8.11)$$

$$(c^2 - V^2) \tau^2 = 4L^2, \quad (8.12)$$

$$\tau = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2L}{c\sqrt{1 - (V/c)^2}}. \quad (8.13)$$

Dzieląc stronami równanie (8.13) przez równanie (8.9) znajdujemy:

$$\frac{\tau}{\tau'} = \frac{1}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}, \quad (8.14)$$

$$\boxed{\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}}}, \quad (8.15)$$

a więc istotnie  $\tau > \tau'$ . Zatem czas trwania zjawiska, zachodzącego w pewnym punkcie przestrzeni — mierzony w układzie odniesienia, względem którego ten punkt się porusza — jest *dłuższy* niż czas trwania tego zjawiska w

układzie odniesienia, w którym punkt spoczywa. Obrazowo twierząc, zegar poruszający się „spóźnia się” w stosunku do zegara w spoczynku. Efekt ten nie jest własnością rozpatrywanego „zegara świetlnego” a własnością czasu i występuje dla dowolnego zjawiska. Jest on nazywany *dylatacją (wydłużeniem) czasu*. Został on potwierdzony np. w doświadczeniu z mezonami  $\pi^+$  — nietrwałymi cząstkami, rozpadającymi się na mezon  $\mu^+$  i neutrino, wykonanym przez R.P. Durbina, H.H. Loara i W.W. Hawensa w 1952r. Wiadomo, że średni czas życia (średni czas od momentu wytworzenia do momentu rozpadu) spoczywającego mezonu  $\pi^+$  wynosi  $\tau' = 2.5 \cdot 10^{-8}$  s. We wspomnianym doświadczeniu mierzono odległość, przebytą przez mezony  $\pi^+$  poruszające się z prędkością bliską prędkości światła,  $V = 0.99995 c$ . Średni czas życia mezonu w układzie laboratoryjnym, zgodnie z teorią względności powinien być równy

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1 - (V/c)^2}} = \frac{2.5 \cdot 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1 - (0.99995)^2}} = 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

a jego średnia droga powinna wynosić

$$l \approx c\tau = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \cdot 2.5 \cdot 10^{-6} \text{ s} \approx 750 \text{ m.}$$

Tego rodzaju odległości były istotnie zarejestrowane w omówionym doświadczeniu. Gdyby nie brano pod uwagę dylatacji czasu, średnia droga mezonu byłaby ok. 100 razy krótsza!

Rozpatrzmy teraz zagadnienie pomiaru długości w obu układach odniesienia. Przyjmijmy, że w „primowanym” układzie znajduje się nieruchomy pręt, skierowany wzdłuż osi  $x'$ , na końcu którego jest umocowane zwierciadło (rys 8.4(a)). W tym układzie długość pręta można wyrazić wzorem

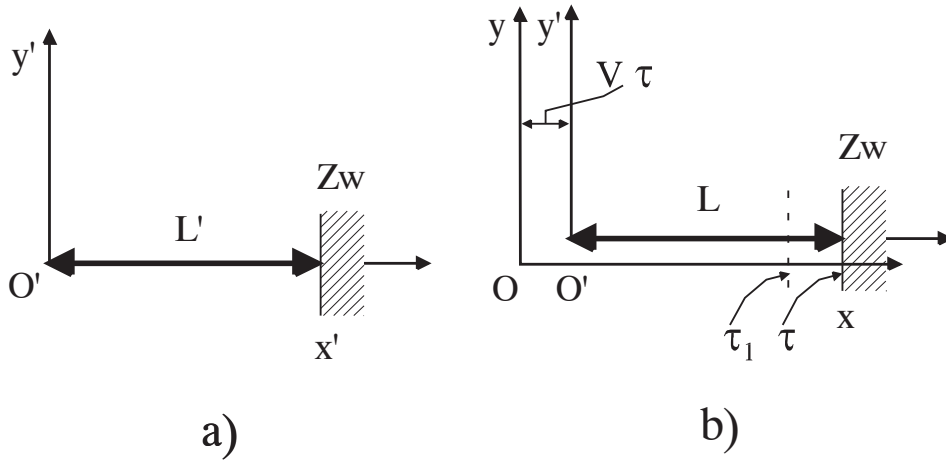
$$L' = \frac{c\tau'}{2} \quad (8.18)$$

gdzie  $\tau'$  — czas przebiegu impulsu świetlnego z punktu  $O'$  do zwierciadła „Zw” i z powrotem. W układzie „nieprimowanym” (rys 8.4(b)) dla ruchu światła w dodatnim kierunku osi  $x$  mamy zależność

$$L + V\tau_1 = c\tau_1 \quad (8.19)$$

gdzie  $\tau_1$  — czas, w jakim impuls świetlny doszedł do zwierciadła. Stąd

$$\tau_1 = \frac{L}{c - V}. \quad (8.20)$$



Rysunek 8.4:

Podobnie, dla ruchu światła odbitego od zwierciadła, otrzymujemy

$$L - V\tau_2 = c\tau_2 \quad (8.21)$$

gdzie  $\tau_2$  — czas, w jakim impuls świetlny powrócił do punktu  $O'$ . Stąd

$$\tau_2 = \frac{L}{c + V}. \quad (8.22)$$

Całkowity czas  $\tau$  przebiegu impulsu świetlnego jest więc równy

$$\begin{aligned} \tau = \tau_1 + \tau_2 &= \frac{L}{c - V} + \frac{L}{c + V} = \frac{L(c + V + c - V)}{c^2 - V^2} \\ &= \frac{2Lc}{c^2 - V^2} = \frac{2L}{c(1 - V^2/c^2)}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Długość pręta w układzie „nieprimowanym” można więc wyrazić wzorem

$$L = \frac{c(1 - V^2/c^2)\tau}{2}. \quad (8.24)$$

Dzieląc stronami równanie (8.24) przez (8.18) znajdziemy

$$\frac{L}{L'} = \frac{(1 - V^2/c^2)\tau}{\tau'}. \quad (8.25)$$

Biorąc pod uwagę wzór (8.14), opisujący dylatację czasu, otrzymuje się

$$\frac{L}{L'} = \frac{(1 - V^2/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \sqrt{1 - V^2/c^2} \quad (8.26)$$

czyli

$$\boxed{L = L' \sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (8.27)$$

Jak wynika z ostatniego wzoru,  $L < L'$ . Wobec tego długość ciała — mierzona w układzie odniesienia, względem którego ciało się porusza — jest w kierunku ruchu *mniejsza* niż jego długość mierzona w układzie, w którym ciało spoczywa. Efekt ten nazywa się *kontrakcją (skróceniem) Lorentza*. Rezultaty powyższych rozważań można zatem streścić następująco:

pojęcia czasu i odległości nie mają w teorii względności absolutnego znaczenia, ponieważ są one zależne od wybranego układu odniesienia.

### 8.3 Transformacja Lorentza. Relatywistyczne składanie prędkości.

W klasycznej mechanice — w odróżnieniu od teorii względności — pojęcia odległości i czasu mają absolutne znaczenie, niezależne od układu odniesienia. Wynika stąd, że transformacja Galileusza, oparta na założeniach mechaniki klasycznej, musi być zastąpiona w teorii względności przez inną transformację, którą — jak wspomniano — nazywamy *transformacją Lorentza*. Wzory transformacji Lorentza można otrzymać w prosty sposób ze wzorów wyprowadzonych w poprzednim podrozdziale. Powracając do dyskusji skrócenia Lorentza łatwo zauważyć, że współrzędne końca pręta określają wzory:

$$L' = x' \quad (8.28)$$

$$L = x - Vt, \quad (8.29)$$

odpowiednio w „primowanym” i „nieprimowanym” układzie odniesienia (czas  $\tau$  oznaczamy teraz przez  $t$ ). Na podstawie wzoru (8.27), określającego skrócenie Lorentza, otrzymujemy

$$\frac{x'}{x - Vt} = \frac{L'}{L} = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \gamma, \quad (8.30)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenie

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}}. \quad (8.31)$$

Zatem, ze wzoru (8.30) mamy

$$x' = \gamma(x - Vt). \quad (8.32)$$

Ponieważ, jak już wykazano, długość ciała w kierunku prostopadłym do ruchu nie ulega zmianie, powinny być spełnione zależności:

$$y' = y, \quad (8.33)$$

$$z' = z. \quad (8.34)$$

Wzory (8.32) - (8.34) przedstawiają trzy pierwsze wyrażenia, opisujące transformację Lorentza. Dla znalezienia ostatniego wzoru, opisującego transformację czasu, można skorzystać z postulatu o równouprawnieniu obu układów odniesienia. Transformacja odwrotna do transformacji (8.32) powinna więc mieć postać

$$x = \gamma(x' + Vt') \quad (8.35)$$

(znak „+” odpowiada przeciwnemu kierunkowi ruchu układu „nieprimowanego” względem „primowanego”). Podstawiając wyrażenie (8.32) do wzoru (8.35) znajdujemy

$$x = \gamma[\gamma(x - Vt) + Vt'] = \gamma^2 x - \gamma^2 Vt + \gamma Vt' \quad (8.36)$$

skąd, wyliczając czas  $t'$ :

$$\gamma Vt' = x - \gamma^2 x + \gamma^2 Vt = \gamma^2 Vt - (\gamma^2 - 1)x, \quad (8.37)$$

$$t' = \gamma \left[ t - \frac{(\gamma^2 - 1)x}{\gamma^2 V} \right] = \gamma \left[ t - \frac{(1 - 1/\gamma^2)x}{V} \right]. \quad (8.38)$$

Czynnik występujący przy współrzędnej  $x$  można wyrazić jako

$$\frac{1 - 1/\gamma^2}{V} = \frac{1 - (1 - V^2/c^2)}{V} = \frac{V}{c^2}. \quad (8.39)$$

Transformację czasu określa więc wyrażenie

$$\boxed{t' = \gamma \left( t - \frac{Vx}{c^2} \right)}. \quad (8.40)$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - Vt) \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - Vx/c^2). \end{aligned}$$

Tabela 8.1:

W tabeli 8.1 przedstawiamy jeszcze raz wszystkie wzory transformacji Lorentza. Transformacja odwrotna (od układu „primowanego” do „nieprimowanego”) wyraża się analogicznymi wzorami, w których znak prędkości  $V$  jest zmieniony na przeciwny.

W przypadku gdy prędkość względna ruchu obu układów jest znacznie mniejsza od prędkości światła,  $V \ll c$ , powyższe wzory przechodzą we wzory transformacji Galileusza. Można wówczas przyjąć, że  $\gamma \approx 1$  i pominąć czynnik  $Vx/c^2$  we wzorze (8.40). Ogólnie gdy  $V \ll c$ , wszystkie wzory teorii względności sprowadzają się do wzorów mechaniki klasycznej. *Mechanika klasyczna nie jest więc teorią odrębną od teorii względności, ale jej granicznym przypadkiem — słusznym gdy prędkości ruchu ciała są małe w porównaniu z prędkością światła.*

Wyprowadzimy teraz, korzystając z transformacji Lorentza, związek między wartościami prędkości  $\mathbf{v}$  i  $\mathbf{v}'$  punktu w dwóch inercjalnych układach odniesienia. Dla składowych prędkości w kierunku osi  $x$  i  $x'$  otrzymujemy:

$$v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x'/\Delta t}{\Delta t'/\Delta t}, \quad (8.41)$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t} = \frac{\gamma(\Delta x - V\Delta t)}{\Delta t} = \gamma \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} - V \right) = \gamma(v_x - V), \quad (8.42)$$

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{\gamma[\Delta t - (V/c^2)\Delta x]}{\Delta t} = \gamma \left( 1 - \frac{v_x V}{c^2} \right) \quad (8.43)$$

skąd, po podstawieniu do wzoru (8.41), mamy

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V/c^2}. \quad (8.44)$$

W podobny sposób otrzymuje się dwa pozostałe wzory:

$$v'_y = \frac{v_y}{1 - v_x V/c^2}, \quad (8.45)$$

$$\boxed{v'_z = \frac{v_z}{1 - v_x V/c^2}}. \quad (8.46)$$

Rozpatrzmy przypadek, gdy impuls światła rozchodzi się wzdłuż osi  $x$  „nie-primowanego” układu współrzędnych, tj. gdy  $v_x = c$ ,  $v_y = v_z = 0$ . Składowe jego prędkości w „primowanym” układzie, zgodnie z podanymi wzorami, są równe

$$v'_x = \frac{c - V}{1 - cV/c^2} = \frac{c(c - V)}{c - V} = c \quad (8.47)$$

oraz  $v'_y = v'_z = 0$ . Wynik ten zgadza się z założeniem o stałej prędkości światła we wszystkich układach odniesienia. Można w prosty sposób pokazać, że jeżeli prędkość ciała jest mniejsza od prędkości światła w jednym układzie odniesienia, jest ona również mniejsza od prędkości światła we wszystkich innych układach odniesienia.

#### 8.4 Elementy dynamiki relatywistycznej. Związek masy z energią.

W klasycznej dynamice (Newtona) przyjmuje się, że masa ciała jest niezależna od jego prędkości, tj. jest jednakowa we wszystkich układach odniesienia. Przypomnijmy, że pęd i energię kinetyczną ciała poruszającego się z prędkością  $\mathbf{v}$  określają wzory (por. rozdz. 2.3):

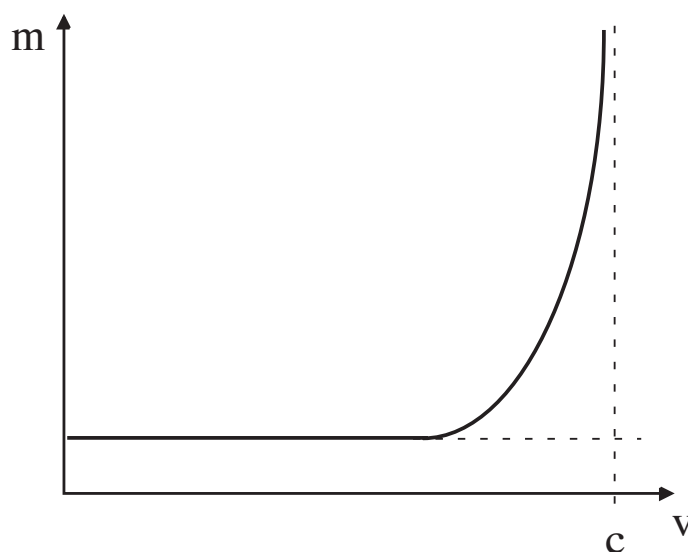
$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (8.48)$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (8.49)$$

Znaczenie pojęć pędu i energii kinetycznej w mechanice wynika m.in. z faktu, że dla układu ciał spełnione są w określonych warunkach *prawa zachowania pędu i energii*: jeżeli na ciała nie działają zewnętrzne siły, to całkowity pęd układu (wektorowa suma pędów poszczególnych ciał) jest stałą wielkością, niezależną od czasu — podobnie jak całkowita energia układu, tj. suma energii kinetycznych i potencjalnych wszystkich ciał. Przypomnijmy również postacie II zasady dynamiki Newtona, określające związek między siłą  $\mathbf{F}$  działającą na ciało a jego przyspieszeniem  $\mathbf{a}$  — również omówione szczegółowo w rozdziale drugim:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (8.50)$$

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (8.51)$$



Rysunek 8.5:

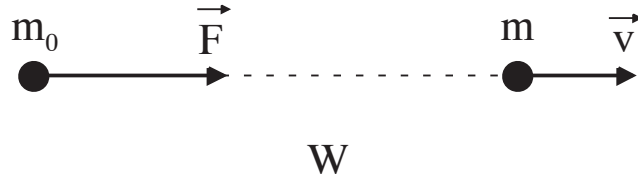
Pokażemy teraz, bez szczegółowego uzasadniania, postać którą przyjmują przytoczone wzory w mechanice relatywistycznej. Dowodzi się, zakładając słuszność relatywistycznego prawa składania prędkości, że całkowity pęd układu ciał jest zachowany w dowolnym układzie odniesienia tylko wtedy, gdy pęd pojedynczego ciała wyraża się wzorem

$$\mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (8.52)$$

gdzie  $m_0$  jest tzw. *masą spoczynkową* ciała, mierzoną w układzie odniesienia, w którym ciało spoczywa. Wzór ten sugeruje, że w *mechanice relatywistycznej masa ciała zmienia się z jego prędkością*. Jej wartość w układzie, w którym ciało ma prędkość  $\mathbf{v}$  wynosi

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (8.53)$$

Masę  $m$  nazywamy *relatywistyczną masą* ciała. Zależność relatywistycznej masy od prędkości ciała ilustruje rysunek 8.5. Widać na nim, że  $m \rightarrow \infty$  gdy  $v \rightarrow c$ . Zależność ta została potwierdzona w doświadczeniach polegających na odchylaniu cząstek, przyspieszanych do dużych prędkości w polu



Rysunek 8.6:

elektrycznym i magnetycznym. Ze wzorów (8.52) i (8.53) wynika, że *relatywistyczny pęd* ciała określa zależność

$$\boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}, \quad (8.54)$$

mająca tę samą postać jak w mechanice klasycznej.

W mechanice relatywistycznej II zasada dynamiki ma również postać analogiczną do wzoru (8.51), tj.

$$\boxed{\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}}. \quad (8.55)$$

gdzie  $\mathbf{p}$  jest *relatywistycznym pędem* ciała. Należy jednak zaznaczyć, że wzór (8.50) jest w teorii względności niepoprawny, nawet jeżeli rozumieć przez  $m$  relatywistyczną masę ciała.

Założymy teraz, że na spoczywające ciało działa siła  $\mathbf{F}$ , w wyniku czego po pewnym czasie uzyska ono prędkość  $\mathbf{v}$ . Wykonaną w tym czasie pracę oznaczymy przez  $W$  (rys. 8.6). Korzystając ze wzoru (8.55) można wykazać, że zachodzi związek

$$W = (m - m_0) c^2. \quad (8.56)$$

Podobnie jak w mechanice klasycznej, wyrażenie po prawej stronie powyższego wzoru możemy uważać za energię kinetyczną ciała

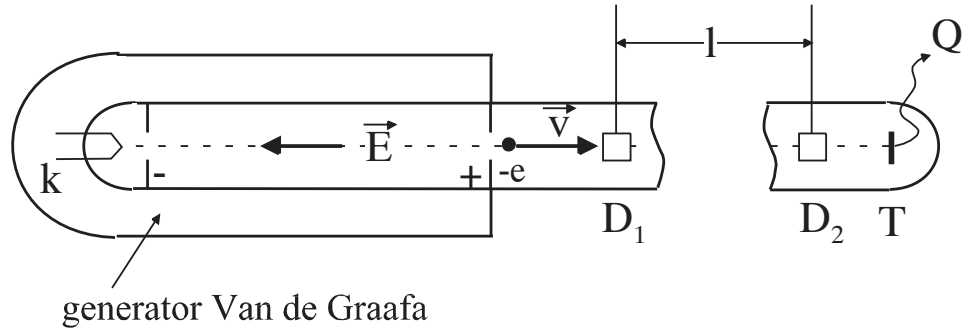
$$W = E_k. \quad (8.57)$$

*Relatywistyczną energię kinetyczną* określa więc wyrażenie

$$\boxed{E_k = (m - m_0) c^2}. \quad (8.58)$$

Zbadamy teraz, jaką postać przyjmuje ten wzór w przypadku gdy  $v \ll c$ . Biorąc pod uwagę wzór (8.53) można napisać

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right). \quad (8.59)$$



Rysunek 8.7:

W celu obliczenia wyrażenia w nawiasie można skorzystać z przybliżonego wzoru

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{x}{2}, \quad |x| \ll 1, \quad (8.60)$$

co prowadzi do zależności

$$E_k \approx m_0 c^2 \left( 1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 v^2}{2}, \quad (8.61)$$

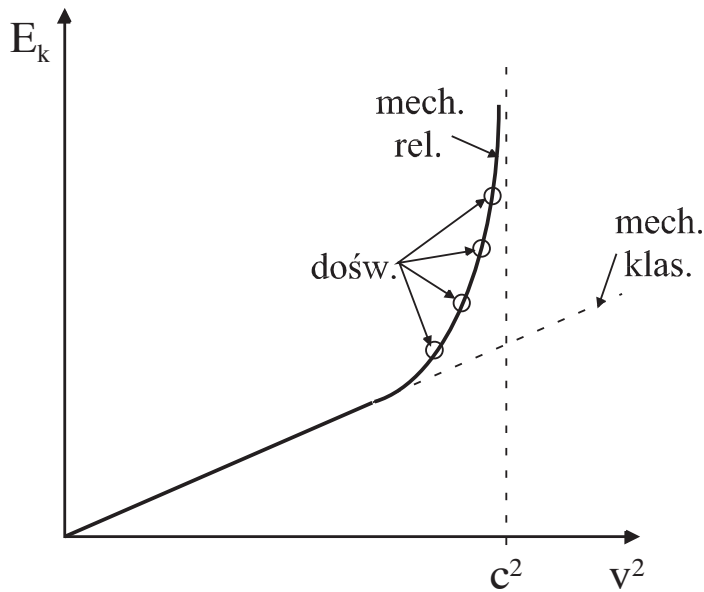
który określa energię kinetyczną w mechanice klasycznej. Zależność energii kinetycznej ciała od jego prędkości (8.58) była wielokrotnie potwierdzona doświadczalnie. Rysunek 8.7 pokazuje schemat doświadczenia W. Bertozziego i in. z 1964r. Wiązka elektronów z żarzonej prądem katody  $K$  była przyspieszana silnym polem elektrycznym o natężeniu  $\mathbf{E}$ , wytworzonym przez generator Van de Graafa. Elektrony po przejściu przez dwa detektory  $D_1$  i  $D_2$ , ustawione w odległości  $l$ , były hamowane przez aluminiową płytkę  $T$ , wskutek czego ich energia kinetyczna zmieniała się na energię ciepłą. Prędkość elektronów określano na podstawie czasu ich przelotu  $t$  między detektorami

$$v = \frac{l}{t} \quad (8.62)$$

a energię kinetyczną wyznaczano z ilości wydzielonego ciepła  $Q$

$$E_k = \frac{Q}{N} \quad (8.63)$$

( $N$  — liczba padających na tarczę elektronów). Zależność energii kinetycznej elektronów od ich prędkości, obliczoną ze wzorów mechaniki klasycznej i



Rysunek 8.8:

relatywistycznej, pokazuje rysunek 8.8. Należy zauważyć, że relatywistyczna energia kinetyczna  $E_k \rightarrow \infty$ , gdy  $v \rightarrow c$ . Wynika stąd, że *ciało o niezerowej masie spoczynkowej nie może osiągnąć prędkości światła* — wymagałoby to dostarczenia mu nieskończenie dużej energii. Na rysunku zaznaczono również punkty doświadczalne. Jak widać, zgodność z relatywistycznym wzorem (8.58) była bardzo dobra. Wzór (8.58), opisujący relatywistyczną energię kinetyczną, można zapisać jako

$$\Delta E_k = \Delta mc^2. \quad (8.64)$$

Zmiana energii kinetycznej ciała jest więc wprost proporcjonalna do zmiany jego masy, przy czym współczynnikiem proporcjonalności jest kwadrat prędkości światła  $c^2$ . Wiadomo jednak, że w zachodzących w przyrodzie procesach jedne postacie energii mogą przechodzić w inne. Energia kinetyczna ciała może np. zmieniać się w jego energię wewnętrzną — energię cieplną. Nasuwa się więc przypuszczenie, że *zwiększenie całkowitej energii ciała, niezależnie od jej postaci, wiąże się zawsze ze zwiększeniem masy ciała*, przy czym zależność tę określa wzór

$$\Delta E = \Delta mc^2. \quad (8.65)$$

Oznacza to np., że ogrzanie ciała powoduje wzrost jego masy. W codziennie spotykanych zjawiskach zmiana masy ciał, związana ze zmianą ich energii jest niezauważalna — ze względu na dużą wartość stałej  $c^2$ . W przypadku zjawisk z dziedziny fizyki jądrowej i fizyki cząstek elementarnych zmiany mas cząstek, spowodowane zmianami ich energii, są stosunkowo znaczne i całkowicie potwierdzają podaną zależność. Przyjmując, że ciało o zerowej masie relatywistycznej ( $m = 0$ ) nie posiada energii całkowitej ( $E = 0$ ), po zsumowaniu poszczególnych przyrostów energii (8.65), otrzymuje się

$$\boxed{E = mc^2}. \quad (8.66)$$

Wzór ten wyraża jedno z najważniejszych praw przyrody — zasadę równoważności masy i energii:

Całkowita energia ciała jest równa iloczynowi jego masy relatywistycznej i kwadratu prędkości światła w próżni.

W szczególności całkowita energia ciała spoczywającego w danym układzie odniesienia wynosi

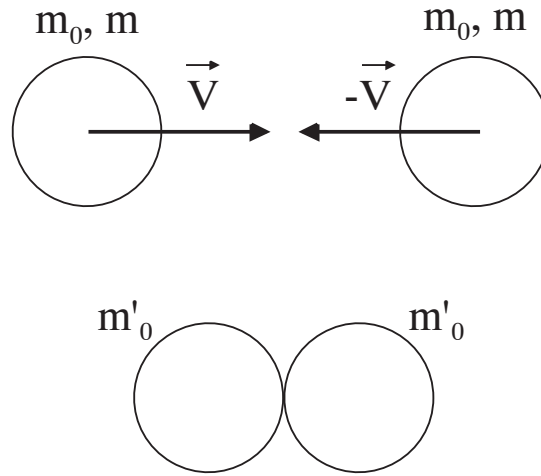
$$E_0 = m_0 c^2. \quad (8.67)$$

Jest to tzw. *energia spoczynkowa*. Można wykazać, że w przypadku układu ciał ich całkowita energia relatywistyczna (suma energii poszczególnych ciał) nie ulega zmianie. Ze wzoru (8.66) wynika, że całkowita masa relatywistyczna układu ciał (suma mas poszczególnych ciał) jest również wielkością stałą. Należy zauważyć, że w mechanice klasycznej mamy do czynienia z dwoma niezależnymi prawami: zachowania całkowitej energii i zachowania całkowitej masy. W celu ilustracji tych stwierdzeń rozpatrzmy przypadek niesprężystego zderzenia dwóch ciał o jednakowych masach (rys. 8.9). Z punktu widzenia mechaniki klasycznej można stwierdzić, że energia kinetyczna obu ciał została zamieniona na ich energię cieplną, przy czym masa każdego z ciał nie zmieniła się. Zgodnie z mechaniką relatywistyczną, masa *spoczynkowa* każdego ciała powinna wzrosnąć zgodnie z zależnością (8.65), ponieważ ogrzane do wyższej temperatury ciało ma wyższą energię całkowitą. Zgodnie ze wzorem (8.65) mamy więc

$$m'_0 - m_0 = \frac{E_k}{c^2}. \quad (8.68)$$

Korzystając ze wzoru określającego energię kinetyczną ciała otrzymujemy

$$E_k = (m - m_0) c^2, \quad (8.69)$$



Rysunek 8.9:

$$m'_0 - m_0 = \frac{(m - m_0) c^2}{c^2} \quad (8.70)$$

skąd wynika, że

$$m'_0 = m. \quad (8.71)$$

Wobec tego *relatywistyczna* masa układu ciał ( $2m = 2m'_0$ ) nie ulega zmianie. Mnożąc ostatecznie wyrażenie przez  $c^2$  otrzymujemy:

$$m'_0 c^2 = m c^2, \quad (8.72)$$

$$E' = E \quad (8.73)$$

skąd wynika, że całkowita energia relatywistyczna układu ciał ( $2E = 2E'$ ) również nie zmienia się.

Wyprowadzimy jeszcze związek między pędem i całkowitą energią swobodnego ciała w mechanice relatywistycznej. Korzystając z poprzednio podanych wzorów, otrzymujemy

$$\begin{aligned} E^2 = m^2 c^4 &= \frac{m_0^2 c^4}{1 - v^2/c^2} = \frac{m_0^2 c^4 (1 - v^2/c^2 + v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} \\ &= \frac{m_0^2 c^4 (1 - v^2/c^2)}{1 - v^2/c^2} + \frac{m_0^2 c^4 v^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \\ &= m_0^2 c^4 + m^2 c^2 v^2 \\ &= m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \end{aligned} \quad (8.74)$$

skąd

$$\boxed{E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}}. \quad (8.75)$$

Wzór ten przyjmuje szczególnie prostą postać dla cząstek o zerowej masie spoczynkowej,  $m_0 = 0$ , które poruszają się w każdym układzie odniesienia z prędkością światła (np. fotony, neutrino). Zachodzi wówczas związek

$$E = cp. \quad (8.76)$$