

Władysław Tomaszewicz

# Elementy fizyki współczesnej

(Na prawach rękopisu)

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej  
Politechnika Gdańska 2002

# Rozdział 1

## Kwantowa teoria promieniowania

### 1.1 Fotony. Zjawisko fotoelektryczne

Szereg faktów doświadczalnych wskazuje, że promieniowanie elektromagnetyczne, w szczególności światło, ma nieciągłą, kwantową naturę. *Składa się ono mianowicie z określonych porcji energii, zwanych kwantami promieniowania lub fotonami.* Po raz pierwszy hipotezę kwantowej struktury promieniowania wysunął w r. 1900 Max Planck dla wyjaśnienia rozkładu energii w widmie promieniowania tzw. ciała doskonale czarnego. Planck przyjął, że emisja i absorpcja promieniowania przez atomy i cząsteczki substancji może zachodzić tylko porcjami (kwantami), przy czym minimalna wartość emitowanej lub absorbowanej energii wyraża się wzorem:

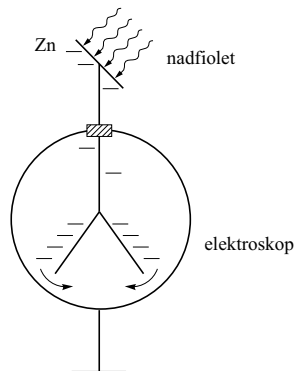
$$\boxed{E_f = h\nu}, \quad (1.1)$$

gdzie  $\nu$  — częstotliwość promieniowania a  $h$  — uniwersalna stała, zwana obecnie stałą Plancka. Jej współcześnie przyjmowana wartość wynosi

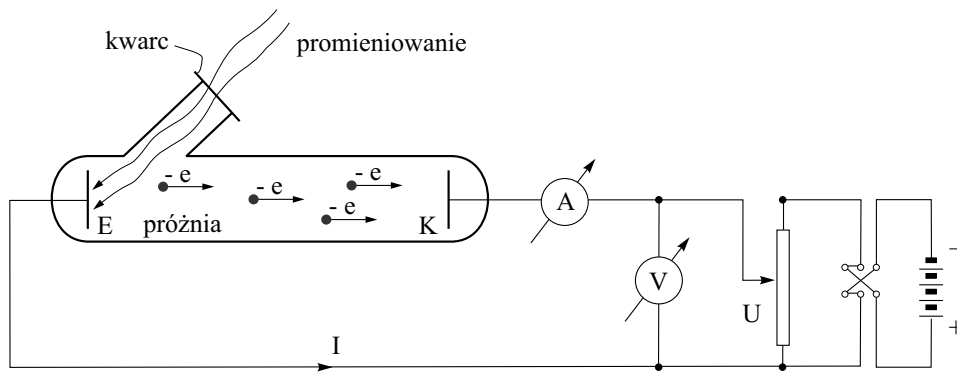
$$h = 6,626196 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}.$$

Wyprowadzony na podstawie tego założenia wzór, określający widmo promieniowania ciała doskonale czarnego, bardzo dobrze opisywał wyniki badań doświadczalnych i umożliwił określenie liczbowej wartości stałej  $h$ .

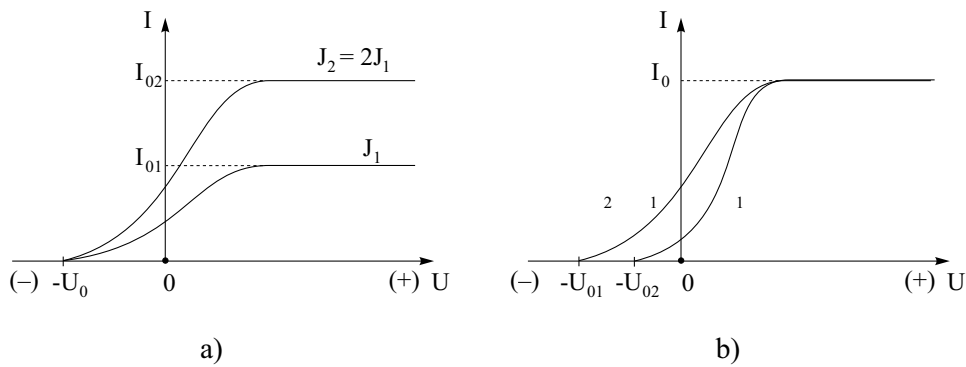
Bardziej bezpośrednim dowodem kwantowej natury promieniowania elektromagnetycznego jest *zjawisko fotoelektryczne*, odkryte przez W. Hallwachsa w 1888 r. Polega ono na wybijaniu elektronów z ciał stałych (głównie metali) pod wpływem padającego promieniowania. Zjawisko fotoelektryczne powoduje np. rozładowanie elektroskopu w przypadku ujemnego ładunku na płytce (rys. 1.1). Światło widzialne nie wywołuje efektu fotoelektrycznego w przypadku cynku, wywołuje go natomiast w przypadku metali alkalicznych, jak sód i potas.



Rysunek 1.1: Demonstracja zjawiska fotoelektrycznego



Rysunek 1.2: Schemat urządzenia do badania zjawiska fotoelektrycznego



Rysunek 1.3: Zależność prądu fotoelektrycznego od napięcia dla (a) różnych wartości natężenia oraz (b) różnych częstotliwości promieniowania

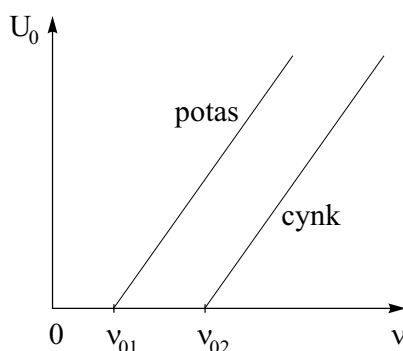
Do ilościowego zbadania zjawiska fotoelektrycznego wygodnie jest posłużyć się urządzeniem pomiarowym przedstawionym na rysunku 1.2. Zależność prądu fotoelektrycznego, płynącego między emiterym (E) i kolektorem (K), od przyłożonego napięcia pokazuje rysunek 1.3 (długość fali i natężenie promieniowania są ustalone). Przebieg tej zależności można wyjaśnić jak następuje. Jeżeli kolektor ma dostatecznie duży *dodatni* potencjał względem emitery, wszystkie elektrony wybijane z emitery docierają do kolektora. Prąd  $I_0$ , zwany prądem nasycenia, jest więc proporcjonalny do liczby emitowanych elektronów w jednostce czasu. Jeżeli z kolei kolektor ma wystarczający *ujemny* potencjał względem emitery, wybijane elektrony zostają zahamowane przez pole elektryczne i nie docierają do kolektora. Ponieważ praca  $W$  potrzebna do przemieszczenia ładunku elektronu  $e$  w polu elektrycznym wyraża się wzorem  $W = eU$  ( $U$  — różnica potencjałów punktów pola, między którymi jest przesuwany ładunek), napięcie  $U_0$ , zwane napięciem odcięcia, jest związane z maksymalną energią kinetyczną  $E_e$  wybijanych fotoelektronów wzorem:

$$E_e = eU_0. \quad (1.2)$$

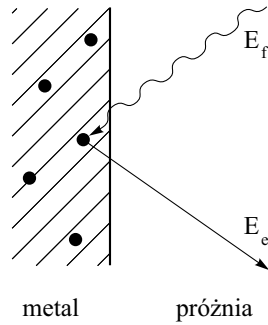
Korzystając z opisanego urządzenia można ustalić następujące prawa, dotyczące zjawiska fotoelektrycznego.

1. Prąd nasycenia  $I_0$  a więc i *liczba elektronów wybijanych w jednostce czasu są wprost proporcjonalne do natężenia promieniowania.*
2. Napięcie odcięcia  $U_0$  a stąd i *maksymalna energia fotoelektronów zależą wyłącznie od częstotliwości  $\nu$  promieniowania.* Poniżej pewnej częstotliwości  $\nu_0$ , charakterystycznej dla danego metalu, efekt fotoelektryczny w ogóle nie zachodzi.

Zależność napięcia  $U_0$  od częstotliwości promieniowania  $\nu$  pokazuje rysunek 1.4. Zależności tej nie można wytłumaczyć na podstawie klasycznej, falowej teorii promieniowania.



Rysunek 1.4: Zależność napięcia odcięcia od częstotliwości promieniowania



Rysunek 1.5: Poglądowy obraz zjawiska fotoelektrycznego

W r. 1905 A. Einstein wyjaśnił zjawisko fotoelektryczne, rozszerzając koncepcję Plancka. Założył on, że światło składa się z kwantów energii — fotonów i że zjawisko fotoelektryczne polega na indywidualnym akcie zderzenia fotonu z elektronem w metalu (rys. 1.5). Jeżeli przyjąć za Einsteinem, że liczba fotonów w jednostce objętości jest wprost proporcjonalna do natężenia światła, można łatwo wyjaśnić zależność liczby wybijanych elektronów od natężenia oświetlenia (liczba fotoelektronów powinna być proporcjonalna do liczby padających fotonów). Dla wyjaśnienia zależności energii fotoelektronów od częstości światła wystarczy natomiast ułożyć bilans energii dla efektu fotoelektrycznego. Do wyrwania elektronu z metalu potrzebne jest wykonanie określonej pracy  $W$ , zwanej pracą wyjścia. Można zatem napisać:

$$\boxed{E_f = W + E_e}, \quad (1.3)$$

gdzie  $E_f$  jest energią fotonu, daną wzorem (1.1) a  $E_e$  energią kinetyczną fotoelektronu. Korzystając ze wzoru (1.1) otrzymujemy:

$$h\nu = W + E_e. \quad (1.4)$$

Widać, że minimalna częstotliwość promieniowania  $\nu_0$  odpowiada energii fotonu równej pracy wyjścia elektronu z danego metalu (w ostatnim wzorze kładziemy  $\nu = \nu_0$  i  $E_e = 0$ ):

$$W = h\nu_0. \quad (1.5)$$

Wzór ten pozwala określić pracę wyjścia elektronu z danego metalu. Korzystając ze wzorów (1.2), (1.4) i (1.5) otrzymujemy:

$$h\nu = h\nu_0 + eU_0, \quad (1.6)$$

skąd

$$\boxed{U_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_0), \quad \nu > \nu_0}. \quad (1.7)$$

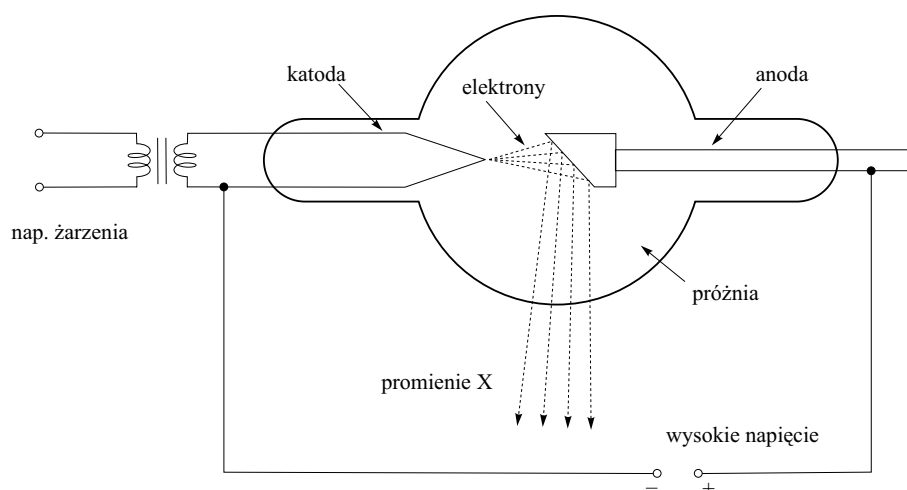
Ostatni wzór jest zgodny z liniową zależnością  $U_0$  od  $\nu$ , przedstawioną na rysunku 1.4. Nachylenie prostej wyraża się przy tym wzorem  $h/e$ , co pozwala niezależnie wyznaczyć wartość stałej Plancka.

## 1.2 Promienie Roentgena

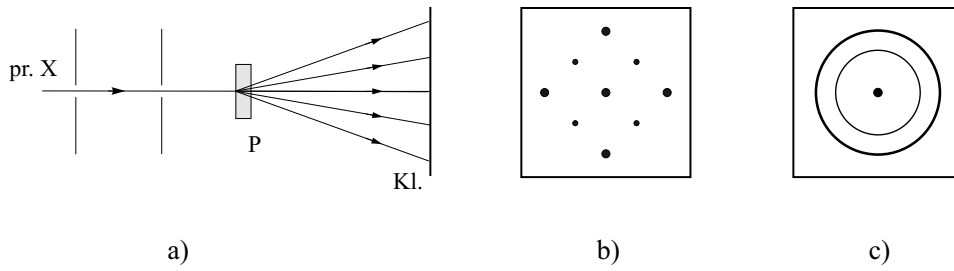
W r. 1895 W. Roentgen odkrył nieznanego dotąd rodzaj promieniowania, nazwany przez niego *promieniami X* (obecnie — również *promieniami Roentgena*). Roentgen zauważył, że ekran pokryty platynocyjankiem baru fluoreskuje (świeci), gdy znajduje się w pobliżu rury próżniowej, w której zachodzi wyładowanie elektryczne. Fluorescencja występowała nawet wówczas, gdy rura do wyładowań była owinięta czarnym papierem. Roentgen stwierdził, że promienie *X* powstawały w miejscu uderzenia promieni katodowych (wiązki elektronów) o szklaną ściankę rury do wyładowań. Wiadomo obecnie, że promienie Roentgena powstają wówczas, gdy wiązka elektronów, lub innych naładowanych cząstek, zostaje zahamowana w określonej substancji. Schemat współczesnej lampy rentgenowskiej jest pokazany na rysunku 1.6.

Roentgen stwierdził, że promienie *X* mają następujące własności:

1. zaczerniają kliszę fotograficzną,
2. powodują fluorescencję niektórych substancji,
3. jonizują powietrze,
4. mają dużą przenikliwość,
5. nie ulegają odchyleniu w polu elektrycznym lub magnetycznym.



Rysunek 1.6: Budowa lampy rentgenowskiej



Rysunek 1.7: Dyfrakcja promieni X: (a) schemat doświadczenia (P — próbka, Kl — klisza fotograficzna), (b) obraz dyfrakcyjny w przypadku pojedynczego kryształu, (c) obraz dyfrakcyjny w przypadku substancji polikrystalicznej

Ta ostatnia cecha dowodzi, że promienie X nie są strumieniem naładowanych cząstek.

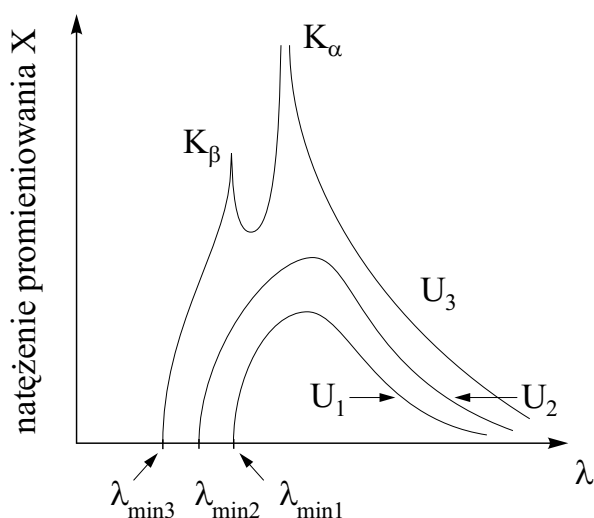
Natura promieni X była przez kilka lat nieznana. Pierwsze próby wykazania ich falowego charakteru, tj. występowania zjawisk dyfrakcji i interferencji po przejściu promieni X przez cienkie szczeliny, zakończyły się niepowodzeniem. W r. 1912 Max von Laue doszedł do wniosku, że przyczyną niepowodzenia mogły być zbyt duże rozmiary szczeliny w porównaniu z długością fali promieni X (muszą być one tego samego rzędu). Zasugerował on, że naturalną siatką dyfrakcyjną dla promieni Roentgena mogą stanowić kryształy, w których odległości między sąsiednimi, regularnie ułożonymi atomami są rzędu  $10^{-10}$  m. Podjęte pod jego kierunkiem doświadczenia z kryształem chlorku sodu, NaCl, zakończyły się sukcesem (rys. 1.7). Badania te były kontynuowane w nieco innej formie przez W.H. Bragga i L. Bragga.

Omówione doświadczenia pozwoliły stwierdzić, że promienie X są falami elektromagnetycznymi o długości fali rzędu  $10^{-8}$  m -  $10^{-12}$  m. Dawały one jednocześnie informacje o strukturze kryształów. W przypadku dyfrakcji promieni X na kryształach o znanej budowie można określić rozkład natężenia promieniowania X w funkcji długości fali, zwany *widmem promieniowania rentgenowskiego* (rysunek 1.8).

Jedną z cech widma rentgenowskiego jest występowanie bardzo ostrej krótkofalowej granicy promieniowania  $\lambda_{min}$ , poniżej której natężenie promieni X jest równe zero. W. Duane i F.L. Hunt stwierdzili doświadczalnie, że zachodzi zależność

$$\lambda_{min}U = const \quad (1.8)$$

( $U$  — napięcie na lampie rentgenowskiej). Wyjaśnienie tej prawidłowości daje kwantowa teoria promieniowania. Podczas hamowania elektronu w ośrodku materialnym jego energia zostaje częściowo wyemitowana w postaci fotonów. Maksymalna energia fotonu odpowiada sytuacji, gdy cała energia



Rysunek 1.8: Widmo promieniowania rentgenowskiego

zahamowanego elektronu zostaje wypromieniowana w postaci pojedynczego fotonu. Zachodzi wówczas związek

$$E_e = E_{fmax} \tag{1.9}$$

( $E_e$  — energia elektronu,  $E_{fmax}$  — maksymalna energia fotonu). Korzystając ze wzorów:

$$E_e = eU, \tag{1.10}$$

$$E_{fmax} = h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} \tag{1.11}$$

( $c$  — prędkość światła), otrzymujemy wzór:

$$eU = \frac{hc}{\lambda_{min}}, \tag{1.12}$$

skąd:

$$\boxed{\lambda_{min}U = \frac{hc}{e}}. \tag{1.13}$$

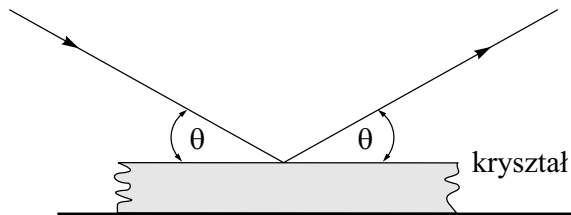
Ostatni wzór ma postać zgodną z prawem Duane'a - Hunta i pozwala wyznaczyć wartość stałej Plancka.

Inną cechą widma promieniowania  $X$  jest pojawienie się przy wyższych napięciach ostrych maksimów natężenia promieniowania, zwanych widmem charakterystycznym promieni  $X$ . Położenie tych maksimów zależy od materiału anody. Dobierając odpowiednio materiał anody i przyłożone napięcie można uzyskać niemal monochromatyczną (o jednej długości fali) wiązkę promieni  $X$ .

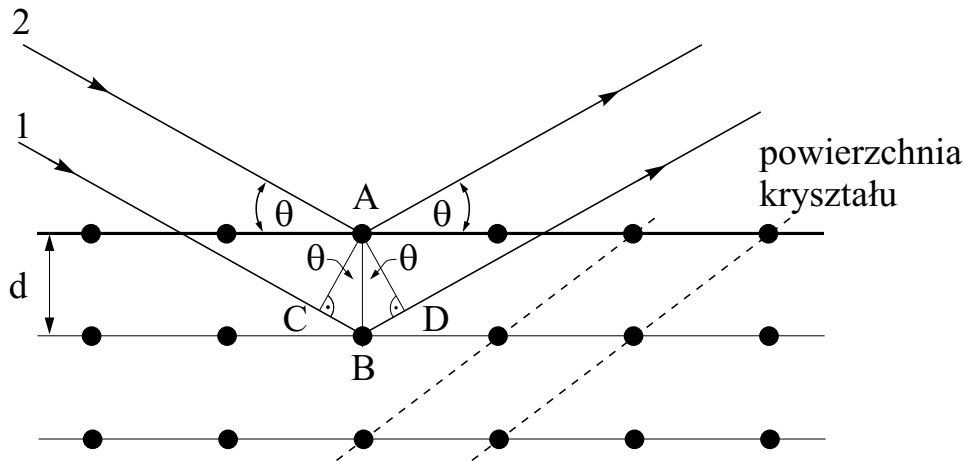
### 1.3 Dyfrakcja promieni Roentgena. Wzór Bragga

W swoich badaniach W. i L. Braggowie stwierdzili zjawisko tzw. selektywnego odbicia promieni  $X$  od kryształów. Jeżeli na powierzchnię kryształu pada pod niewielkim kątem  $\Theta$  wąska wiązka promieni  $X$ , dla określonych wartości tego kąta zachodzi „odbicie” wiązki pod kątem  $\Theta$  (rysunek 1.9). W rzeczywistości zachodzi tu zjawisko dyfrakcji i interferencji promieni  $X$ , rozproszonych na poszczególnych atomach kryształu.

Wyprowadzimy obecnie tzw. *wzór Bragga*, określający kąt padania promieni  $X$  na kryształ, przy którym występuje maksimum natężenia rozproszonego promieniowania. (rysunek 1.10). Promienie  $X$  wchodzą w głąb kryształu praktycznie bez załamania i ulegają rozproszeniu na atomach sieci krystalicznej. Jeżeli długość fali promieniowania jest porównywalna z odległością między najbliższymi atomami, interferencja fal rozproszonych na poszczególnych atomach powoduje wytworzenie wiązek promieniowania, rozchodzących się w określonych kierunkach, różnych od kierunku padania.



Rysunek 1.9: Selektywne odbicie promieni  $X$  od kryształu



Rysunek 1.10: Odbicie wiązki promieni  $X$  od poszczególnych płaszczyzn kryształu

Kąty, dla których zachodzi wzmocnienie rozproszonych promieni, można znaleźć na podstawie rysunku 1.10. Różnica dróg promieni I i II wynosi:

$$\Delta s = CB + BD. \quad (1.14)$$

Ponieważ, zgodnie z rysunkiem

$$CB = BD = d \sin \Theta, \quad (1.15)$$

( $d$  — odległość najbliższych płaszczyzn, w których są ułożone atomy, równoległych do powierzchni kryształu) więc:

$$\Delta s = 2d \sin \Theta. \quad (1.16)$$

Wzmocnienie rozproszonych promieni I i II będzie zachodzić, gdy ich różnica dróg będzie równa wielokrotności długości fali  $\lambda$  promieniowania

$$\Delta s = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.17)$$

Otrzymujemy stąd *wzór Bragga*:

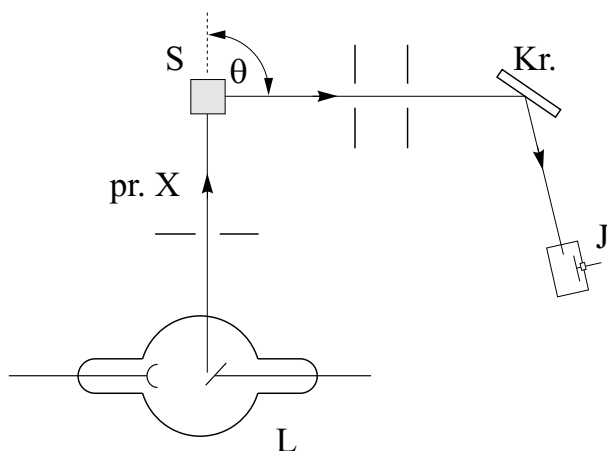
$$\boxed{2d \sin \Theta = n\lambda}, \quad (1.18)$$

gdzie liczba  $n$  określa rząd widma. Z rysunku widać, że w kryształach istnieje nieskończenie wiele płaszczyzn (np. zaznaczone liniami przerywanymi), dla których promienie padające na kryształ mogą ulec w wyniku interferencji wzmocnieniu. Na ogół jednak wiązka odbita od płaszczyzn zawierających najwięcej atomów będzie miała największe natężenie. Znajac odległość  $d$  między płaszczyznami można na podstawie wzoru Bragga wyliczyć długość  $\lambda$  fali promieniowania  $X$  i na odwrót — znając długość fali  $\lambda$  można obliczyć odległość  $d$ . Współcześnie dyfrakcja promieni  $X$  jest szeroko stosowana w badaniach struktury ciał stałych.

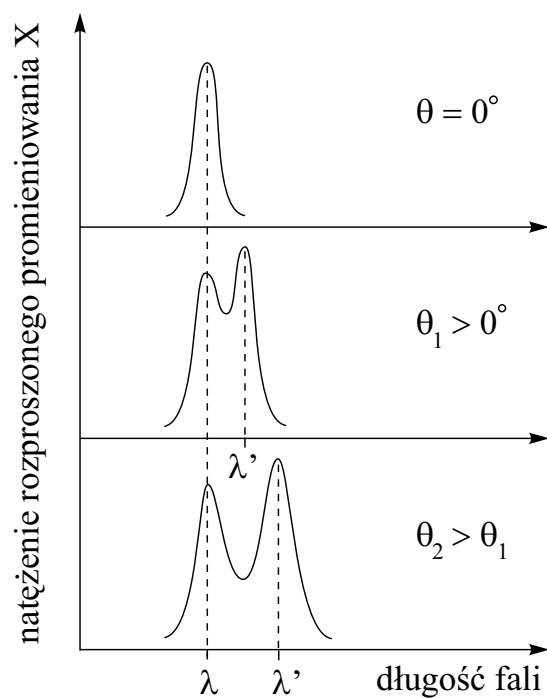
## 1.4 Zjawisko Comptona

Badacze zajmujący się rozpraszaniem promieniowania  $X$  przez substancje materialne zauważyli stosunkowo wcześniej, że w widmie rozproszonego promieniowania występuje, oprócz promieniowania o nie zmienionej długości fali, również promieniowanie o większej długości fali, które jest silniej pochłaniane przez inne substancje. W latach 1922 - 23 A.H. Compton przeprowadził szczegółowe pomiary długości fal rozproszonego promieniowania, wykorzystując w tym celu selektywne odbicie promieni  $X$  od kryształu. Schemat doświadczenia Comptona i rozkłady natężeń rozproszonego promieniowania ilustrują rysunki 1.11 - 1.12.

Długość fali rozproszonego promieniowania  $\lambda'$  jest większa od długości fali padającego promieniowania  $\lambda$ , rośnie ze wzrostem kąta rozproszenia  $\Theta$



Rysunek 1.11: Schemat doświadczenia Comptona. L – lampa rentgenowska, S – substancja rozpraszająca złożona z lekkich pierwiastków (parafina, grafit, glin), Kr – kryształ dający selektywne odbicie wiązki, J – komora jonizacyjna,  $\Theta$  – kąt rozproszenia wiązki promieni X



Rysunek 1.12: Zależność widm rozproszonego promieniowania X od kąta rozproszenia

i nie zależy od rodzaju ośrodka rozpraszającego. Dla wyjaśnienia tego zjawiska Compton (oraz prawie równocześnie P. Debye) wysunął hipotezę, że fotony mają, oprócz określonej energii  $E_f$ , również określony pęd  $\vec{p}_f$  oraz, że proces rozproszenia promieni  $X$  polega na elastycznym zderzeniu fotonu z elektronem, w którym spełnione są prawa zachowania energii i pędu. Z uwagi na dużą energię fotonu promieniowania rentgenowskiego w porównaniu z energią wiązania elektronu w atomie można przy tym przyjąć, że rozpraszanie fotonu zachodzi na elektronie swobodnym. Ponieważ część energii  $E_f = hc/\lambda$  padającego fotonu jest przekazywana elektronowi, więc energia  $E'_f = hc/\lambda'$  rozproszonego fotonu jest mniejsza od energii pierwotnego fotonu,  $E'_f < E_f$ , skąd wynika, że  $\lambda' > \lambda$ .

Zgodnie ze szczególną teorią względności, między pędem i energią fotonu powinien zachodzić związek

$$p_f = \frac{E_f}{c}. \quad (1.19)$$

Ponieważ energia fotonu wyraża się wzorem

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad (1.20)$$

więc

$$p_f = \frac{h\nu}{c} \quad (1.21)$$

lub

$$\boxed{p_f = \frac{h}{\lambda}}. \quad (1.22)$$

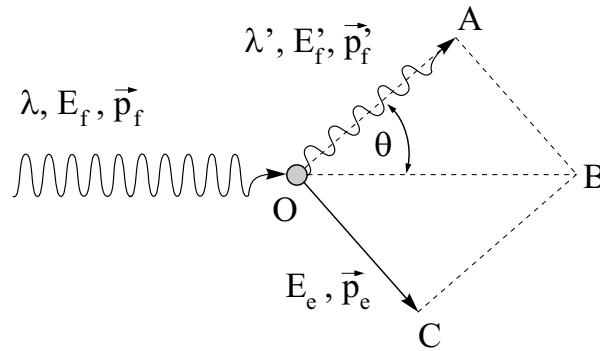
Proces rozpraszania Comptona jest przedstawiony schematycznie na rysunku 1.13. Stosując do tego procesu zasady zachowania energii i pędu można napisać:

$$E_f = E'_f + E_e, \quad (1.23)$$

$$\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}_e \quad (1.24)$$

( $E_e$  i  $\vec{p}_e$  — energia kinetyczna i pęd rozproszonego elektronu). Ponieważ rozproszony elektron uzyskuje prędkość zbliżoną do prędkości światła, w powyższych wyrażeniach należy korzystać ze wzorów szczególnej teorii względności, określających energię i pęd elektronu. Końcowy wzór, określający zmianę długości fali fotonu przy rozproszeniu Comptona, ma postać

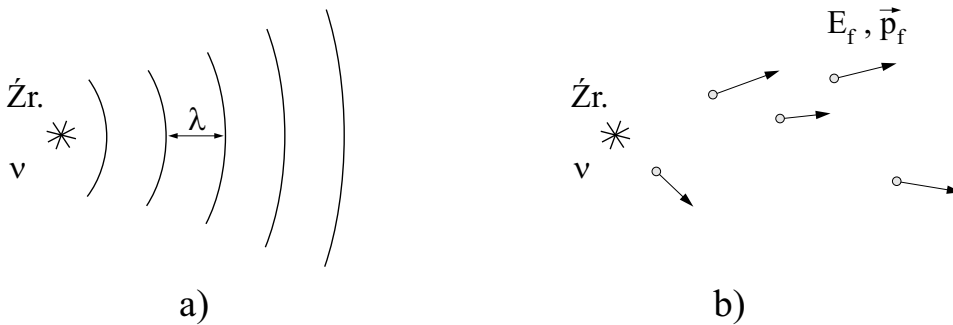
$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \Theta)}, \quad (1.25)$$



Rysunek 1.13: Rozproszenie fotonu w zjawisku Comptona

gdzie  $m$  jest masą elektronu. Przytoczony wzór bardzo dobrze zgadza się z obserwowanymi zmianami długości fali promieniowania  $X$  przy rozpraszaniu komptonowskim.

Omówione w tym rozdziale zjawiska dowodzą przekonująco kwantowej (korpuskularnej) natury promieniowania elektromagnetycznego, w szczególności światła. Z drugiej strony takie zjawiska jak dyfrakcja i interferencja promieniowania elektromagnetycznego (światła) świadczą o jego falowej naturze. Uważa się współcześnie, że te dwa aspekty natury światła — korpuskularny i falowy — nie wykluczają się wzajemnie, lecz się uzupełniają. Światło (ogólniej — promieniowanie elektromagnetyczne) posiada więc dwoistą, korpuskularno — falową naturę (rys. 1.14).



Rysunek 1.14: Obraz falowy (a) i obraz korpuskularny (b) promieniowania elektromagnetycznego

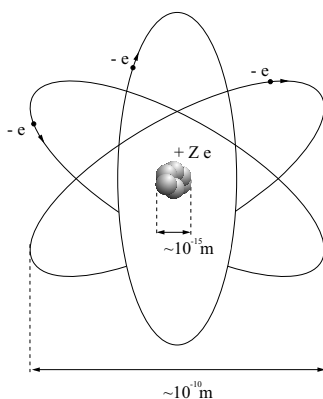
## Rozdział 2

# Mechanika kwantowa

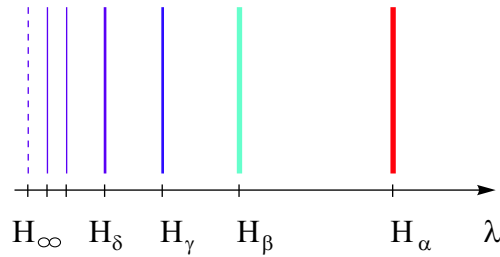
### 2.1 Widmo atomu wodoru. Model Bohra atomu wodoru

Na przełomie XIX i XX wieku stwierdzono, że wiele zjawisk z zakresu fizyki atomowej wskazuje, że *energia mikroskopowych układów fizycznych, np. atomów i cząsteczek jest skwantowana — może przybierać tylko ściśle określone, nieciągłe wartości.* Jednym z takich zjawisk jest emisja i absorpcja promieniowania elektromagnetycznego przez atomy i cząsteczki.

Prowadzone w tym okresie przez wielu fizyków, m. in. przez E. Rutherforda, badania doprowadziły do ustalenia budowy atomów i cząsteczek. Każdy niezjonizowany atom składa się z bardzo małego jądra (o rozmiarach rzędu  $10^{-15}$  m), mającego ładunek  $+Ze$ , gdzie  $e$  jest ładunkiem elementarnym. Wokół jądra atomu, w obszarze o rozmiarach rzędu  $10^{-10}$  m, porusza się  $Z$  elektronów, każdy o ładunku  $-e$ , tworząc obojętny elektrycznie atom (rys. 2.1). Masa jądra atomowego jest znacznie większa (w przypadku atomu wo-



Rysunek 2.1: Model atomu Rutherforda



Rysunek 2.2: Seria Balmera atomu wodoru.  $H_\alpha$  – czerwona,  $H_\beta$  – niebieska,  $H_\gamma$ ,  $H_\delta$  – fioletowe,  $H_\infty$  – graniczna długość fali

doru ok. 2000 razy) od masy elektronu i praktycznie cała masa atomu jest skupiona w jego jądrze. Liczba  $Z$ , nazywana *liczbą atomową*, jest równa liczbie porządkowej pierwiastka w układzie okresowym Mendelejewa. Najprostszą budowę posiada atom wodoru o liczbie atomowej  $Z = 1$ . Składa się on z jądra (protonu) o ładunku  $+e$ , dookoła którego porusza się pojedynczy elektron.

Widma promieniowania pierwiastków w postaci gazów i par, pobudzonych do świecenia np. za pomocą wyładowania elektrycznego, są złożone z jasnych, ostrych linii, odpowiadających ściśle określonym długościom fal (tzw. *widmo emisyjne*). Jeżeli światło o widmie ciągłym, np. światło żarówki, przechodzi przez gaz lub parę, na jasnym tle widoczne są ciemne linie (tzw. *widmo absorpcyjne*), których długości fal dokładnie odpowiadają długościom fal widma emisyjnego danego pierwiastka.

Ze względu na prostą budowę atomu wodoru jego widmo emisyjne (absorpcyjne) posiada najprostszą strukturę. Linie widmowe wodoru układają się w określone *serie*, z których jedna, zwana serią Balmera (rys. 2.2), leży częściowo w zakresie widzialnym ( $\lambda = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m} - 8 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ ). Długości fal, odpowiadających wszystkim seriom, mogą być opisane empirycznym wzorem, podanym po raz pierwszy w szczególnym przypadku przez J. Balmera w 1885 r.:

$$\boxed{\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)}, \quad n' > n, \quad (2.1)$$

gdzie  $n, n'$  — liczby naturalne,  $R$  — stała, zwana stałą Rydberga o wartości liczbowej

$$R = 1,0967758 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}.$$

Nazwy serii widmowych, odpowiadających kilku pierwszym wartościom liczby  $n$ , podaje tabela 2.1.

Zaproponowany przez Rutherforda model atomu (rys. 2.1) nie dawał poprawnego opisu widm atomowych, w szczególności widma atomu wodoru.

$n$	$n'$	seria	zakres
1	2, 3, 4, ...	Lymana	nadfiolet
2	3, 4, 5, ...	Balmera	św. widzialne
3	4, 5, 6, ...	Paschena	podczerwień
4	5, 6, 7, ...	Bracketta	podczerwień
...	...	...	...

Tabela 2.1: Serie widmowe wodoru.

Zgodnie z klasyczną elektrodynamiką, elektron poruszający się wokół jądra z określonym przyspieszeniem dośrodkowym powinien wypromieniowywać w sposób ciągły falę elektromagnetyczną o częstości równej jego częstości obiegu, aż do upadku elektronu na jądro. Atomy powinny być zatem niestabilne a ich widmo promieniowania — widmem ciągłym, w sprzeczności z doświadczeniem.

Pierwszą próbę usunięcia wad modelu Rutherforda i zbudowania kwantowej teorii atomu wodoru podjął Niels Bohr w 1913 r. Teoria Bohra opierała się na dwóch postulatach, sprzecznych z klasyczną mechaniką i elektrodynamiką:

1. Elektron w atomie może krążyć tylko po takich orbitach kołowych (rys. 2.3), na których jego moment pędu  $L_n$  wynosi:

$$L_n = mv_n r_n = nh/2\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.2)$$

gdzie  $m$  — masa elektronu,  $r_n$  i  $v_n$  — promień  $n$ -tej dozwolonej orbity i prędkość elektronu na tej orbicie,  $h$  — stała Plancka. Elektron znajdujący się na dozwolonej orbicie nie promieniuje energii.

2. Przy przejściu elektronu z jednej orbity na inną zostaje wyemitowany lub zaabsorbowany kwant promieniowania — foton o energii:

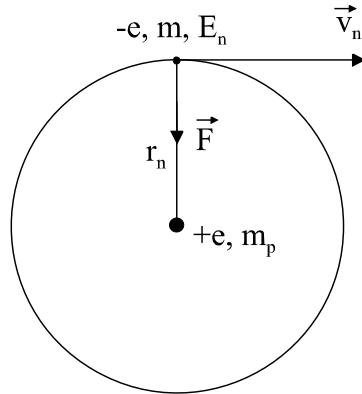
$$E_f = E_{n'} - E_n, \quad (2.3)$$

gdzie  $E_{n'}$  i  $E_n$  — całkowita energia elektronu na orbitach o numerach  $n'$  i  $n$ . Postulat ten wynika z zasady zachowania energii.

Biorąc pod uwagę, że siła i energia potencjalna elektrostatycznego oddziaływania elektronu z jądrem wyrażają się wzorami:

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2.4)$$

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.5)$$



Rysunek 2.3: Jedna z dozwolonych orbit elektronu w modelu Bohra

( $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$  — przenikalność elektryczna próżni,  $r$  — promień orbity), z pierwszego postulatu Bohra można obliczyć promienie  $r_n$  dozwolonych orbit i odpowiadające im energie  $E_n$  elektronu. Ponieważ masa elektronu  $m$  jest znacznie mniejsza od masy protonu  $m_p$ ,  $m \ll m_p$ , jądro atomu można uważać za nieruchome. Przystawiając siłę  $F$  przyciągania elektrostatycznego elektronu przez jądro do siły dośrodkowej

$$F_d = \frac{mv^2}{r}, \quad (2.6)$$

otrzymujemy:

$$F = F_d, \quad (2.7)$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{mv^2}{r}, \quad (2.8)$$

czyli:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mv^2. \quad (2.9)$$

Z pierwszego postulatu Bohra wynika zależność:

$$v = \frac{nh}{2\pi mr}. \quad (2.10)$$

Podstawiając to wyrażenie do wzoru (2.9) znajdujemy:

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^2}, \quad (2.11)$$

skąd wynika wzór, określający promienie dozwolonych orbit:

$$\boxed{r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi m e^2}}. \quad (2.12)$$

Podstawiając ostatnie wyrażenie do wzoru (2.10) dostajemy wzór, określający prędkości elektronu na dozwolonych orbitach,

$$v_n = \frac{nh}{2\pi m} \cdot \frac{\pi m e^2}{\varepsilon_0 h^2 n^2}, \quad (2.13)$$

czyli

$$\boxed{v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h n}}. \quad (2.14)$$

Promień pierwszej orbity elektronu wynosi  $r_1 = 5,3 \cdot 10^{-11}$  m a jego prędkość na tej orbicie  $v_1 = 2,2 \cdot 10^6$  m/s. Całkowita energia  $E$  elektronu w atomie jest równa sumie jego energii kinetycznej  $E_k$  i potencjalnej  $U$ . Uwzględniając wzory (2.5) i (2.9) otrzymujemy:

$$E = E_k + U = \frac{mv^2}{2} - e^2 4\pi\varepsilon_0 r = \frac{e^2}{2 \cdot 4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \quad (2.15)$$

(znak „-” wskazuje, że elektron jest związany w atomie). Korzystając teraz ze wzoru (2.12) otrzymujemy wzór, określający dozwolone wartości energii elektronu:

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\pi m e^2}{\varepsilon_0 h^2 n^2}, \quad (2.16)$$

$$\boxed{E_n = -\frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}}. \quad (2.17)$$

Liczbowa wartość energii elektronu na pierwszej orbicie wynosi  $E_1 = -13,6$  eV ( $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}$  J). Jest ona, co do wartości bezwzględnej, równa energii jonizacji atomu wodoru (energii potrzebnej do odłączenia elektronu od atomu) w stanie niewzbudzonym ( $n = 1$ ).

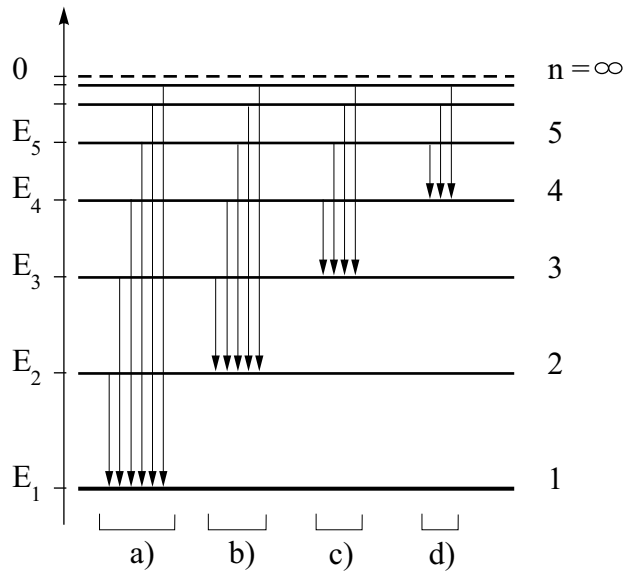
Na podstawie drugiego postulatu Bohra można teraz, uwzględniając wzór wyrażający energię fotonu:

$$E_f = \frac{hc}{\lambda}, \quad (2.18)$$

otrzymać wzór, określający długości fal, emitowanych lub absorbowanych przy przejściu elektronu między dozwolonymi orbitami. Podstawiając dwa ostatnie wyrażenia do wzoru (2.3) znajdujemy:

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), \quad (2.19)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right). \quad (2.20)$$



Rysunek 2.4: Przejścia kwantowe elektronu w atomie wodoru, odpowiadające następującym seriom w widmie emisyjnym: (a) — seria Lymana, (b) — seria Balmera, (c) — seria Paschena, (d) — seria Bracketta

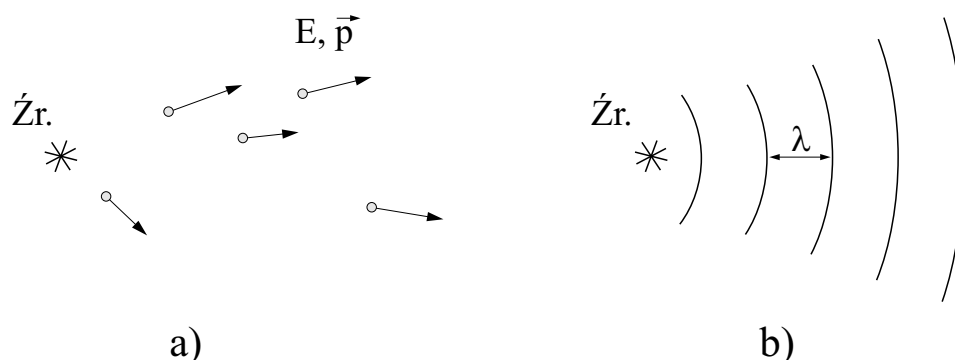
Otrzymany wzór ma identyczną postać z doświadczalnym wzorem (2.1). Stała Rydberga wyraża się zatem wzorem:

$$R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}. \quad (2.21)$$

Można sprawdzić, że po podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych poszczególnych stałych otrzymuje się istotnie poprawną wartość stałej Rydberga. Schemat przejść elektronowych dla czterech serii widmowych wodoru pokazuje rysunek 2.4 (na rysunku nie została zachowana skala odległości).

## 2.2 Fale de Broglie'a. Dyfrakcja fal materii

Teoria Bohra, mimo swoich sukcesów, miała również pewne wady. Opierała się ona na dowolnych założeniach i miała ograniczony zakres stosowności. W szczególności nie dawała ona poprawnego opisu widm atomów, zawierających więcej niż jeden elektron. Konsekwentny opis wszystkich zjawisk atomowych a także większości zjawisk z zakresu fizyki ciała stałego i fizyki jądowej daje dopiero *mechanika kwantowa*. Podstawy mechaniki kwantowej opracowali w latach 1925-26 niezależnie od siebie W. Heisenberg, E. Schrödinger i P.A.M. Dirac. Istotnym krokiem na drodze do odkrycia mechaniki kwantowej okazała się *hipoteza de Broglie'a*.



Rysunek 2.5: Obraz korpuskularny (a) i obraz falowy (b) materii

W r. 1924 Louis de Broglie wysunął przypuszczenie, że dwoistą, korpuskularno — falową naturę, ma nie tylko promieniowanie elektromagnetyczne, ale również poruszające się cząstki materialne (rys. 2.5). Długość i częstotliwość fal materii są wg. de Broglie'a, przez analogię do wzorów określających pęd i energię fotonów (wzory (1.1) i (1.21)), dane zależnościami:

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}}, \quad (2.22)$$

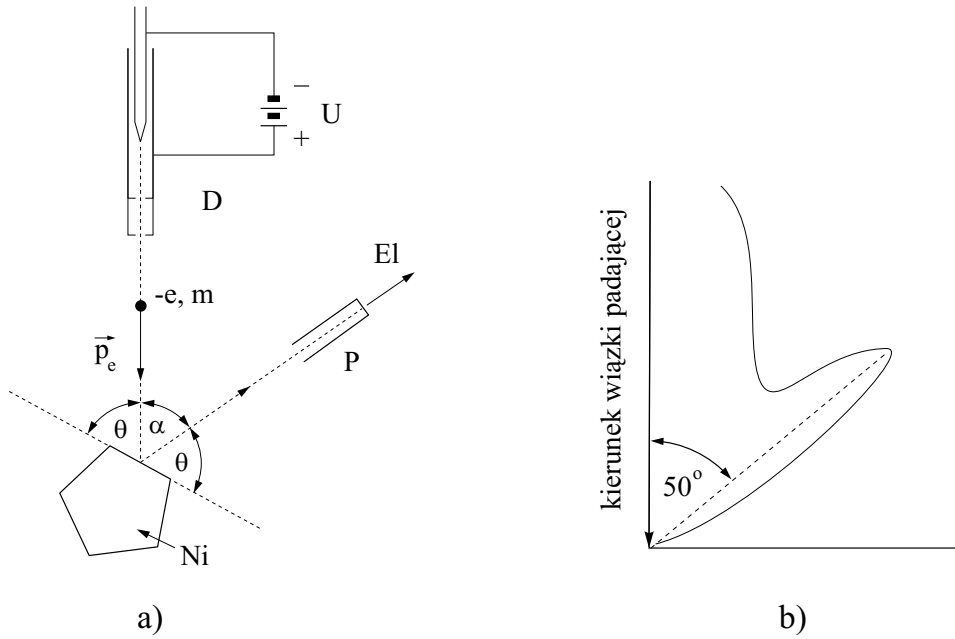
$$\boxed{\nu = \frac{E}{h}} \quad (2.23)$$

( $h$  — stała Plancka,  $p$  i  $E$  — pęd i energia cząstki).

Hipoteza de Broglie'a została, w przypadku elektronów, potwierdzona w 1927 roku przez C.J. Davissona i L.H. Germera, którzy zarejestrowali dyfrakcję fal de Broglie'a elektronów na kryształach niklu. Schemat ich doświadczenia pokazuje rysunek 2.6a. Dla określonych wartości napięcia  $U$  przyspieszającego elektrony Davisson i Germer zaobserwowali w pewnych kierunkach wyraźne maksima w ilości rozproszonych elektronów (dla wartości  $U = 54$  V maksimum takie występuje dla kąta  $\alpha = 50^\circ$ , rys. 2.6b).

Interpretując to zjawisko jako dyfrakcję fal elektronów na sieci krystalicznej i korzystając ze wzoru Bragga (wzór (1.18)) można znaleźć ich długość (odległość  $d = 9,1 \cdot 10^{-11}$  m płaszczyzn atomowych kryształu niklu, na których zachodzi w tym przypadku dyfrakcja, była znana wcześniej z badań rentgenograficznych). Związek między kątem rozproszenia  $\alpha$  i kątem selektywnego odbicia  $\Theta$  we wzorze Bragga łatwo jest znaleźć z rysunku 2.6a. Widać, że  $2\Theta + \alpha = \pi$ , skąd  $\Theta = \pi/2 - \alpha/2$ , czyli, dla wartości  $\alpha = 50^\circ$ ,  $\Theta = 65^\circ$ . Zgodnie ze wzorem Bragga

$$n\lambda = 2d \sin \Theta \quad (2.24)$$



Rysunek 2.6: Doświadczenie Davissona i Germera (a). D – działo elektronowe, Ni – kryształ niklu, P – puszka Faraday’a, El – elektrometr. Natężenie rozproszonej wiązki elektronów w funkcji kąta rozproszenia (b)

dla  $n = 1$  otrzymujemy

$$\lambda = 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot \sin 65^\circ,$$

$$\lambda = 1,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}. \quad (2.25)$$

Z drugiej strony, znając wartość napięcia przyspieszającego elektrony, można obliczyć długość związanych z nimi fal de Broglie’a. Ponieważ energię kinetyczną elektronu (w przybliżeniu nierelatywistycznym) można wyrazić wzorami:

$$E_e = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.26)$$

$$E_e = eU \quad (2.27)$$

( $m$  — masa elektronu), pęd elektronu i długość jego fali de Broglie’a są równe:

$$\frac{p^2}{2m} = eU, \quad (2.28)$$

$$p = \sqrt{2meU}, \quad (2.29)$$

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (2.30)$$

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}}. \quad (2.31)$$

Dla wartości  $U = 54 \text{ V}$  otrzymujemy (ładunek elektronu  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , masa elektronu  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ ):

$$\lambda = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 54 \text{ V}}}, \quad (2.32)$$

$$\lambda = 1,66 \cdot 10^{-10} \text{ m}. \quad (2.33)$$

Z porównania obu wyników widać, że zachodzi dobra zgodność rezultatów doświadczalnych z przewidywaniami hipotezy de Broglie'a. Podobne doświadczenia były przeprowadzone przez G.P. Thomsona (1928 r.) dla elektronów oraz przez I. Estermana i O. Sterna (1930 r.) dla cząsteczek wodoru i helu. Później zaobserwowano dyfrakcję fal de Broglie'a elektronów przechodzących przez bardzo małe otworki i szczeliny. Współcześnie do badania struktury ciał stałych szeroko stosuje się, oprócz dyfrakcji promieni  $X$ , również dyfrakcję fal de Broglie'a neutronów i elektronów.

Omówione doświadczenia wskazują, że wszystkie poruszające się cząstki, mające skończoną masę spoczynkową, wykazują własności falowe. Powstaje pytanie, dlaczego nie obserwuje się własności falowych ciał makroskopowych, np. lecącego pocisku? Odpowiedź wynika ze wzoru de Broglie'a. Długość tych fal jest tak mała, że nie mogą być one wykryte w żadnym doświadczeniu dyfrakcyjnym. Np. dla pocisku o masie  $m = 10^{-2} \text{ kg}$  i prędkości  $v = 10^2 \text{ m/s}$  otrzymujemy:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{10^{-2} \text{ kg} \cdot 10^2 \text{ m/s}}, \quad (2.34)$$

$$\lambda = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ m}. \quad (2.35)$$

Obliczona długość fali de Broglie'a jest niezmiernie mała w porównaniu z odległościami spotykanymi w codziennym życiu.

Należy jeszcze rozpatrzyć fizyczną naturę fal de Broglie'a. Fale te *nie są* falami elektromagnetycznymi ani żadnymi innymi falami, znanymi w fizyce klasycznej. Ich fizyczny sens polega na tym, że *prawdopodobieństwo znalezienia się cząstki w danym obszarze przestrzeni jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali de Broglie'a w tym obszarze*. Np. w doświadczeniu Davissona i Germera kierunki, w których jest rozproszonych najwięcej elektronów, są kierunkami, w których kwadrat amplitudy fali de Broglie'a ma największą wartość. Interpretacja ta jest podobna do omówionej w poprzednim rozdziale zależności między natężeniem promieniowania (kwadratem amplitudy fali

elektromagnetycznej) a liczbą fotonów, znajdujących się w niewielkim obszarze przestrzeni. Ponieważ fale de Broglie'a określają prawdopodobieństwo znalezienia się cząstki w danym obszarze przestrzeni, nazywa się je niekiedy „falami prawdopodobieństwa”.

### 2.3 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

W mechanice klasycznej zarówno położenie jak i prędkość lub pęd cząstki mogą być określone, przynajmniej teoretycznie, z dowolnie dużą dokładnością. W istocie, pod pojęciem cząstki rozumiemy obiekt, zlokalizowany w określonym, niewielkim obszarze przestrzeni i posiadający określoną prędkość lub pęd.

W r. 1926 W. Heisenberg, opierając się na formalizmie mechaniki kwantowej, wykazał, że istnieje ograniczenie dokładności, z jaką można określić *jednocześnie* położenie i pęd cząstki materialnej, wynikające z jej falowej natury. Matematyczne sformułowanie tego ograniczenia daje wyprowadzona przez Heisenberga nierówność, zwana *zasadą nieoznaczoności*. Przytoczymy teraz uproszczone rozważania, prowadzące do tej zasady.

Przypomnimy najpierw krótko opis fal w fizyce klasycznej. Rozchodzącą się w sprężystym ośrodku płaską falę monochromatyczną (o określonej częstotliwości drgań i długości) można opisać równaniem (rys. 2.7a)

$$y(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi), \quad (2.36)$$

gdzie:  $y(x, t)$  — wychylenie cząsteczki ośrodka z położenia równowagi,  $A$  — amplituda fali,  $\omega$  — kołowa (kątowna) częstotliwość drgań,  $k$  — wektor falowy,  $\varphi$  — faza początkowa. Znak „ $-$ ” („ $+$ ”) odpowiada rozchodzeniu się fali w dodatnim (ujemnym) kierunku osi  $x$ -ów. Zachodzą przy tym związki:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (2.37)$$

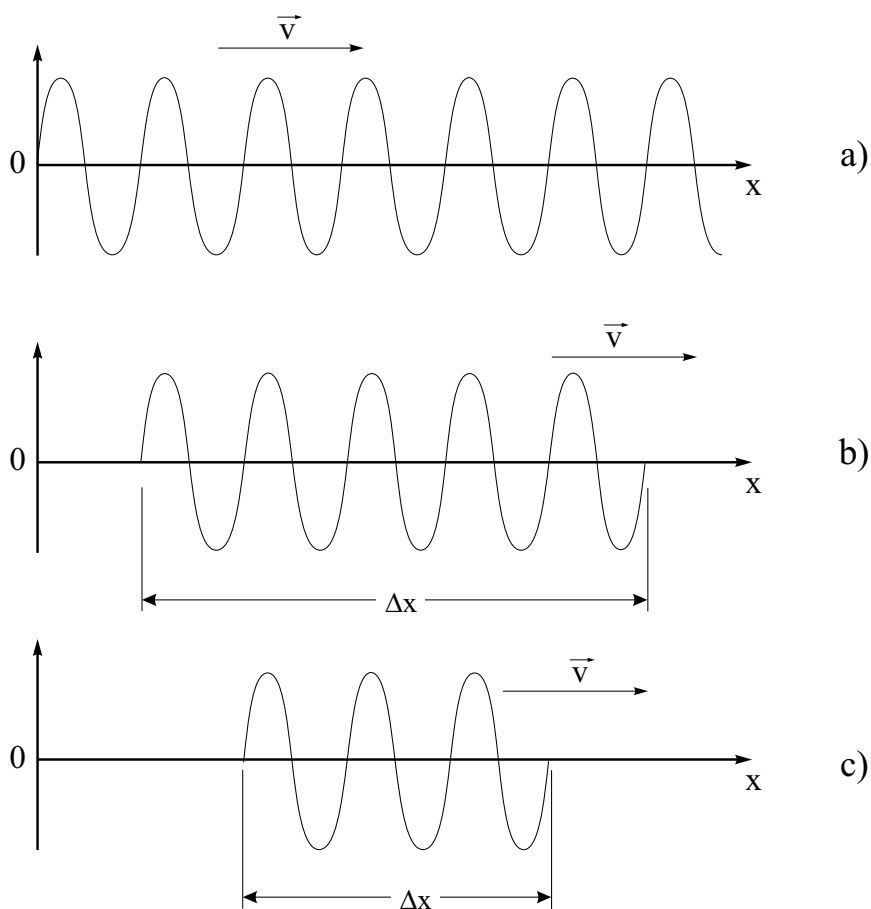
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (2.38)$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu, \quad (2.39)$$

gdzie  $T$  — okres,  $\nu$  — częstotliwość drgań,  $\lambda$  — długość,  $v$  — prędkość rozchodzenia się fali.

Przez nałożenie na siebie monochromatycznych fal o wektorach falowych zawartych w pewnym przedziale  $\Delta k$  i częstotliwości zależnej od wektora falowego  $\omega(k)$  otrzymuje się tzw. *pakiety falowe* (*paczkę falową*) o skończonej szerokości  $\Delta x$  (rys. 2.7b, c). Można udowodnić, że szerokość pakietu falowego jest związana z zakresem wartości wektorów falowych wzorem

$$\Delta x \cdot \Delta k > 2\pi. \quad (2.40)$$



Rysunek 2.7: Fala monochromatyczna a) i pakiet falowy b), c)

Jeżeli przyjąć, że poruszająca się wzdłuż osi  $x$  cząstka jest reprezentowana przez monochromatyczną falę de Broglie'a o długości fali  $\lambda$  (rys. 2.7a), to, jak wynika ze wzoru de Broglie'a,  $\lambda = h/p$ , pęd cząstki jest ściśle określony. W tym przypadku niedokładność określenia pędu — nieoznaczoność pędu  $\Delta p = 0$ . Ponieważ amplituda fali de Broglie'a jest w każdym punkcie osi  $x$  jednakowa, prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w dowolnym punkcie osi  $x$  jest, zgodnie z fizycznym znaczeniem fali de Broglie'a, takie samo. Zatem dla monochromatycznej fali de Broglie'a niedokładność określenia położenia cząstki — nieoznaczoność jej  $x$ -owej współrzędnej  $\Delta x = \infty$ . Natomiast pakiet falowy przedstawia cząstkę zlokalizowaną w ograniczonym obszarze przestrzeni (rys. 2.7b, c). Można przyjąć, że nieoznaczoność położenia cząstki jest równa szerokości pakietu  $\Delta x$ . W przypadku pakietu falowego o małej szerokości nieoznaczoność położenia cząstki jest niewielka. Jednak pakiet falowy o szerokości  $\Delta x$  składa się z fal monochromatycznych o różnych wek-

torach falowych, leżących w przedziale  $\Delta k$ , tj. z fal o różnych długościach, leżących w przedziale  $\Delta \lambda$ . Ze wzoru (2.40) wynika, że w miarę jak  $\Delta x$  maleje,  $\Delta k$  oraz, z uwagi na wzór (2.38),  $\Delta \lambda$  wzrastają. Zgodnie ze wzorem de Broglie'a nieoznaczoność pędu  $\Delta p$  również rośnie. Niemożliwe jest więc jednoczesne wyznaczenie położenia i pędu cząstki z dowolną dokładnością.

Na podstawie podanych powyżej wzorów można łatwo otrzymać związek między nieoznaczonością położenia  $\Delta x$  i nieoznaczonością pędu  $\Delta p$  cząstki. Ze wzoru (2.38) i wzoru de Broglie'a  $\lambda = h/p$  otrzymujemy związek:

$$k = \frac{2\pi p}{h}. \quad (2.41)$$

Wobec tego:

$$\Delta k = \frac{2\pi \Delta p}{h}. \quad (2.42)$$

Korzystając teraz z nierówności (2.40) otrzymujemy:

$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p > h}. \quad (2.43)$$

Jest to, w uproszczonej postaci, zasada nieoznaczoności Heisenberga. *Iloczyn nieoznaczoności współrzędnej cząstki i nieoznaczoności odpowiedniej składowej pędu cząstki nie może być mniejszy niż wartość stałej Plancka.* Widać, że gdy nieoznaczoność  $\Delta x$  współrzędnej cząstki maleje (rośnie), nieoznaczoność  $\Delta p$  składowej jej pędu rośnie (maleje), zgodnie z poprzednimi rozważaniami. W ogólnym przypadku nieoznaczoności pozostałych współrzędnych i składowych pędu cząstki spełniają analogiczne zależności.

Zasady nieoznaczoności nie należy interpretować w ten sposób, że mikroskopowe cząstki mają w rzeczywistości ściśle określone wartości położenia i pędu, których jednak z pewnych przyczyn nie można dokładnie wyznaczyć. Zasada nieoznaczoności wskazuje, że mikroskopowe cząstki mają specyficzne cechy wynikające z ich falowej natury, nieznanne w mechanice klasycznej i pozwala określić granicę stosowalności mechaniki klasycznej. Jeżeli spełnione są jednocześnie nierówności  $\Delta x \ll x$  i  $\Delta p \ll p$  (lub  $\Delta v \ll v$ ), do opisu ruchu cząstki można stosować prawa mechaniki klasycznej. W innych przypadkach należy stosować prawa mechaniki kwantowej.

Rozpatrzmy dwa proste przykłady. Niech pocisk o masie  $m = 10^{-2}$  kg ma prędkość  $v = 10^2$  m/s. Przyjmiemy, że możemy określić położenie pocisku z dokładnością  $\Delta x = 10^{-6}$  m. Ponieważ pęd pocisku  $p = mv$ , to nieoznaczoność pędu  $\Delta p = m\Delta v$ , skąd nieoznaczoność prędkości  $\Delta v = \Delta p/m$ . Korzystając z zasady nieoznaczoności (2.43) znajdujemy

$$\Delta v = \frac{h}{m\Delta x} \quad (2.44)$$

i po podstawieniu danych liczbowych

$$\Delta v = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{10^{-2} \text{ kg} \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 6,62 \cdot 10^{-26} \text{ m/s}.$$

Ponieważ  $\Delta v \ll v$ , do opisu ruchu pocisku można stosować prawa mechaniki klasycznej. Ogólnie, w przypadku ruchu ciał makroskopowych zasada nieoznaczoności nie wnosi żadnych istotnych ograniczeń.

Rozpatrzmy teraz ruch elektronu w atomie wodoru, opisywany modelem Bohra. Zgodnie z nim średnica pierwszej orbity elektronu wynosi  $x \approx 10^{-10}$  m a prędkość elektronu na tej orbicie jest równa  $v \approx 2,2 \cdot 10^6$  m/s. Przyjmiemy, że nieoznaczoność położenia elektronu  $\Delta x = 10^{-12}$  m. Ze wzoru (2.44) otrzymujemy (masa elektronu  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg):

$$\Delta v = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 10^{-12} \text{ m}} \approx 7,3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Ponieważ  $\Delta v > v$ , nie można twierdzić, że elektron w atomie porusza się po określonej orbicie, na której ma określoną prędkość. Model Bohra jest więc sprzeczny z mechaniką kwantową.

## 2.4 Funkcja falowa. Równanie Schrödingera

W poprzednim podrozdziale pokazano, że wskutek swoich własności falowych mikroskopowe cząstki nie mogą być opisywane równaniami klasycznej mechaniki. Podstawowe równanie mechaniki kwantowej było podane w latach 1925-6 przez E. Schrödingera. Równanie to, tak jak i równania dynamiki klasycznej, nie zostało wyprowadzone lecz zapostulowane. Dowodem jego poprawności jest b. dobra zgodność wyprowadzonych z niego wyników z rezultatami doświadczeń z dziedziny fizyki atomowej, fizyki jądrowej i fizyki ciała stałego.

Dla uproszczenia będziemy dalej rozważać jednowymiarowy ruch cząstki wzdłuż osi  $x$ . W mechanice kwantowej stan cząstki opisuje zespolona (zawierająca jednostkę urojoną  $i = \sqrt{-1}$ ) funkcja falowa  $\Psi(x, t)$ . Funkcja ta jest np. odpowiednikiem wychylenia  $y(x, t)$  cząstki z położenia równowagi w przypadku fal mechanicznych (wzór 2.36). Fizyczny sens funkcji falowej polega na tym, że kwadrat jej modułu, pomnożony przez długość odcinka  $\Delta x$ ,

$$|\Psi(x, t)|^2 \Delta x = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) \Delta x, \quad (2.45)$$

określa prawdopodobieństwo znalezienia się cząstki w przedziale  $(x, x + \Delta x)$  (gwiazdka oznacza sprzężenie zespolone, odpowiadające zamianie jednostki urojonej  $i$  na  $-i$ ).

Równanie Schrödingera umożliwia obliczenie funkcji falowej cząstki poruszającej się w określonym polu sił i jest zgodne, jak będzie dalej pokazane, z wzorami de Broglie'a. Będziemy rozpatrywać przypadek cząstki o masie  $m$ , poruszającej się w niezależnym od czasu polu sił, scharakteryzowanym energią potencjalną  $U(x)$ . Wówczas f. falowa cząstki ma postać:

$$\boxed{\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \psi(x)}, \quad (2.46)$$

gdzie  $E$  jest całkowitą energią cząstki (sumą jej energii potencjalnej i kinetycznej),  $\hbar = h/2\pi$ . Funkcja  $\psi(x)$ , również zwana funkcją falową, spełnia *równanie Schrödingera*

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)}. \quad (2.47)$$

Funkcja falowa, będąca rozwiązaniem r. S., musi spełniać pewne dodatkowe warunki, m. in. musi być funkcją ciągłą. Jeżeli cząstka porusza się w ograniczonym obszarze przestrzeni, r. S. posiada rozwiązania spełniające te dodatkowe warunki tylko dla pewnych wartości energii  $E_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Te wartości energii i odpowiadające im funkcje falowe  $\psi_n(x)$  są odpowiednio nazywane *wartościami własnymi* i *funkcjami własnymi*. Fakt, że w określonych warunkach r. S. posiada rozwiązania tylko dla pewnych dyskretnych wartości energii, wyjaśnia skwantowanie energii układów fizycznych w mikroświecie.

## 2.5 Przykłady rozwiązań równania Schrödingera

Rozpatrzmy najpierw rozwiązanie r. S. w przypadku ruchu cząstki swobodnej, na którą nie działają żadne siły. Wówczas energia potencjalna cząstki  $U(x) = 0$  i r. S. przyjmuje postać

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \quad (2.48)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0. \quad (2.49)$$

Wprowadzając oznaczenie:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (2.50)$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad (2.51)$$

otrzymujemy równanie:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0. \quad (2.52)$$

Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać:

$$\psi(x) = Ae^{\pm ikx}. \quad (2.53)$$

W celu sprawdzenia obliczymy pochodne funkcji  $\psi(x)$ , danej ostatnim wzorem:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d}{dx} Ae^{\pm ikx} = \pm ikAe^{\pm ikx},$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \pm \frac{d}{dx} ikAe^{\pm ikx} = -k^2 Ae^{\pm ikx} = -k^2\psi(x).$$

Funkcja (2.53) spełnia więc istotnie równanie (2.52).

Ze wzoru

$$E = \frac{p^2}{2m}, \quad (2.54)$$

określającego związek między energią i pędem w mechanice klasycznej, wynika, że:

$$p = \sqrt{2mE}, \quad (2.55)$$

co po podstawieniu do równania (2.51) daje

$$k = \frac{p}{\hbar}. \quad (2.56)$$

Wobec tego f. falowa może być zapisana w postaci

$$\boxed{\psi(x) = Ae^{\pm \frac{i}{\hbar} px}}, \quad (2.57)$$

a pełna f. falowa (2.46) swobodnej cząstki, zależna również od czasu, jest określona wzorem:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et \mp px)}. \quad (2.58)$$

W celu wyjaśnienia fizycznego sensu tego wyrażenia skorzystamy ze wzoru de Moivre'a

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha.$$

Otrzymujemy wówczas

$$\Psi(x, t) = A \cos \left[ \frac{1}{\hbar}(Et \mp px) \right] - iA \sin \left[ \frac{1}{\hbar}(Et \mp px) \right]. \quad (2.59)$$

Porównując to wyrażenie z wyrażeniem przedstawiającym falę płaską w mechanice klasycznej:

$$y(x, t) = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi), \quad (2.60)$$

można stwierdzić, że zarówno pierwszy jak i drugi składnik we wzorze (2.59) (we wzorze (2.60) należy odpowiednio przyjąć  $\varphi = 0, -\pi/2$ ) reprezentują płaską falę, rozchodzącą się w dodatnim (dla znaku „-”) lub ujemnym (dla znaku „+”) kierunku osi  $x$ . Z porównania wzorów (2.59) i (2.60) wynika ponadto, że wielkość  $k$ , spełniająca związek (2.56), jest wektorem falowym oraz, że:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}. \quad (2.61)$$

Ze wzoru (2.56) otrzymujemy:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{h/2\pi}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.62)$$

a ze wzoru (2.61) znajdujemy:

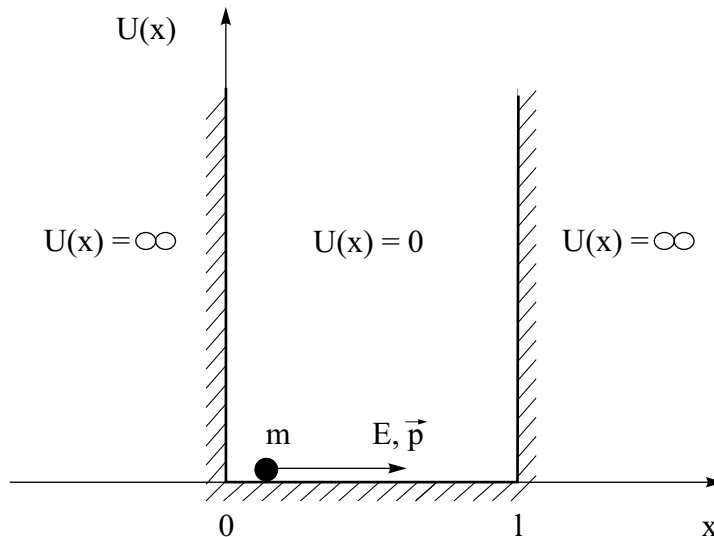
$$2\pi\nu = \frac{E}{h/2\pi},$$

$$\nu = \frac{E}{h}. \quad (2.63)$$

Wzory (2.62) i (2.63) odpowiadają dokładnie wzorom de Broglie'a. Można więc stwierdzić, że wzór (2.58) przedstawia falę de Broglie'a, rozchodzącą się w dodatnim (znak „-”) lub ujemnym (znak „+”) kierunku osi  $x$ . Należy zauważyć, że w rozpatrywanym przypadku ruchu swobodnej cząstki jej energia  $E$  może przybierać dowolną dodatnią wartość — nie jest skwantowana. Wynika to z faktu, że cząstka może się poruszać w nieograniczonym obszarze, wzdłuż całej osi  $x$ .

Jako drugi przykład rozwiązania r. S. rozpatrzmy ruch cząstki w polu sił o energii potencjalnej określonej wzorem:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq x \leq l, \\ \infty & \text{dla } x < 0 \text{ i } x > l, \end{cases} \quad (2.64)$$



Rysunek 2.8: Cząstka w nieskończenie głębokiej jamie potencjału

czyli w tzw. jamie (studni) potencjału (rys. 2.8). Wewnątrz jamy potencjału, w przedziale  $(0, l)$ , na cząstkę nie działa żadna siła. Zgodnie z mechaniką klasyczną cząstka może poruszać się tylko w obszarze, w którym jej energia potencjalna  $U(x) \leq E$  tj. w jamie potencjału, odbijając się kolejno od jej ścianek.

Uwzględniając odbicia fal de Broglie'a od ścian jamy potencjału będziemy szukać rozwiązania r. S. w postaci sumy fal, poruszających się w obu kierunkach osi  $x$ . Zgodnie ze wzorem (2.57) przyjmijmy więc, że

$$\psi(x) = Ae^{+\frac{i}{\hbar}px} + Be^{-\frac{i}{\hbar}px} \quad (2.65)$$

dla  $0 \leq x \leq l$ . Na zewnątrz jamy potencjału prawdopodobieństwo znalezienia cząstki powinno być równe zero. Zatem  $\psi(x) = 0$  dla  $x < 0$  i  $x > l$ . Z uwagi na ciągłość f. falowej na granicach jamy potencjału muszą być spełnione warunki

$$\psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (2.66)$$

Uwzględniając pierwszy warunek otrzymujemy:

$$\psi(0) = A + B = 0, \quad (2.67)$$

skąd  $B = -A$ . Funkcja falowa (2.65) przyjmuje więc postać:

$$\psi(x) = A \left( e^{+\frac{i}{\hbar}px} - e^{-\frac{i}{\hbar}px} \right) = 2iA \sin \left( \frac{px}{\hbar} \right), \quad (2.68)$$

czyli

$$\psi(x) = C \sin \left( \frac{px}{\hbar} \right), \quad (2.69)$$

gdzie  $C = 2iA$ . Korzystając z drugiego z warunków (2.66) otrzymujemy równanie

$$\psi(l) = C \sin \left( \frac{pl}{\hbar} \right) = 0. \quad (2.70)$$

Ponieważ musi być  $C \neq 0$  (bo inaczej  $\psi(x) = 0$ ), ostatnie równanie sprowadza się do równania

$$\sin \left( \frac{pl}{\hbar} \right) = 0, \quad (2.71)$$

które jest spełnione dla

$$\frac{p_n l}{\hbar} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.72)$$

skąd

$$p_n = \frac{n\pi\hbar}{l} = \frac{nh}{2l}. \quad (2.73)$$

Ujemne wartości  $n$  nie dają nowych rozwiązań a wartość  $n = 0$  jest niedopuszczalna, bo wówczas  $\psi(x) = 0$ . Liczbę  $n$  nazywamy *liczbą kwantową*. Korzystając ze związku między energią i pędem cząstki,

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m}, \quad (2.74)$$

otrzymujemy wzór

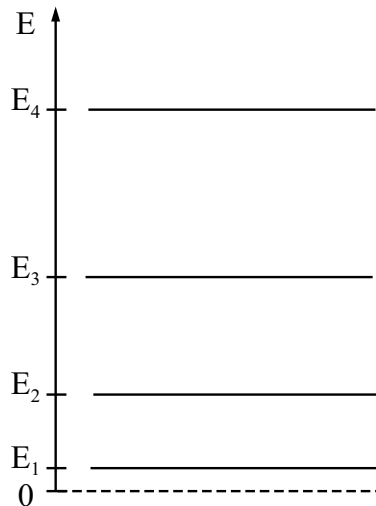
$$\boxed{E_n = \frac{n^2 h^2}{8ml^2}}. \quad (2.75)$$

Wartości pędu i energii cząstki są więc w rozpatrywanym przypadku skwantowane a ich dozwolone wartości określają wzory (2.73) i (2.75) (rys. 2.9).

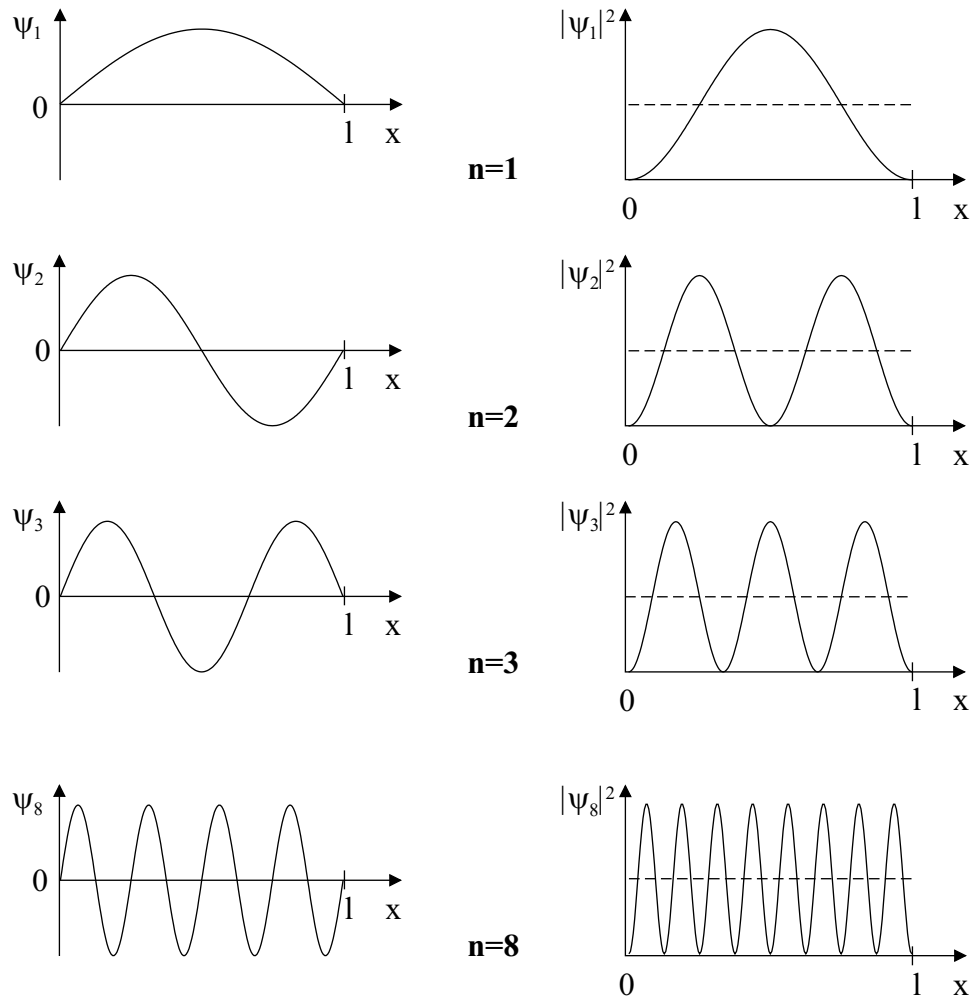
Funkcje własne cząstki w jamie potencjału, zgodnie z wzorami (2.69) i (2.73), mają postać:

$$\boxed{\psi_n(x) = C \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}. \quad (2.76)$$

Funkcje  $\psi_n(x)$  i  $|\psi_n(x)|^2$  dla kilku wartości  $n$  i rzeczywistej stałej  $C$  pokazuje rysunek 2.10. Widać, że w jamie potencjału mieści się całkowita liczba  $n$



Rysunek 2.9: Dozwolone wartości energii cząstki w jamie potencjału



Rysunek 2.10: Funkcje falowe cząstki w jamie potencjału

połowy długości fali de Broglie'a — występują stojące fale de Broglie'a. Warunek, aby w jamie potencjału powstawały stojące fale de Broglie'a cząstki określa dozwolone wartości jej pędu i energii. Funkcja  $|\psi_n(x)|^2 \Delta x$  jest równa prawdopodobieństwu znalezienia się cząstki w niewielkim przedziale  $(x, x + \Delta x)$  wewnątrz jamy potencjału i posiada tam maksima i minima.

Oszacujemy jeszcze minimalną wartość energii cząstki  $E_1$  dla dwóch przypadków. Jeżeli rozpatrzmy cząstkę o masie  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg (masa elektronu) w studni potencjału o szerokości  $l = 10^{-10}$  m (przybliżone rozmiary atomu) to ze wzoru (2.75) otrzymamy

$$E_1 = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (10^{-10} \text{ m})^2} \approx 6 \cdot 10^{-18} \text{ J} \approx 38 \text{ eV}. \quad (2.77)$$

Jest to energia rzędu energii elektronu na pierwszej orbicie w modelu Bohra atomu wodoru.

Jeżeli rozpatrzemy teraz kulkę o masie  $m = 9 \cdot 10^{-3}$  kg, zamkniętą w studni potencjału o szerokości  $l = 0,1$  m, to otrzymamy:

$$E_1 = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})^2}{8 \cdot 9 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (10^{-1} \text{ m})^2} \approx 6 \cdot 10^{-64} \text{ J} \approx 3,8 \cdot 10^{-45} \text{ eV}. \quad (2.78)$$

Jest to niezmiernie mała wartość energii nawet w świecie mikroskopowym. Wyjaśnia to, dlaczego skwantowanie energii ciał makroskopowych jest niezauważalne — poszczególne poziomy energii tych ciał leżą zbyt blisko siebie.

## Rozdział 3

# Fizyka ciała stałego

### 3.1 Klasyfikacja ciał stałych

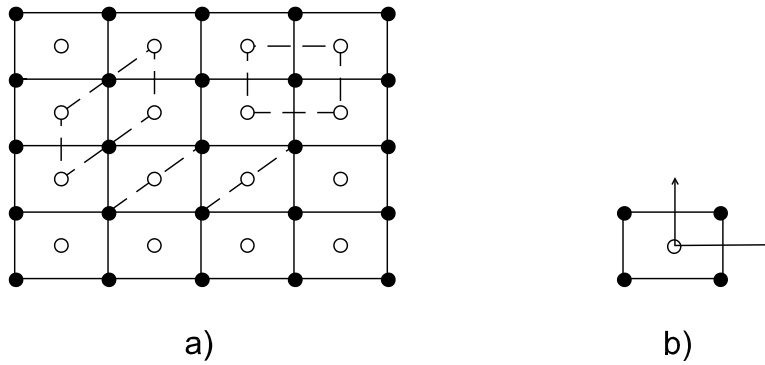
Przedmiotem fizyki ciała stałego jest badanie i interpretacja różnorodnych własności fizycznych ciał stałych (elektrycznych, magnetycznych, optycznych, cieplnych, mechanicznych). Większość tych własności można wyjaśnić jedynie na gruncie mechaniki kwantowej i intensywny rozwój fizyki ciała stałego nastąpił dopiero po sformułowaniu podstaw mechaniki kwantowej.

Ze względu na wewnętrzną strukturę ciał stałych możemy je podzielić na:

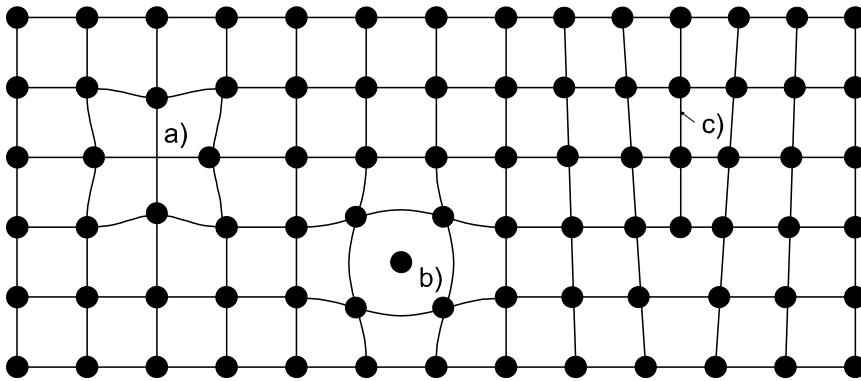
1. kryształy (monokryształy),
2. ciała polikrystaliczne (polikryształy),
3. ciała amorficzne (bezpostaciowe).

ad 1. W idealnym kryształcie wszystkie atomy są ułożone w regularnych odstępach, tworząc periodyczną sieć (strukturę) przestrzenną. Ze względu na regularną budowę kryształu, dla określenia jego struktury wystarczające jest podanie położenia atomów w niewielkim fragmencie kryształu, zwanym *komórką elementarną* (rys. 3.1). Przez równoległe przemieszczenia komórki elementarnej można odtworzyć strukturę całego kryształu. Jak widać z rysunku, wybór komórki elementarnej nie jest jednoznaczny. Charakterystyczną cechą kryształów jest *anizotropia*, tj. zależność od kierunku wielu ich własności fizycznych (np. przewodnictwa elektrycznego, przewodnictwa cieplnego, sprężystości). Kryształy są więc ciałami anizotropowymi.

W rzeczywistych kryształach występują zawsze zakłócenia regularnej struktury sieci krystalicznej — defekty kryształów, związane z nieprawidłowym ułożeniem niektórych atomów ciała lub obecnością domieszek atomów innych substancji (rys. 3.2). Niektóre własności kryształów (np. przewodnictwo elektryczne, wytrzymałość mechaniczna) są w dominującym stopniu uwarunkowane defektami struktury krystalicznej.



Rysunek 3.1: Dwuwymiarowy kryształ a) i jego komórka elementarna b). Inne komórki elementarne zaznaczono na rys. a) liniami przerywanymi. Czarne i białe kółka oznaczają dwa różne rodzaje atomów



Rysunek 3.2: Defekty sieci krystalicznej: a) luka, b) atom międzywęzłowy, c) dyslokacja krawędziowa

ad 2. Ciała krystaliczne występują najczęściej nie w postaci pojedynczych monokryształów lecz w postaci polikryształów, składających się z dużej liczby bardzo małych, bezładnie zorientowanych mikrokryształów. Mikrokryształki oddzielone są od siebie cienkimi warstwami międzykrystalicznymi o grubości rzędu kilku odległości międzyatomowych. Istnienie granic międzykrystalicznych silnie wpływa na własności mechaniczne polikryształów. Z uwagi na chaotyczne ułożenie przestrzenne mikrokryształów ciała polikrystaliczne cechuje *izotropia*, tzn. niezależność od kierunku własności fizycznych. Polikryształy są zatem ciałami izotropowymi.

ad 3. Oprócz monokryształów i polikryształów istnieje również obszerna grupa ciał amorficznych (szkła, masy plastyczne, cienkie naporowane warstwy półprzewodników i metali), nie wykazujących żadnego uporządkowania

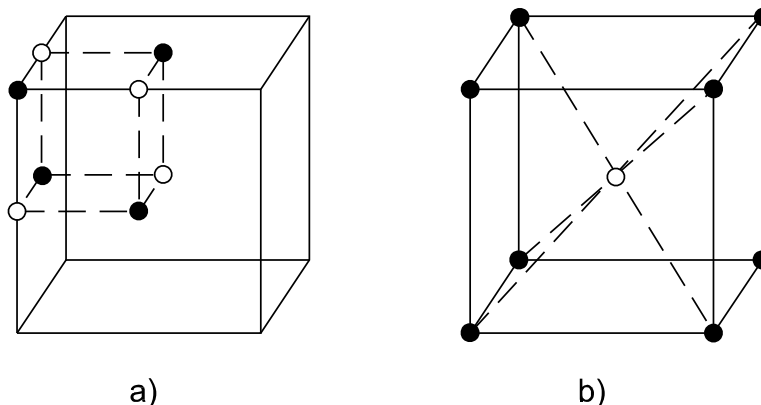
atomów na dalszych odległościach, przekraczających kilka średnich odległości międzyatomowych. Ciało amorficzne zachowują jednak pewien stopień bliskiego uporządkowania. Na przykład prawie każdy atom w ciele amorficznym jest otoczony przez jednakową liczbę sąsiednich atomów. Ciało amorficzne są również ciałami izotropowymi. W dalszej części rozdziału będziemy rozpatrywać wyłącznie ciała krystaliczne.

W badaniach struktury ciał stałych wykorzystuje się dyfrakcję promieni Roentgena (rentgenografia) oraz dyfrakcję fal de Broglie'a neutronów (neutronografia) i elektronów (elektronografia).

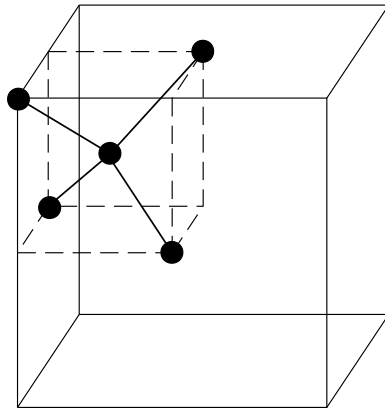
Ponieważ ciało stałe tworzy zwartą całość, między jego atomami lub jonami muszą działać pewne siły, utrzymujące atomy lub jony w kryształach. Wielkość tych sił można ocenić na podstawie *energii wiązania kryształu*  $E_c$ , tj. energii potrzebnej do rozdzielania kryształu na poszczególne atomy lub jony, przypadającej na jeden atom lub jon. Własności fizyczne ciał stałych w dużej mierze zależą od charakteru sił, wiążących kryształy. Możemy wyróżnić następujące rodzaje ciał stałych:

1. kryształy jonowe,
2. kryształy kowalencyjne,
3. kryształy metaliczne,
4. kryształy molekularne.

ad 1. Kryształy jonowe tworzą pierwiastki I i VII grupy układu okresowego (np.  $KCl$ ) oraz pierwiastki II i VI grupy (np.  $MgO$ ). W kryształach jonowych zachodzi niemal całkowite przeniesienie zewnętrznych elektronów



Rysunek 3.3: Fragment komórki elementarnej kryształu  $KCl$  a),  $\bullet$  — jony  $K^+$ ,  $\circ$  — jony  $Cl^-$ . Komórka elementarna kryształu  $CsCl$  b),  $\bullet$  — jony  $Cs^+$ ,  $\circ$  — jony  $Cl^-$

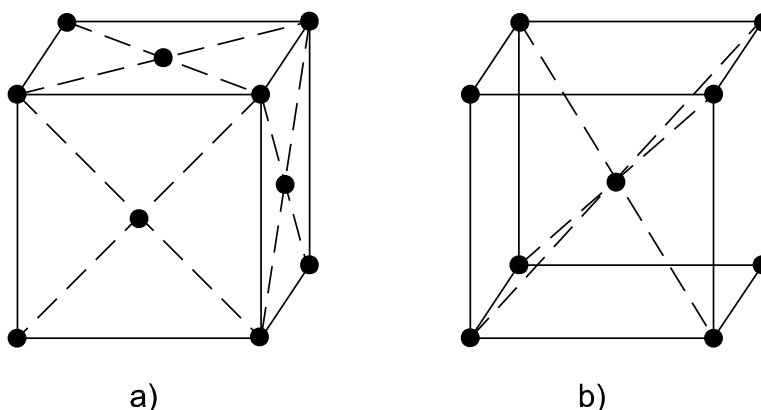


Rysunek 3.4: Struktura kryształów kowalencyjnych typu diamentu. • — *Ge*, *Si*, *C*. Duży sześciąt oznacza komórkę elementarną

(tzw. elektronów walencyjnych) od atomów metalu do atomów niemetalu. Powstałe jony oddziałują ze sobą siłami elektrostatycznymi, przy czym energia oddziaływania elektrostatycznego stanowi dominującą część energii wiązania kryształu. Typową strukturę kryształów jonowych ilustruje (rys. 3.3). Energia wiązania kryształów jonowych jest wysoka, np. energia wiązania kryształu *KCl* wynosi  $E_c = 7,1$  eV/atom. W niskich temperaturach kryształy jonowe nie przewodzą prądu elektrycznego — są izolatorami. W temperaturach wyższych od pokojowej wykazują one przewodnictwo elektryczne związane z transportem jonów.

ad 2. Przykładami kryształów o wiązaniach kowalencyjnych są german (*Ge*), krzem (*Si*) i diament (krystaliczny węgiel, *C*). Krzem jest obecnie materiałem najszerszej stosowanym w technologii elektronicznej. Pojedyncze wiązanie kowalencyjne tworzą dwa elektrony, znajdujące się na zewnętrznych powłokach elektronowych (zgodnie z teorią Bohra — na zewnętrznych orbitach) sąsiednich atomów. Ponieważ atomy wymienionych pierwiastków posiadają cztery elektrony walencyjne, tworzą one cztery wiązania chemiczne z sąsiednimi atomami, przy czym kąty między kierunkami każdej pary wiązań są identyczne. Z tego względu wymienione kryształy mają strukturę, pokazaną na rysunku 3.4. Energia wiązania kryształów kowalencyjnych jest stosunkowo wysoka; w przypadku diamentu wynosi ona  $E_c = 3,6$  eV/atom. Czyste kryształy kowalencyjne mają w niskich temperaturach małe przewodnictwo elektryczne, rośnie ono jednak silnie z wzrostem temperatury i jest bardzo wrażliwe na obecność domieszek. Ze względu na kierunkowy charakter wiązań kryształy kowalencyjne cechuje duża twardość.

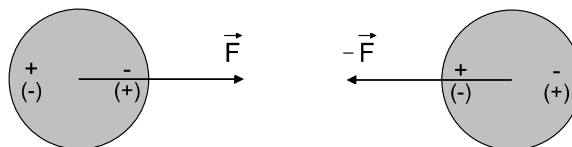
ad 3. Kryształy metaliczne tworzą pierwiastki z początkowych grup układu okresowego, których atomy mają małą liczbę elektronów walencyjnych. W kryształach metalicznych elektrony walencyjne nie są związane z atomami



Rysunek 3.5: Komórki elementarne kryształów metalicznych. a) *Ca, Cu, Al*, b) *Li, K, Fe*

i mogą się swobodnie przemieszczać. Położenie równowagi jonów metalu odpowiada sytuacji, gdy przyciągające siły elektrostatyczne między dodatnimi jonami a swobodnymi elektronami są równoważone przez siły odpychania elektrostatycznego jonów. Energie wiązania kryształów metalicznych są na ogół mniejsze, niż kryształów jonowych lub kowalencyjnych. Np. dla litu wartość energii wiązania wynosi  $E_c = 1,6$  eV/atom. Wiązanie metaliczne nie ma charakteru kierunkowego. Z tego względu metale tworzą struktury, w których atomy są stosunkowo ciasno upakowane (rys. 3.5). Z tego samego powodu metale mają mniejszą twardość niż kryształy kowalencyjne i mogą być łatwo deformowane. Obecność swobodnych elektronów w metalach wyjaśnia ich wysokie przewodnictwo elektryczne i niektóre inne własności.

ad 4. Wiązania molekularne występują w kryształach tych pierwiastków lub związków chemicznych, których atomy lub cząsteczki mają całkowicie wypełnione przez elektrony walencyjne zewnętrzne powłoki (zgodnie z teorią Bohra — zewnętrzne orbity). Typowym przykładem są kryształy gazów szlachetnych, których atomy należą do VIII grupy układu okresowego. Siły wiążące kryształy molekularne powstają w wyniku oscylacji ładunku elektrycznego w atomach lub cząsteczkach, które indukują nierównomier-



Rysunek 3.6: Siły van der Waalsa, wiążące atomy w kryształach molekularnych

ny rozkład ładunku elektrycznego w sąsiednich atomach lub cząsteczkach (rys. 3.6). Siły te noszą nazwę sił van der Waalsa i mają stosunkowo małą wartość oraz krótki zasięg. Z tego powodu kryształy molekularne charakteryzuje mała energia wiązania i niska temperatura topnienia. Przykładowo dla argonu ( $Ar$ )  $E_c = 0,08$  eV/atom,  $T_{top} = 84$  K. Typowymi kryształami molekularnymi, oprócz kryształów gazów szlachetnych, są kryształy wodoru  $H_2$ , tlenu  $O_2$ , dwutlenku węgla  $CO_2$  i większość kryształów związków organicznych. Ponieważ atomy lub cząsteczki kryształów molekularnych są obojętne elektrycznie, kryształy te są dobrymi izolatorami.

### 3.2 Pasmowa teoria ciał stałych

Przewodnictwo elektryczne ciał stałych, w zależności od ich rodzaju, zmienia się w bardzo szerokich granicach. Ze względu na wartość ich przewodnictwa elektrycznego, ciała stałe dzielimy umownie na metale (przewodniki), półprzewodniki i izolatory, jak pokazuje tabela 3.1. Przewodnictwo elektryczne

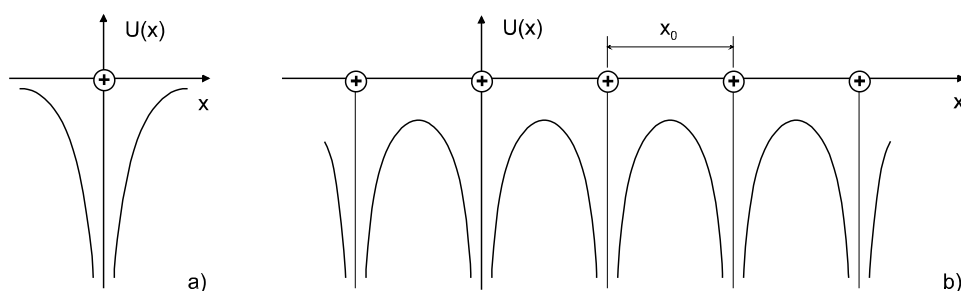
ciało stałe	przewodnictwo elektryczne $\sigma$
metal	$\sigma > 10^5 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
półprzewodnik	$10^5 \Omega^{-1} \cdot m^{-1} > \sigma > 10^{-8} \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$
izolator	$\sigma < 10^{-8} \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

Tabela 3.1: Przewodnictwo elektryczne ciał stałych.

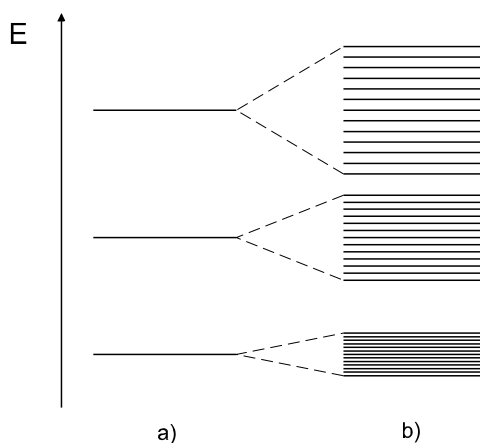
metali maleje ze wzrostem temperatury a przewodnictwo elektryczne półprzewodników i izolatorów silnie wzrasta w miarę zwiększania temperatury. Wspomniane zróżnicowanie przewodnictwa elektrycznego i wiele innych właściwości ciał stałych wyjaśnia *teoria pasmowa*, której podstawy zostaną teraz omówione.

W ciele stałym odległości między najbliższymi atomami są porównywalne z odległościami między jądrem a elektronami w swobodnym atomie. Dlatego na każdy elektron w ciele stałym działają nie tylko siły kulombowskie pochodzące od jądra i pozostałych elektronów „swojego” atomu, lecz również siły wytworzone przez jądra i elektrony sąsiednich atomów. W pierwszym przybliżeniu można przyjąć, że każdy elektron w ciele stałym porusza się w średnim, niezależnym od czasu polu elektrostatycznym, wytworzonym przez jądra atomów i pozostałe elektrony. Ze względu na regularną strukturę ciała stałego to wypadkowe pole powinno być okresową funkcją współrzędnych elektronu. Sytuację taką dla jednowymiarowego ruchu elektronu ilustruje rysunek 3.7. Warunek okresowości energii potencjalnej elektronu w kryształach można wtedy zapisać jako  $U(x + x_0) = U(x)$ .

Dla wyjaśnienia charakterystycznych cech ruchu elektronów w kryształach należy znaleźć rozwiązanie równania Schrödingera dla przypadku, gdy



Rysunek 3.7: Energia potencjalna elektronu w pojedynczym atomie a) i w kryształce b)



Rysunek 3.8: Dozwolone stany energetyczne elektronów w pojedynczym atomie a) i w ciele stałym b)

energia potencjalna elektronu jest okresową funkcją jego współrzędnych. Niezależnie od szczegółowej postaci energii potencjalnej i przyjętej metody rachunkowej otrzymuje się wówczas następujący wynik. *Dozwolone wartości energii elektronu składają się z pasm, poprzedzielanych obszarami energii wzbronionych.* Dla tych dozwolonych wartości energii możliwy jest ruch elektronu w całym kryształce.

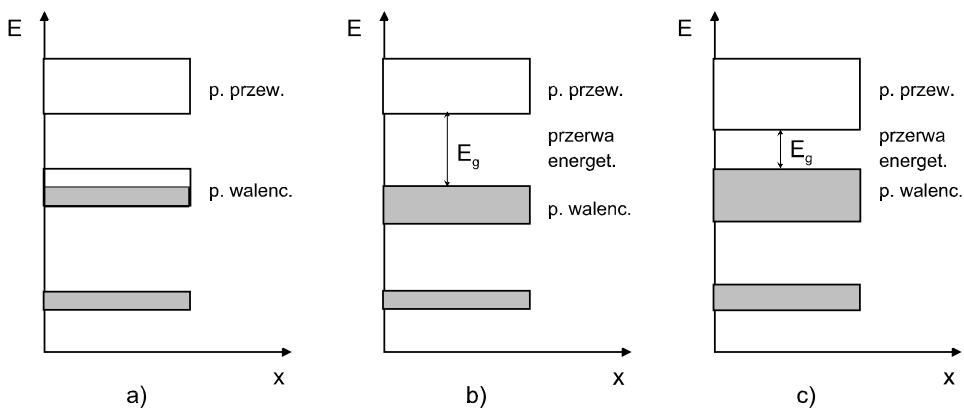
Do pojęcia pasm energetycznych można dojść również w inny sposób. Załóżmy, że początkowo rozmieściliśmy  $N$  atomów określonego pierwiastka w taki sposób, aby utworzyły one sieć przestrzenną, charakterystyczną dla danego kryształku. Przyjmijmy, że początkowa odległość  $R$  między najbliższymi atomami jest znacznie większa, niż ich rzeczywista odległość w kryształce. Wówczas stany energetyczne elektronów są takie same jak w pojedynczych atomach. Jeżeli zmniejszać teraz odległość  $R$  między atomami, to na skutek wzajemnego oddziaływania atomów wystąpi rozszczepienie

każdego poziomu energetycznego w atomie na  $N$  położnych blisko siebie podpoziomów, tworzących dozwolone pasma energetyczne (rys. 3.8). Z uwagi na dużą liczbę atomów w kryształach (rzędu  $N \approx 10^{22} \text{ cm}^{-3} - 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ ) dozwolone pasma energetyczne można traktować jako ciągłe. Są one rozdzielone obszarami energii wzbronionych — pasmami wzbronionymi.

Dla wyjaśnienia własności poszczególnych grup ciał stałych, zwłaszcza ich przewodnictwa elektrycznego, istotne znaczenie ma stopień zapełnienia poszczególnych pasm energetycznych. Zgodnie z mechaniką kwantową w danym pasmie dozwolonym, podobnie jak w danej powłoce elektronowej pojedynczego atomu, może znajdować się określona maksymalna liczba elektronów. Dowodzi się, że elektrony znajdujące się w całkowicie zapełnionych pasmach nie mogą brać udziału w przewodnictwie elektrycznym, gdyż z ruchem elektronu jest związane zwiększenie jego energii a ponieważ wszystkie wyższe stany energetyczne w tym paśmie są już zajęte — jest to niemożliwe.

Podobnie jak powłoki elektronowe pojedynczych atomów, dozwolone pasma energetyczne w ciałach stałych są zapełniane w kierunku rosnących wartości energii a stopień zapełnienia danego pasma jest najczęściej taki sam jak stopień zapełnienia odpowiedniej powłoki elektronowej. Najwyższe zapełnione (częściowo lub całkowicie) pasmo nazywa się *pasmem walencyjnym*, ponieważ powstaje ono z rozszczepienia poziomów energetycznych elektronów walencyjnych. Leżące wyżej następne dozwolone pasmo energetyczne nazywane jest *pasmem przewodnictwa*. O własnościach elektrycznych ciał stałych decyduje głównie stopień zapełnienia pasma walencyjnego (rys. 3.9).

W metalach pasmo walencyjne jest zapełnione tylko częściowo. Elektrony w tym paśmie mogą łatwo uzyskać dodatkową energię od pola elektrycznego, co prowadzi do przepływu prądu. W izolatorach pasmo walencyjne jest



Rysunek 3.9: Struktura pasm energetycznych metali a), izolatorów b) i półprzewodników c). Stany zajęte przez elektrony są zacieniowane

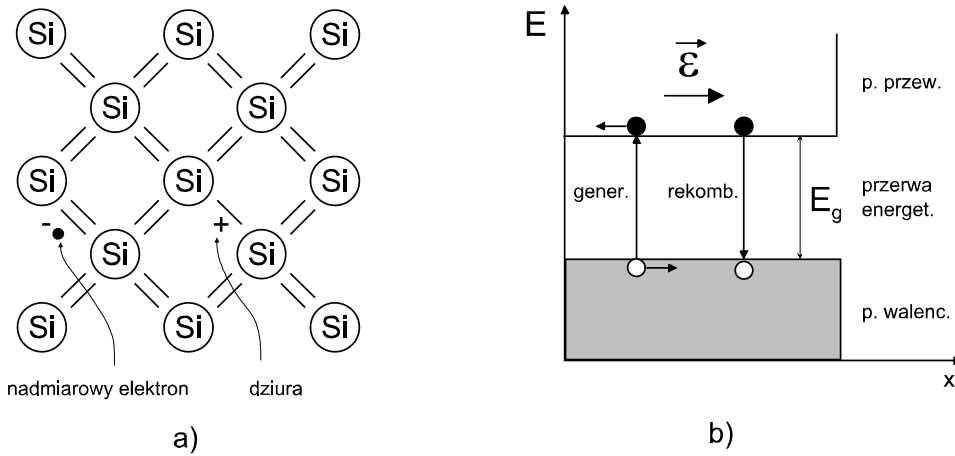
całkowicie zapełnione a pasmo przewodnictwa puste, przy czym szerokość przerwy energetycznej  $E_g$  między tymi pasmami jest stosunkowo duża. Np. w przypadku *KCl* wartość  $E_g \approx 10$  eV. Przewodnictwo elektryczne byłoby możliwe tylko w przypadku termicznego wzbudzenia elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Ze względu na dużą szerokość przerwy energetycznej proces ten jest jednak bardzo mało prawdopodobny. Umownie przyjmuje się, że dla izolatorów  $E_g > 2$  eV.

W półprzewodnikach dla dostatecznie niskich temperatur pasmo walencyjne jest całkowicie zapełnione a pasmo przewodnictwa puste, podobnie jak w izolatorach. Szerokość przerwy energetycznej jest jednak znacznie mniejsza. Np. dla germanu  $E_g = 0,72$  eV a dla krzemu  $E_g = 1,11$  eV. W wyższych temperaturach elektrony z pasma walencyjnego mogą być wzbudzane do pasma przewodnictwa, co powoduje przepływ prądu elektrycznego w kryształach. Różnica między izolatorem a półprzewodnikiem polega więc na szerokości przerwy energetycznej. Przyjmuje się, że dla półprzewodników  $E_g \leq 2$  eV.

### 3.3 Półprzewodniki samoistne i domieszkowe

Charakterystyczną cechą półprzewodników, umożliwiającą ich szerokie zastosowanie w technologii elektronicznej, jest silna zależność ich przewodnictwa elektrycznego od liczby defektów sieci krystalicznej lub domieszek innych pierwiastków. Np. wprowadzenie do germanu  $10^{-9}$  części arsenu lub galu zwiększa jego przewodnictwo elektryczne o 2-3 rzędy wielkości. Można więc wyróżnić *półprzewodniki samoistne*, których przewodnictwo elektryczne uwarunkowane jest wyłącznie właściwościami danego półprzewodnika, tzn. takie, w których liczba defektów i domieszek jest tak mała, że nie mają one wpływu na przewodnictwo, oraz *półprzewodniki domieszkowe*, których przewodnictwo elektryczne zależy w dominującym stopniu od istniejących w nich defektów sieci i domieszek.

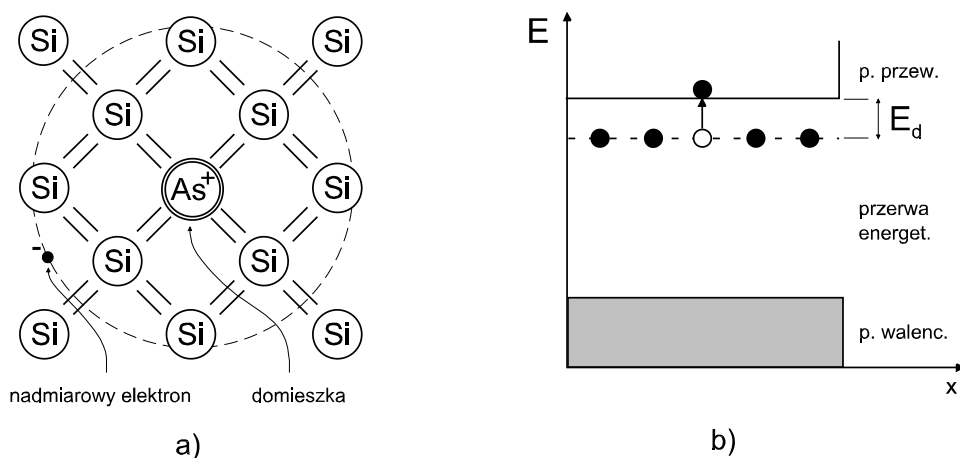
Najistotniejsze cechy przewodnictwa elektrycznego półprzewodników, w szczególności wpływ domieszek na ich przewodnictwo elektryczne, można wyjaśnić na podstawie prostego modelu, podanego przez W. Shockley'a. W czystym kryształach kowalencyjnym (np. *Si*, *Ge*) każdy atom jest otoczony czterema symetrycznie rozmieszczonymi, sąsiadującymi atomami, przy czym wiązanie kowalencyjne jest tworzone przez parę elektronów walencyjnych z sąsiednich atomów (rys. 3.10a). Pod wpływem dostarczonej do kryształu energii (np. termicznej, kwantów promieniowania) wiązanie kowalencyjne może ulec rozerwaniu. Powstaje wówczas nadmiarowy (dodatkowy) elektron, który może przemieszczać się w kryształach i brać udział w przewodnictwie elektrycznym. Brak jednego z elektronów w wiązaniu kowalencyjnym odpowiada jednoczesnemu powstaniu „dziury” o dodatnim ładunku, która również może uczestniczyć w przewodnictwie elektrycznym kryształu wskutek wzajemnego ruchu elektronów w wiązaniach kowalencyjnych. W przy-



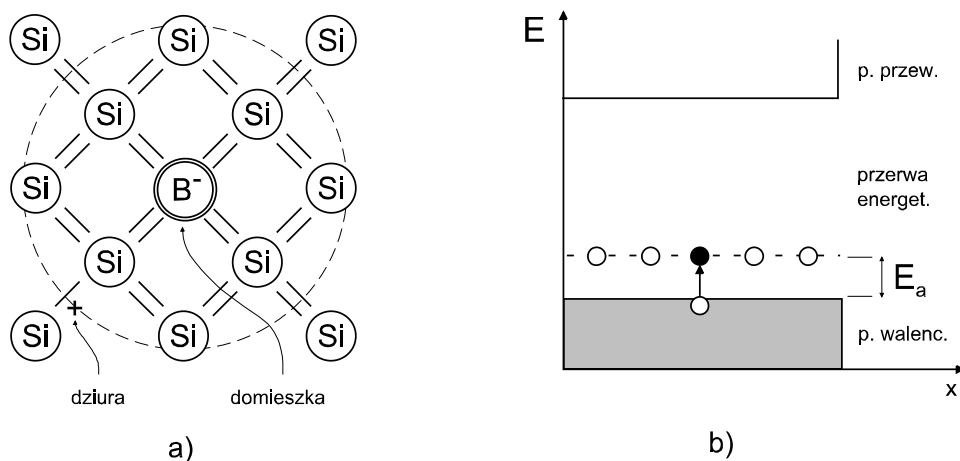
Rysunek 3.10: Półprzewodnik samoistny a) i jego struktura pasmowa b). Na rys. a) kreskami zaznaczono elektrony, tworzące wiązania kowalencyjne

padku spotkania elektronu z dziurą elektron tworzy z powrotem wiązanie kowalencyjne i oba swobodne nośniki ładunku znikają. Zjawisko to nazywa się rekombinacją elektronu z dziurą. Procesy generacji i rekombinacji pary elektron-dziura z punktu widzenia teorii pasmowej ilustruje rysunek 3.10b. Minimalna energia potrzebna do wytworzenia pary nośników odpowiada szerokości przerwy energetycznej  $E_g$ . Ruch dziury w paśmie walencyjnym tłumaczymy wypełnianiem wolnego stanu w tym paśmie przez kolejne elektrony. Ponieważ kierunek ruchu dziury w polu elektrycznym jest przeciwny do kierunku ruchu elektronów, przypisujemy dziurze dodatni ładunek.

Założmy teraz, że do półprzewodnika samoistnego zostaną wprowadzone domieszki pierwiastka pięciowartościowego (np. fosforu  $P$ , arsenu  $As$ , antymonu  $Sb$ ), którego atomy posiadają pięć elektronów walencyjnych (rys. 3.11a). Cztery elektrony walencyjne domieszki utworzą wtedy wiązania kowalencyjne z czterema atomami półprzewodnika. Piąty elektron zostanie związany siłami przyciągania kulombowskiego przez dodatni jon pierwiastka domieszkowego w odległości rzędu kilku stałych sieci krystalicznej, jeżeli temperatura półprzewodnika jest bliska zeru bezwzględnemu. W wyższej temperaturze, rzędu 20 K, elektron wskutek wzbudzenia termicznego może oderwać się od jonu domieszki i poruszać w całym kryształ, zwiększając jego przewodnictwo elektryczne. *Domieszki wprowadzające do półprzewodnika dodatkowe elektrony nazywają się donorami a półprzewodniki z domieszką donorów — półprzewodnikami typu n (negative)*, ponieważ w ich przewodnictwie elektrycznym biorą udział głównie elektrony. Z punktu widzenia teorii pasmowej domieszkowanie półprzewodników donorami powoduje wytworzenie w przerwie energetycznej dodatkowych poziomów w pobliżu pasma przewodnictwa (rys. 3.11b). Energia  $E_d$  odpowiada energii, potrzebnej do



Rysunek 3.11: Półprzewodnik typu n a) i jego struktura pasmowa b)



Rysunek 3.12: Półprzewodnik typu p a) i jego struktura pasmowa b)

przeniesienia elektronu z poziomu donorowego do pasma przewodnictwa. Jej typowa wartość jest rzędu kilku setnych eV.

Podobne rozważania można przeprowadzić dla półprzewodników samoistnych, domieszkowanych pierwiastkami trójwartościowymi (np. bor *B*, glin *Al*, gal *Ga*, ind *In*), których atomy mają trzy elektrony walencyjne (rys. 3.12a). Atomowi pierwiastka domieszki brakuje wówczas jednego elektronu do utworzenia czterech wiązań kowalencyjnych z sąsiednimi atomami półprzewodnika. Może on pozyskać ten brakujący elektron od jednego z atomów półprzewodnika, stając się jonem ujemnym. Jednocześnie, na skutek nieobecności jednego z elektronów w wiązaniu kowalencyjnym, powstaje związana z jonem domieszki dziura. W temperaturze wyższej od ok. 20

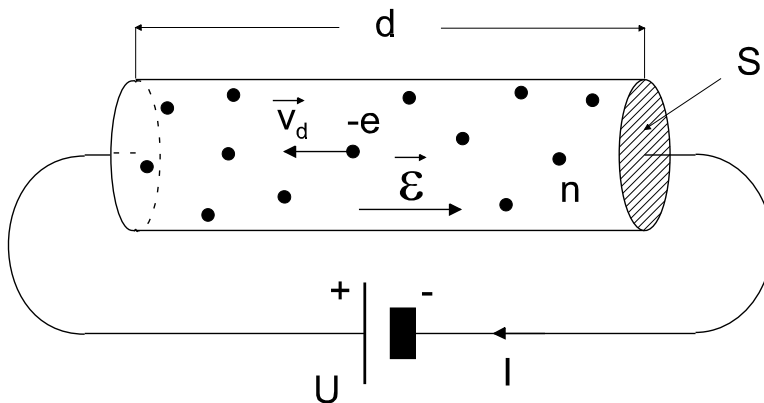
K może ona uwolnić się od przyciągającego pola elektrycznego domieszki, zwiększając przewodnictwo elektryczne kryształu. *Domieszki wprowadzające dodatkowe dziury do półprzewodnika nazywamy akceptorami a półprzewodniki z domieszką akceptorów — półprzewodnikami typu p (positive)*. Zgodnie z teorią pasmową, wprowadzenie domieszek akceptorowych powoduje powstanie w przerwie energetycznej dodatkowych poziomów energetycznych w pobliżu pasma walencyjnego (rys. 3.12b). Energia  $E_a$  potrzebna do wytworzenia dziury jest, podobnie jak energia  $E_d$ , rzędu kilku setnych eV. Wartości te są znacznie mniejsze od szerokości przerwy energetycznej  $E_g$ . Przy niezbyt wysokich temperaturach, zwykle do temperatury pokojowej włącznie, główną rolę w przewodnictwie elektrycznym domieszkowanych półprzewodników odgrywiają nośniki ładunku — elektrony lub dziury, dostarczane przez domieszki.

### 3.4 Przewodnictwo elektryczne półprzewodników

Przypomnimy najpierw kilka wzorów, opisujących przewodnictwo elektryczne ciał stałych. Dla ustalenia uwagi będziemy rozpatrywać próbkę półprzewodnika typu n w kształcie walca, do której zostało przyłożone napięcie  $U$  (rys. 3.13). Wiadomo z doświadczenia, że dla większości ciał stałych spełnione jest prawo Ohma, zgodnie z którym natężenie  $I$  płynącego prądu jest wprost proporcjonalne do przyłożonego napięcia  $U$ ,

$$I = \frac{U}{R}. \quad (3.1)$$

Wielkość  $R$  nazywamy oporem elektrycznym ciała. Jednostką oporu jest om ( $[R] = \Omega = \text{V/A}$ ). Opór ciała jest, zgodnie z doświadczeniem, wprost



Rysunek 3.13: Przepływ prądu w półprzewodniku typu n

proporcjonalny do jego długości  $d$  i odwrotnie proporcjonalny do powierzchni  $S$  jego przekroju poprzecznego

$$R = \frac{\rho d}{S}. \quad (3.2)$$

Współczynnik  $\rho$  jest zwany oporem właściwym. Wyraża się go w omometrach ( $[\rho] = \Omega \cdot \text{m}$ ). Opór właściwy nie zależy od kształtu ciała a tylko od jego rodzaju. Odwrotność oporu właściwego nazywa się przewodnictwem właściwym (przewodnością właściwą) ciała

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (3.3)$$

Jego jednostką jest odwrotność omometra ( $[\sigma] = \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ). Orientacyjny zakres przewodnictwa elektrycznego metali, półprzewodników i izolatorów podano w podrozdziale 3.2.

Znając koncentrację  $n$  i prędkość ruchu  $v_d$  elektronów w półprzewodniku można łatwo obliczyć jego przewodnictwo elektryczne (rys. 3.13). Zgodnie z definicją natężenia prądu

$$I = \frac{Q}{t}, \quad (3.4)$$

gdzie  $Q$  jest ładunkiem elektronów w objętości ciała a  $t$  czasem przejścia przez elektrony odległości  $d$ . Wielkości te można wyrazić wzorami

$$Q = endS, \quad (3.5)$$

$$t = \frac{d}{v_d}, \quad (3.6)$$

gdzie  $e$  jest ładunkiem elektronu. Podstawiając wyrażenia (3.5) - (3.6) do (3.4) otrzymujemy:

$$I = env_d S. \quad (3.7)$$

Ostatni wzór można porównać ze wzorem wynikającym z prawa Ohma. Korzystając ze wzoru (3.3), wzór (3.2) można zapisać jako

$$R = \frac{d}{\sigma S}. \quad (3.8)$$

Podstawiając ten wzór do (3.1) otrzymujemy wzór

$$I = \frac{\sigma U S}{d}, \quad (3.9)$$

który, biorąc pod uwagę, że  $\mathcal{E} = U/d$  jest natężeniem pola elektrycznego w półprzewodniku, można przepisać w postaci

$$I = \sigma \mathcal{E} S. \quad (3.10)$$

Z porównania wzorów (3.7) i (3.10) wynika następujące wyrażenie dla przewodnictwa elektrycznego półprzewodnika:

$$\sigma = en \frac{v_d}{\mathcal{E}}. \quad (3.11)$$

Widać, że przewodnictwo elektryczne nie będzie zależec od natężenia pola (spełnione będzie prawo Ohma) tylko wtedy, gdy prędkość dryfu elektronów jest wprost proporcjonalna do natężenia pola,  $v_d \sim \mathcal{E}$ . Zależność tę zapisuje się w postaci

$$\boxed{v_d = \mu_n \mathcal{E}}, \quad (3.12)$$

gdzie współczynnik  $\mu_n$  nazywa się *ruchliwością* elektronu w ciele stałym. Typowe wartości ruchliwości nośników ładunku w półprzewodnikach są rzędu  $0,1 \text{ m}^2/\text{V}\cdot\text{s}$ . Należy zauważyć, że elektrony w ciele stałym poruszają się pod wpływem zewnętrznego pola ruchem jednostajnym. Wynika stąd, że na elektrony działają pewne siły oporu, bo przy ich braku ruch elektronów byłby, zgodnie z drugą zasadą dynamiki, jednostajnie przyspieszony. Wspomniane siły, hamujące ruch elektronów, są związane z ich rozpraszaniem na drgających atomach sieci krystalicznej oraz na domieszkach i defektach.

Z dwóch ostatnich wzorów otrzymujemy końcowy wzór, określający przewodnictwo elektryczne półprzewodnika typu n,

$$\boxed{\sigma = en\mu_n}, \quad (3.13)$$

z którego widać, że jest ono wprost proporcjonalne do koncentracji elektronów i do ich ruchliwości. Przewodnictwo elektryczne półprzewodnika typu p wyraża się analogicznym wzorem,

$$\boxed{\sigma = ep\mu_p}, \quad (3.14)$$

gdzie  $p$  i  $\mu_p$  oznaczają koncentrację i ruchliwość dziur. W przypadku półprzewodnika samoistnego całkowite natężenie prądu i przewodnictwo elektryczne są sumą natężeń prądów i przewodnictw, związanych z ruchem elektronów i dziur. Ponieważ w półprzewodniku samoistnym koncentracje elektronów i dziur są jednakowe,  $n = p$ , jego przewodnictwo elektryczne określa wzór

$$\boxed{\sigma = en(\mu_n + \mu_p)}. \quad (3.15)$$

Omówimy teraz w skrócie zależność przewodnictwa elektrycznego półprzewodników od temperatury. Ponieważ ruchliwość nośników ładunku jest wolno zmienną funkcją temperatury, zmiana przewodnictwa elektrycznego z temperaturą jest uwarunkowana głównie zmianą koncentracji swobodnych nośników ładunku — elektronów w paśmie przewodnictwa i dziur w paśmie walencyjnym.

W przypadku półprzewodnika samoistnego zwiększenie koncentracji swobodnych nośników ładunku ze wzrostem temperatury jest spowodowane wyłącznie termicznym wzbudzeniem elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa (por. rys. 3.10b). Można wykazać, że zależność koncentracji nośników ładunku od temperatury opisuje wtedy wzór  $n = p \sim e^{-E_g/2kT}$ , gdzie  $E_g$  jest szerokością przerwy energetycznej,  $k$  — stałą Boltzmana,  $T$  — bezwzględną temperaturą półprzewodnika. Jak wynika ze wzoru (3.15), przewodnictwo elektryczne samoistnego półprzewodnika określa wzór

$$\sigma = \sigma_{0i} e^{-E_g/2kT}, \quad (3.16)$$

gdzie współczynnik  $\sigma_{0i}$  słabo zależy od temperatury. Jest widoczne, że przewodnictwo elektryczne samoistnego półprzewodnika zależy głównie od szerokości jego przerwy energetycznej i silnie rośnie ze wzrostem temperatury. Przykładowo, zmianę przewodnictwa elektrycznego krzemu w miarę wzrostu temperatury ilustruje tabela 3.2.

$T$ [K]	300	400	500
$\sigma$ [ $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ]	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^1$	$1 \cdot 10^4$

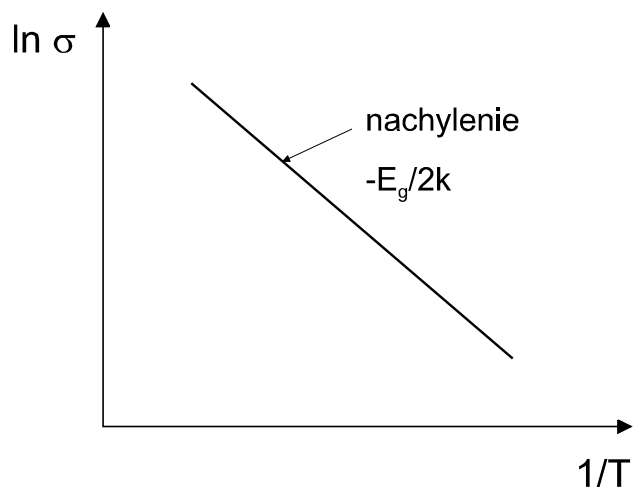
Tabela 3.2: Zależność przewodnictwa elektrycznego krzemu od temperatury (wartości przybliżone).

Wynika z niej, że zwiększenie temperatury krzemu o 100 K powoduje wzrost jego przewodnictwa o ok. 4 rzędy wielkości, tj. 10 000 razy! Logarytmując wzór (3.16) otrzymujemy zależność  $\ln \sigma = \ln \sigma_{0i} - E_g/2kT$ . Wykres przewodnictwa samoistnego półprzewodnika w skali  $\ln \sigma - 1/T$  będzie więc prostą o nachyleniu  $-E_g/2k$  (rys. 3.14), co umożliwi wyznaczenie szerokości  $E_g$  przerwy energetycznej półprzewodnika.

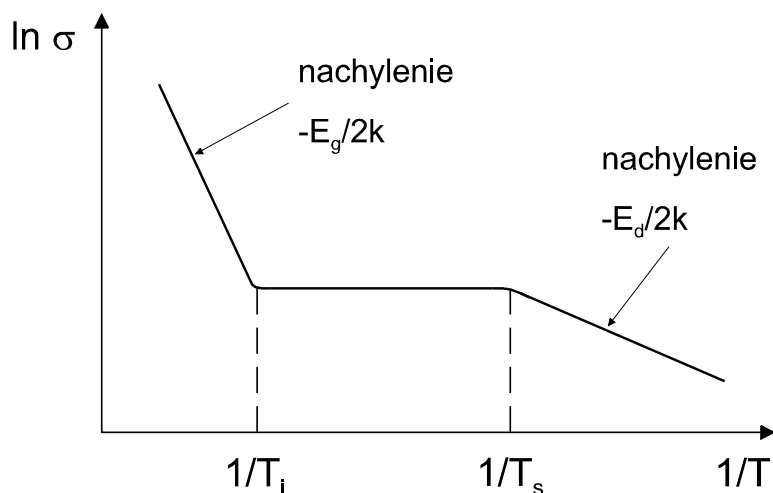
Rozpatrzmy teraz przypadek półprzewodnika domieszkowego typu n. W niskich temperaturach można przyjąć, że wszystkie elektrony w paśmie przewodnictwa pochodzą od wzbudzonych domieszek donorowych (por. rys. 3.11b) i nie brać pod uwagę przejść elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. Zależność koncentracji elektronów od temperatury opisuje wtedy wzór  $n \sim e^{-E_d/2kT}$ , gdzie  $E_d$  jest odległością poziomów donorowych od krawędzi pasma przewodnictwa. Ze wzoru (3.13) wynika, że przewodnictwo elektryczne półprzewodnika w tym przedziale temperatury określa wzór

$$\sigma = \sigma_{0d} e^{-E_d/2kT}. \quad (3.17)$$

Na wykresie  $\ln \sigma - 1/T$  zależność ta będzie przedstawiać prostą o nachyleniu  $-E_d/2k$ . W miarę wzrostu temperatury stopniowo dochodzi do całkowitej jonizacji domieszek. Temperaturę odpowiadającą wyczerpaniu domieszek oznaczmy przez  $T_s$ . Dla  $T > T_s$  koncentracja elektronów będzie



Rysunek 3.14: Temperaturowa zależność przewodnictwa elektrycznego samoistnego półprzewodnika



Rysunek 3.15: Zależność przewodnictwa elektrycznego półprzewodnika typu n od temperatury

równa koncentracji domieszek donorowych  $N_d$ ,  $n = N_d$  a przewodnictwo elektryczne półprzewodnika będzie w przybliżeniu niezależne od temperatury,  $\sigma \approx const$ . Przy dalszym wzroście temperatury koncentracja elektronów, wzbudzanych z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa, może przekroczyć  $N_d$ . Oznacza to przejście półprzewodnika domieszkowego w stan przewodnictwa samoistnego w pewnej temperaturze  $T_i$ . Przewodnictwo elektryczne półprzewodnika dla  $T > T_i$  określa więc wzór (3.16). Temperaturę

zależność przewodnictwa półprzewodnika typu n w skali  $\ln \sigma - 1/T$  pokazuje rysunek 3.15. Pomiar tej zależności umożliwia określenie szerokości przerwy energetycznej  $E_g$  i głębokości poziomów donorowych  $E_d$  w półprzewodniku.

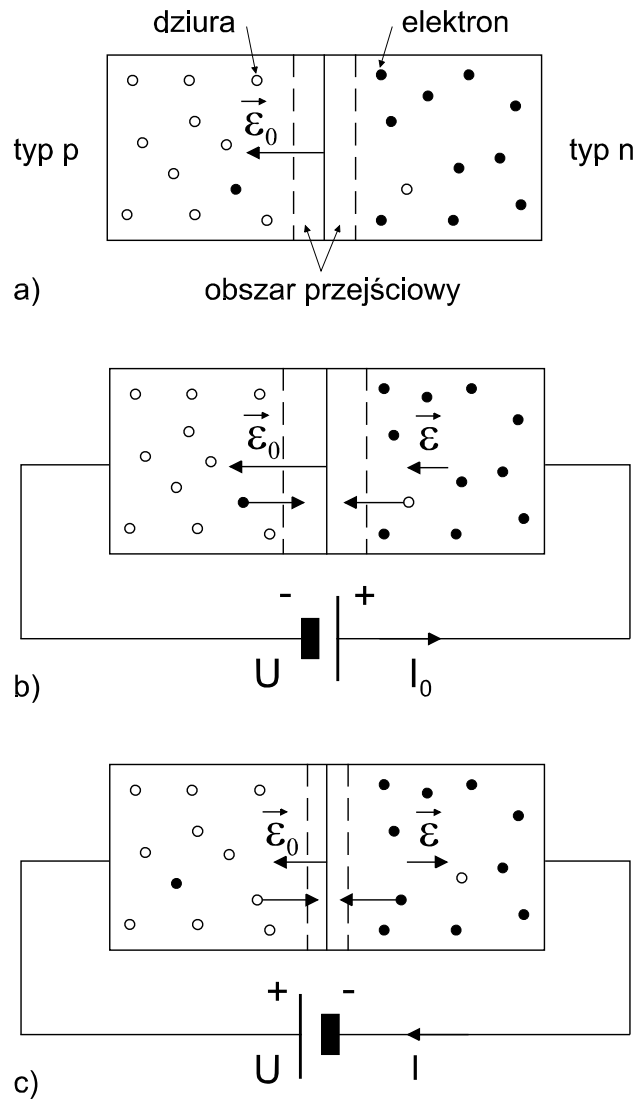
Analogiczne zależności stosują się, po oczywistej zmianie oznaczeń ( $n \rightarrow p$ ,  $N_d \rightarrow N_a$ ,  $E_d \rightarrow E_a$ ;  $N_a$ , i  $E_a$  — koncentracja akceptorów i odległość ich poziomów energetycznych od krawędzi pasma walencyjnego), do półprzewodnika typu p.

### 3.5 Złącze p-n. Tranzystor bipolarny

Rozpatrzmy teraz przepływ prądu elektrycznego przez złącze półprzewodnikowe, stanowiące połączenie półprzewodników typu p i n — *złącze p-n*. Założymy najpierw, że nie ma zewnętrznego pola elektrycznego, przyłożonego do złącza (rys. 3.16a). Z dala od granicy złącza koncentracje nośników ładunku w półprzewodnikach typu p i n odpowiadają koncentracjom równowagowym (występującym w oddzielnych półprzewodnikach p i n). W pobliżu granicy złącza zachodzi dyfuzja dziur z materiału typu p, gdzie ich koncentracja jest znacznie większa, do materiału typu n, oraz dyfuzja elektronów w przeciwnym kierunku. W rezultacie obszar półprzewodnika typu n ładuje się dodatnio a obszar półprzewodnika typu p — ujemnie. Wytworzone pole elektryczne  $\vec{E}_0$  powoduje przepływ nośników ładunku w odwrotnym kierunku — dziur od obszaru n do obszaru p i elektronów od obszaru p do obszaru n. W rezultacie ustala się stan równowagi, w którym wypadkowy prąd, płynący przez granicę złącza, jest równy zero. W pobliżu granicy złącza zachodzi intensywne rekombinacja elektronów z dziurami i koncentracje nośników obu znaków są tam bardzo niskie. Szerokość przejściowego obszaru jest stosunkowo mała, rzędu  $10^{-5}$  cm.

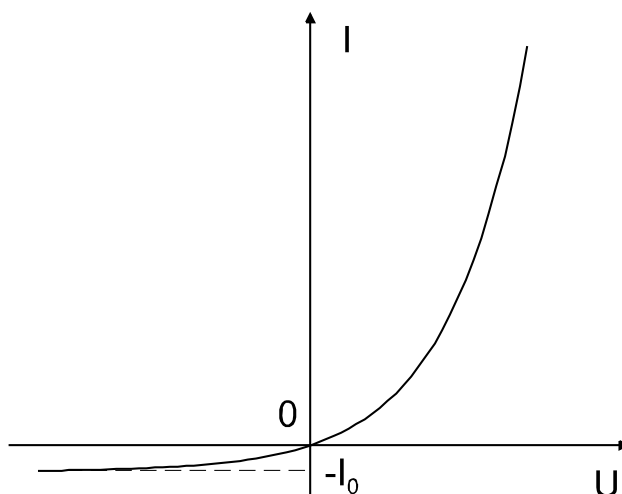
Założymy teraz że do złącza zostało przyłożone pole elektryczne tak, że obszar n ma potencjał dodatni a obszar p — potencjał ujemny (tzw. kierunek zaporowy przyłożonego napięcia, rys. 3.16b). Ponieważ dziury poruszają się w kierunku zewnętrznego pola elektrycznego  $\vec{E}$  a elektrony w kierunku przeciwnym do  $\vec{E}$ , prąd elektryczny w obszarze przejściowym mogą wówczas przenosić wyłącznie dziury przechodzące z obszaru n oraz elektrony przechodzące z obszaru p. Koncentracja tych nośników jest jednak niewielka i natężenie płynącego prądu  $I_0$  ma małą wartość. Dziury w półprzewodniku typu n i elektrony w półprzewodniku typu p nazywa się, z uwagi na ich małą koncentrację, nośnikami mniejszościowymi. Prąd przepływający przez złącze p-n spolaryzowane w kierunku zaporowym jest więc prądem nośników mniejszościowych.

Jeżeli do złącza p-n zostanie przyłożone pole elektryczne  $\vec{E}$  w przeciwnym kierunku tak, że obszar p ma potencjał dodatni a obszar n — potencjał ujemny (tzw. kierunek przewodzenia, rys. 3.16c), to prąd elektryczny w obszarze przejściowym będą przenosić dziury dochodzące tam z obszaru p i



Rysunek 3.16: Złącze p-n: a) niespolaryzowane, b) spolaryzowane w kierunku zaporowym, c) spolaryzowane w kierunku przewodzenia

elektrony dochodzące z obszaru n. Ponieważ koncentracja tych nośników jest duża, natężenie płynącego prądu  $I$  jest stosunkowo wysokie,  $I \gg I_0$ . Dziury w półprzewodniku typu p i elektrony w półprzewodniku typu n są nazywane nośnikami większościowymi. Przez złącze p-n, spolaryzowane w kierunku przewodzenia, płynie zatem prąd nośników większościowych. Trzeba zauważyć, że pole elektryczne  $\vec{\mathcal{E}}_0$  w przejściowym obszarze ma wówczas kierunek przeciwny do przyłożonego pola zewnętrznego  $\vec{\mathcal{E}}$ . Do przebycia tego obszaru potrzebna jest więc pewna dodatkowa energia, którą nośniki ładun-



Rysunek 3.17: Charakterystyka prądowo-napięciowa złącza p-n

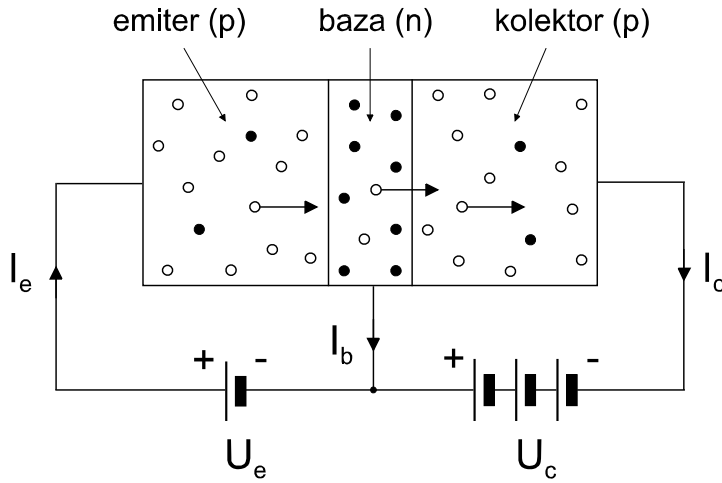
ku uzyskują od cieplnych drgań atomów w sieci krystalicznej.

Bardziej szczegółowe rozważania pozwalają wyprowadzić wzór, określający zależność natężenia prądu  $I$  płynącego przez złącze p-n od przyłożonego napięcia  $U$ , czyli tzw. charakterystykę prądowo-napięciową złącza. Ma on postać

$$I = I_0 [\exp(eU/kT) - 1], \quad (3.18)$$

gdzie  $I_0$  jest natężeniem prądu nośników mniejszościowych,  $e$  — ładunkiem elementarnym,  $k$  — stałą Boltzmana,  $T$  — temperaturą bezwzględną. Dodatnie wartości  $U$  i  $I$  odpowiadają kierunkowi przewodzenia a ujemne — kierunkowi zaporowemu. Dla wartości  $eU/kT \gg 1$  w podanym wzorze można pominąć jedynkę, co daje zależność  $I \approx I_0 \exp(eU/kT)$ . Prąd wzrasta wówczas gwałtownie (w przybliżeniu wykładniczo) ze wzrostem napięcia. Natomiast dla  $eU/kT \ll -1$  we wzorze można zaniedbać czynnik wykładniczy, skąd otrzymuje się  $I \approx -I_0$ . Natężenie prądu dąży wtedy do stałej wartości. Przebieg charakterystyki prądowo-napięciowej złącza p-n pokazuje rysunek 3.17. Jest ona nieliniowa i asymetryczna, wobec czego złącze p-n może być wykorzystane np. jako prostownik prądu zmiennego.

Najważniejszym chyba zastosowaniem półprzewodników są *tranzystory*. *Złączowy tranzystor bipolarny* składa się z dwóch połączonych ze sobą złącz p-n. Z zasadą jego działania zapoznamy się na przykładzie tranzystora p-n-p, w którym obszary skrajne są półprzewodnikami typu p a cienki obszar środkowy, o grubości rzędu  $10^{-3}$  cm — półprzewodnikiem typu n (rys. 3.18). Tranzystor taki może być użyty jako wzmacniacz, jeżeli jedno złącze p-n jest spolaryzowane w kierunku przewodzenia a drugie w kierunku zaporowym.



Rysunek 3.18: Tranzystor p-n-p. Przyłożone napięcia spełniają warunek  $U_c \gg U_e$

Obszar środkowy n tranzystora nazywa się *bazą*. Obszary skrajne p nazywają się *emiterem* i *kolektorem*, przy czym emiter ma potencjał dodatni a kolektor potencjał ujemny względem bazy.

Działanie tranzystora p-n-p zależy głównie od transportu w nim dziur i będziemy rozpatrywać tylko to zjawisko. Ponieważ złącze emiter-baza jest spolaryzowane w kierunku przewodzenia, prąd  $I_e$  dziur płynących przez to złącze jest stosunkowo duży. Obszar bazy ma niewielką grubość i większa część dziur przechodzi na skutek zjawiska dyfuzji do obszaru kolektora, powodując przepływ prądu  $I_c$  przez złącze baza-kolektor. Jedynie niewielka część dziur rekombinuje z elektronami w obszarze bazy, dając prąd  $I_b$ . Wynika stąd, że  $I_c \approx I_e$ ; dla typowych tranzystorów wartości  $I_c/I_e$  są rzędu 0,95 – 0,995. Dla rozpatrywanego obwodu wzmocnienie prądowe tranzystora jest więc nieco mniejsze od jedności. Natomiast wzmocnienie mocy i wzmocnienie napięciowe może być duże, ponieważ opór  $R_c$  złącza baza-kolektor jest dużo większy (złącze spolaryzowane zaporowo) od oporu  $R_e$  złącza emiter-baza (złącze spolaryzowane w kierunku przewodzenia). Przyjmijmy dla uproszczenia, że oba opory mają stałą wartość. Jeżeli prąd emitera zmienia się o  $\Delta I_e$ , co powoduje zmianę prądu kolektora o  $\Delta I_c$ , to moc sygnału doprowadzonego do tranzystora wynosi

$$P_i = R_e (\Delta I_e)^2 \quad (3.19)$$

a moc odbieranego sygnału jest równa

$$P_o = R_c (\Delta I_c)^2. \quad (3.20)$$

Ponieważ  $\Delta I_c \approx \Delta I_e$ , z podanych wzorów otrzymujemy

$$P_o \approx \frac{R_c P_i}{R_e}. \quad (3.21)$$

Biorąc pod uwagę, że  $R_c \gg R_e$ , widać, że moc wyjściowa sygnału w obwodzie kolektora jest znacznie większa od mocy wejściowej w obwodzie emitera. Dla typowych tranzystorów wartość  $R_c/R_e \approx 20$  i tyle wynosi uzyskiwane wzmocnienie mocy oraz, jak można pokazać w podobny sposób, wzmocnienie napięcia.

Warto zwrócić uwagę, że we współczesnej elektronice coraz większe znaczenie mają *tranzystory unipolarne* (tranzystory polowe, w skrócie FET — Field Effect Transistor), w których transport nośników zachodzi w materiale półprzewodnikowym jednego typu — p lub n. Nie będziemy tutaj omawiać zasady ich działania. Należy też zauważyć, że obecnie elementy elektroniczne wykonuje się najczęściej tzw. *technologią planarną* na powierzchni materiału półprzewodnikowego, zwykle krzemu. Umożliwia to uzyskanie dużej gęstości powierzchniowej upakowania elementów i konstrukcję złożonych *obwodów scalonych* na pojedynczej płytce półprzewodnika. Przykładowo, mikroprocesory Pentium firmy Intel zawierają ok. 10 milionów tranzystorów na płytce o powierzchni kilku  $\text{cm}^2$ .



# Bibliografia

- [1] B. Jaworski, A. Dietłaf, L. Miłkowska — Kurs fizyki, t. II - III.
- [2] J. Massalski, M. Massalska — Fizyka dla inżynierów, t. I - II.
- [3] R. Resnick, D. Halliday — Fizyka, t. II.
- [4] V. Acosta, C.L. Covan, B.J. Graham — Podstawy fizyki współczesnej.



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Kwantowa teoria promieniowania</b>	<b>1</b>
1.1	Fotony. Zjawisko fotoelektryczne . . . . .	1
1.2	Promienie Roentgena . . . . .	5
1.3	Dyfrakcja promieni Roentgena. Wzór Bragga . . . . .	8
1.4	Zjawisko Comptona . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Mechanika kwantowa</b>	<b>13</b>
2.1	Widmo atomu wodoru. Model Bohra atomu wodoru . . . . .	13
2.2	Fale de Broglie'a. Dyfrakcja fal materii . . . . .	18
2.3	Zasada nieoznaczoności Heisenberga . . . . .	22
2.4	Funkcja falowa. Równanie Schrödingera . . . . .	25
2.5	Przykłady rozwiązań równania Schrödingera . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Fizyka ciała stałego</b>	<b>33</b>
3.1	Klasyfikacja ciał stałych . . . . .	33
3.2	Pasmowa teoria ciał stałych . . . . .	38
3.3	Półprzewodniki samoistne i domieszkowe . . . . .	41
3.4	Przewodnictwo elektryczne półprzewodników . . . . .	44
3.5	Złącze p-n. Tranzystor bipolarny . . . . .	49