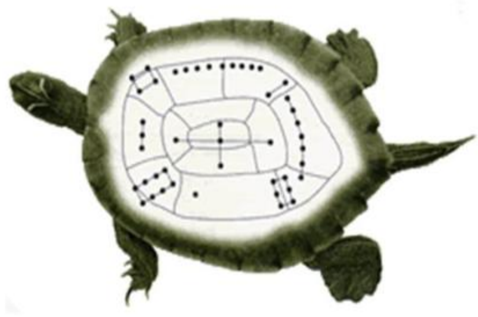
1 Kwadraty magiczne

1.1 Tło historyczne

Podłoże historyczne kwadratów magicznych sięga czasów starożytnych.
Najstarszy i najbardziej znany kwadrat magiczny powstał już około 2800r p.n.e. w Chinach. Nazwany został kwadratem magicznym Loh-Shu.
Istnieje legenda mówiąca, o tym, że wiele lat temu, kiedy ogromne powodzie zalewały Chiny, z jednej z rzek wynurzył się żółw. Zauważył go cesarz Lo, który nazwał specyficzne znaki na jego grzbiecie, unikalnym schematem. Jak się później okazało, była to wskazówka, która pomogła zrozumieć ludziom, jak uspokoić boga rzeki i uchronić kraj przed dalszymi powodziami.



Rysunek 1: Żółw Loh-Shu

W rezultacie oznaczenia wyryte na powłoce żółwia tworzyły magiczny kwadrat 3x3. Numery zostały tak rozmieszczone, że suma liczb w wierszach i w kolumnach dawała 15. Wygląda on następująco:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Rysunek 2: Kwadrat magiczny Loh-Shu

Przez długi czas Chinczycy uważali kwadrat za symbol wielkiego znaczenia. Uważano, że numery parzyste stanowią żeńską zasadę yin (żeńską zasade natury, którą tym samym uznaje sie za słabą i bierną), a numery nieparzyste oznaczały męskie zasady yang (aktywna, silna). Twierdzili również, że liczba 5 bedąca w środku oznacza ziemię wokół której leżą cztery elementy:

metal tj. 4 i 9
ogień tj. 2 i 7
woda tj. 1 i 6
drewno tj. 3 i 8 .

Kolejny etap rozwoju kwadratów magicznych rozpoczął się w Indiach, gdyż to właśnie tam został odkryty magiczny kwadrat rzędu czwartego.

Inną kulturą, która na swój użytek wykorzystała moc magicznych kwadratów jest kultura żydowska. Ich kwadrat magiczny składał się wyłącznie z nieparzystych liczb, co odróżniało je od kwadratów chińskich. Literowe odpowiedniki tych liczb, miały tworzyć imię Boga. Litery te, zapisane w fromie kwadratu na pergaminie, posiadały moc uzdrawiania, a nawet przywracania zmarłych do życia.

Islamczycy i Arabowie przejeli wiedzę o kwadratach magicznych dopiero około IX wieku n.e..Używano ich do astrologii oraz do przepowiedni. To właśnie Islamscy matematycy wprowadzili po raz pierwszy, prostą zasadę tworzenia kwadratów magicznych.

Od tego czasu magiczne kwadraty były rozważane w wielu kwestiach, na przykład w relacjach w stosunku do planet, słońca, sztuki i religii. W przeszłości stały się bardzo ważne, również dla kultury afrykańskiej. Dla nich kwadraty magiczne miały znaczenie duchowe. Wypisywali je sobie na ubraniach, maskach, przedmiotach religijnych oraz na budynkach.

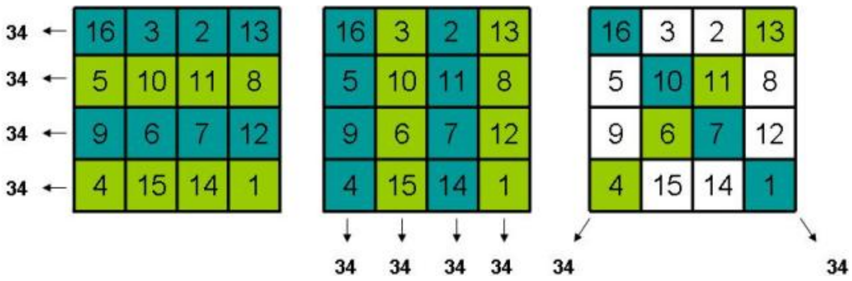
Około XIV wieku, matamatyk Manual Moschopoulos napisał książkę o kwadratach magicznych i to właśnie jemu zawdzięczamy pierwsze prawidła ich konsturowania w Europie. Były one związane z wróżbami, alchemią, astrologią i nie tylko, w czasach nowożytnych układ ten, zaintrygował również matematyków. Wielkimi naukowcami, którzy rozprawiali się na ten temat był Frenicle de Bessy , który opisał aż 880 magicznych kwadratów zbudowanych z 16 pól, Pierre Fermat oraz wielu innych.
Tak do dziś dnia, temat ten, jest wciąż analizowany i rozwijany przez naukowców.

Kwadraty magiczne stały się „inspiracją" do zdefiniowania macierzy.
Jest ich nieskończenie wiele, lecz nie mają żadnych zastosowań (oprócz tych „filozoficznych"). To tak jak z muzyką, lub też poezją, również nie mają one zastosowania, a ich rola w życiu jest jednak duża.

1.2 Definicje i notacje

Definicja 1 ***Kwadrat magiczny rzędu n*** *jest tablicą lub macierzą składającą się z n wierszy i n kolumn, w którą wpisano n^2 różnych, dodatnich liczb naturalnych. Suma liczb w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na każdej przekątnej jest taka sama.Jest to tak zwana* ***suma magiczna****.*

Przykład:



Rysunek 3: Magiczny kwadrat 4x4

Suma magiczna każdego kwadratu zestawionego z ciągu arytmetycznego, czyli ciągu liczb różniących się między sobą o tę samą wartość, jest równa:

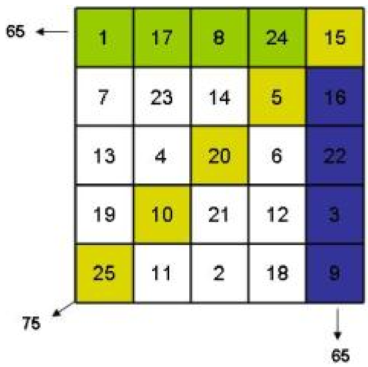
$$S = \frac{n \cdot (n^2 + 1)}{2}$$

1.3 Rodzaje magicznych kwadratów

Niektóre rodzaje kwadratów magicznych posiadają wąską definicję, opartą na dodatkowej własności jaką posiadają. Poniżej przedstawiam jedne z najbardziej powszechnych i najczęściej wymienianych rodzajów kwadratów, które można podzielić ze względu na ustawienie liczb w kwadracie.

Kwadrat półmagiczny jest tablicą nxn, w której suma liczb w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest taka sama, ale sumy liczb w przekątnych są różne.

Przykład:



Rysunek 4: Półmagiczny kwadrat 5x5

Symetryczny kwadrat magiczny jest kwadratem, który dodatkowo posiada własność, że jeśli poprzestawiamy jego kolumny oraz wiersze leżące symetrycznie względem środka kwadratu, to pozostanie on nadal magiczny.

Brzegowy kwadrat magiczny jest kwadratem posiadającym własność mówiącą o tym, że jeśli usuniemy górny i dolny wiersz, lewą i prawą kolumnę („brzegi”) kwadratu to nadal będziemy mieli kwadrat magiczny, lecz już o innej sumie magicznej. Usunięcie w danym kwadracie każdego z czterech „brzegów" powoduje, że kwadrat wciąż pozostaje magiczny.

Przykład:

4	5	6	43	39	38	40
49	15	16	33	30	31	1
48	37	22	27	26	13	2
47	36	29	25	21	14	3
8	18	24	23	28	32	42
9	19	34	17	20	35	41
10	45	44	7	11	12	42

Rysunek 5: Brzegowy kwadrat magiczny 7x7

Zerowy kwadrat magiczny jest tablicą, której suma magiczna jest stała i wynosi 0. Logicznie rzecz biorąc, kwadrat ten, zawiera wartości ujemne. Możemy zatem, powiedzieć, że jest on prawie magiczny.

Przykład:

4	11	-12	-5	2
10	-8	-6	1	3
-9	-7	0	7	9
-3	-1	6	8	-10
-2	5	12	-11	-4

Rysunek 6: Zerowy kwadrat magiczny 5x5

Kwadrat magiczny mnożenia jest tablicą, w ktorej iloczyn elementów z każdej kolumny, z każdego wiersza i z obu przekątnych daje nam tę samą stałą.

Przykład:

432	6	18	16
4	72	24	108
8	36	12	216
54	48	144	2

Rysunek 7: Kwadrat magiczny mnożenia o iloczynie 746 496

Kawadrat magiczny dodawanie-mnożenie jest tablicą, w której zarówno suma jak i iloczyn elementów z każdego wiersza, z każdej kolumny i z obu przekątnych jest stała.

Przykład:

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
58	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

Rysunek 8: Kwadrat magiczny dodawanie-mnożenie

Jest to przykład kwadratu opracowanego przez uczonych Denes i Keedwell'a. Suma magiczna wynosi 840 i jego magiczny iloczyn równa się 2 058 068 231 856 00.

Jest jeszcze wiele innych kwadratów posiadających te szczególne właściwości.

Kwadraty możemy również dzielić w zależności od postępu w jakim idą liczby:

– geometryczne

– arytmetyczne

Innym podziałem kwadratów magicznych może być jeszcze podział w zależności od rzędu kwadratu:

– parzyste np. 2x2, 4x4, 20x20 itd.

– nieparzyste np. 3x3, 9x9, 17x17 itd.

1.4 Metody konstrukcji kwadratów magicznych

Istnieje wiele metod konstrukcji kwadratów magicznych. Oddzielne są dla kwadratów nieparzystych,a oddzielne dla parzystych.

Przedstawię kilka metod konstruowania nieparzystych kwadratów magicznych:

1. **Metoda Hinduska**

   Omówienie tej metody przedstawię na podstawie przykładu tablicy rzędu 7.
   Rozpoczynamy cyfrą 1, którą umieszczamy w polu znajdującym się bezpośrednio pod polem środkowym, następnie ku prawej stronie w dół po przekątnej wypisujemy dalsze elementy naturalnego ciągu liczb.
   Zauważamy, że 4 wypadnie poza kwadrat, dlatego przepisujemy ją w analogiczne pole w kwadracie. Liczba 5 również wypada z kwadratu, zatem robimy z nia to samo, co z czwórką.
   W momencie kiedy dojdziemy do liczby bedącej wielokrotnością rzędu danego kwadratu, w naszym przypadku liczby 7, kierujemy się w dół o dwa pola. Tutaj napotykamy się na liczbę 7 zatem ósemkę stawiamy dwa pola od niej poniżej i w dalszych poczynaniach postępujemy zgodnie z zasadą, wypisując liczby aż do 49.

   W rezultacie dostaliśmy kwadrat o sumie magicznej równej 175.

22	47	16	41	10	35 ↓	4	
5 ↘	23	48	17	42 ↓	11	29	← 5
30	6	24	49	18	36	12	← 30
13	31	7 ↓	25	43	19	37	← 13
38	14 ↓	32	1 ↘	26	44	20	← 38
21 ↓	39	8	33	2 ↘	27	45	← 21
46	15	40	9	34	3 ↘	28	← 46
22 ↑	47 ↑	16 ↑	41 ↑	10 ↑	35 ↑	4 ↑	
						29 ↑	

Rysunek 9: Konstrukcja kwadratu magicznego

← analogiczne pole wewnątrz kwadratu
↑ analogiczne pole wewnątrz kwadratu
↓ kolejna liczba o dwa pola niżej
↘ ku prawej stronie w dół po przekątnej.

2. **Metoda skoków konika szachowego**

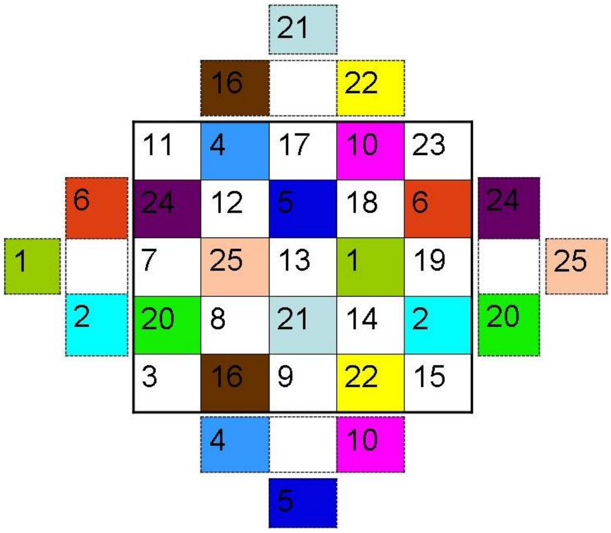
Jest to kolejna ciekawa i niezwykle oryginalna metoda, w pewien sposób podobna do poprzedniej.
Po raz kolejny do przykładu użyję tablicy 7x7.
Wybieramy drugie pole od dołu leżące na przekątnej po lewej, wstawiamy 1 i kolejno idziemy ruchem skoczka szachowego tzn. 2 pola w górę i 1 w prawo, tak wstawiamy następne liczby naturalne skończywszy na 49. Znów musimy pamiętać o zasadach, że gdy skoczek wyjdzie poza odręb kwadratu należy go wprowadzić na pole analogiczne do pola wewnątrz kwadratu. Kiedy dojdziemy do wielokrotności liczby 7 stawiamy skoczka jedno pole niżej, po czym kontynuujemy „skoki".

		18	35	45	13	23	40
	9	26		4	21	31	48
7	17	34	44	12	22	39	7
8	25	42	3	20	30	47	
16	33	43	11	28	38	6	16
24	41	2	19	29	46	14	24
32	49	10	27	37	5	15	32
40	1	18	35	45	13	23	
48	9	26	36	4	21	31	
					22		

Rysunek 10: Konstrukcja kwadratu magicznego

3. **Metoda Bacheta**

Dobudowujemy do kwadratu 5x5 po cztery kwadraty, ułożone w piramidę, do każdego boku. Rozpoczynamy z dowolnego wierzchołka nowo powstałego „dużego kwadratu" i wpisujemy kolejne liczby naturalne na ukos w dół. Następnie liczby w polach „odstających", przenosimy do pól analogicznych polom, w środku kwadratu (odpowiednie kolory).



Rysunek 11: Konstrukcja kwadratu magicznego

Powyższe przykłady są przykładami metod konstrukcji kwadratów magicznych nieparzystego rzędu. Z parzystymi kwadratami, sytuacja staje się bardziej skomplikowana. Posiadają wiele metod konstrukcji, zależnych od tego, czy rząd kwadratu jest podzielny przez 4 (podwójnie parzyste) czy też nie jest (pojedyńczo parzyste). Niektóre z tych procesów są zbyt skomplikowane, żeby przedstawić je na papierze.

1.5 Podstawowe własności magicznych kwadratów

Własności:

- jeśli każdy składnik, jaki zawiera kwadrat magiczny, zwiększymy lub zmniejszymy o pewną liczbę to nadal pozostanie on magiczny.

  np.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Rysunek 12: Kwadrat magiczny

Po dodaniu do każdego elementu liczby 6, otrzymamy następujący rezultat:

8	15	10
13	11	9
12	7	14

Rysunek 13: Kwadrat magiczny

Wniosek:
Suma magiczna pierwszego kwadratu(rys.12) wynosi 15, a w drugim(rys.13) już po wykonaniu działania, otrzymaliśmy sumę magiczną równą 33. Zatem drugi kwadrat(rys.13) wciąż pozostał magiczny.

- jeśli wszystkie składniki w tablicy podzielimy lub pomnożymy przez jakąś liczbę to kwadrat wciąż pozostanie magiczny.
- z dwóch tablic możemy otrzymać trzecią, jeśli zsumujemy elementy stojące w analogicznych polach
- suma magiczna każdego kwadratu złożonego z elementów ciągu arytmetycznego (czyli ciągu kolejnych liczb różniących się od siebie o tę samą wartość) jest równa połowie sumy pierwszego i ostatniego wyrazu, pomnożonej przez liczbę podziałek boku kwadratu.

  np.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

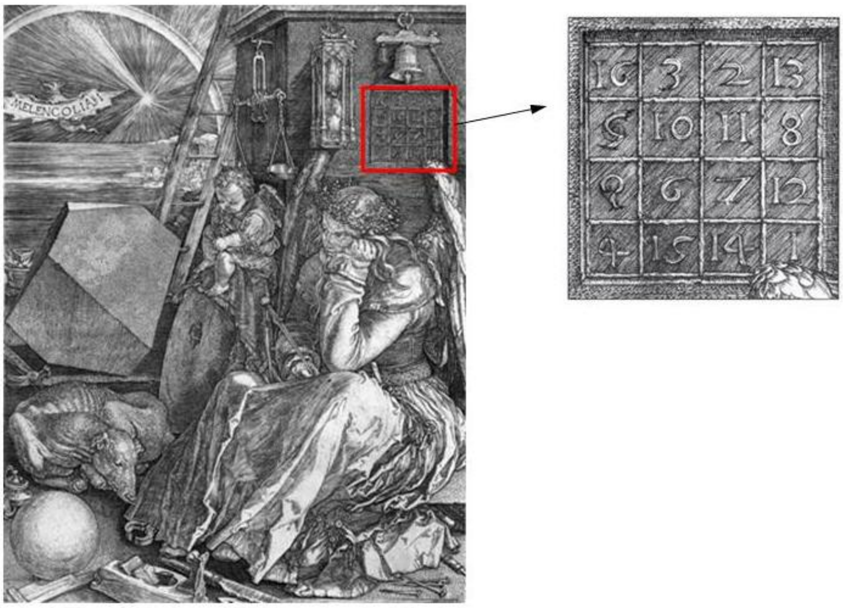
Rysunek 14: Kwadrat magiczny opisany ciągiem arytmetycznym

Składa się z odpowiednio ustawionych liczb od 1 do 9, a zatem mamy $\frac{1}{2} \cdot (1 + 9) \cdot 3 = 15$

1.6 Magia kwadratów w sztuce

Kwadrat magiczny właściwie już od samego początku jego istnienia, ma ogromne znaczenie w sztuce. Pojawia się jako figura symboliczna, magiczna.

Jednym z najbardziej znanych kwadratów magicznych w sztuce jest kwadrat widniejący na obrazie *Melancholia*, którego autorem jest niemiecki malarz Albrecht Dürer.



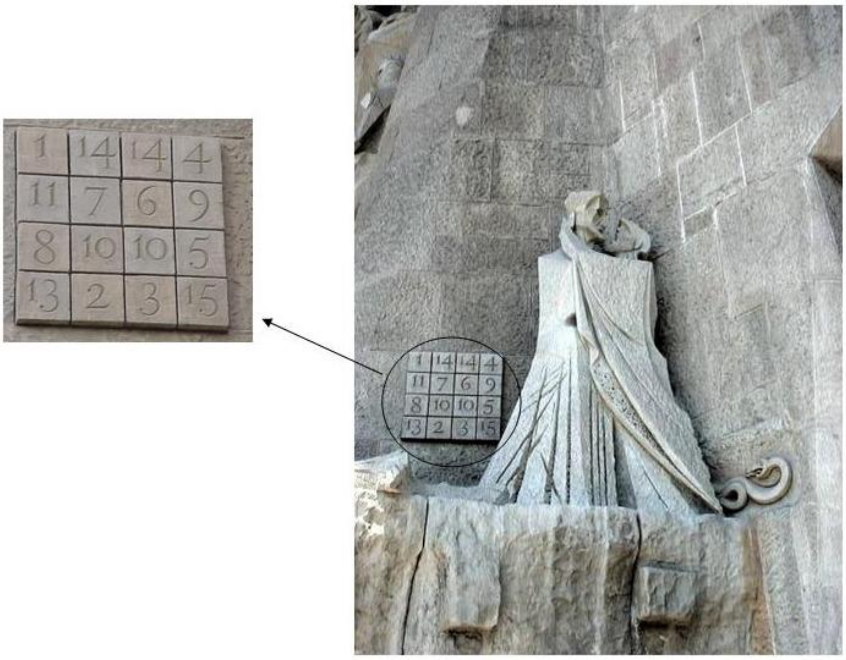
Rysunek 15: Albrecht Dürer *Melancholia*

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Rysunek 16: Kwadrat magiczny Dürera- forma lepiej widoczna

Kwadrat ten, złożony jest z 16 pól. Jego suma magiczna wynosi 34. Otrzymamy ją nie tylko dodając do siebie elementy wierszy, kolumn, czy przekątnych, lecz także dodając do siebie liczby w narożnikach, w każdej ćwiartce kwadratu oraz w czterech środkowych polach. Innym faktem świadczącym o pomysłowości autora jest zestawienie dwóch środkowych liczb dolnego wiersza w sposób dający rok powstania dzieła- 1514.

Inny rodzaj magicznego kwadratu znajdziemy na fasadzie zachodniej- Pasji, Kościoła Świętej Rodziny- Sagrada Familia w Barcelonie. Katedra została zaprojektowana przez katalońskiego architekta Antoniego Gaudi. Niestety w wyniku jego śmierci budowla pozostała niedokończona.



Rysunek 17: Fasada Pasji w Sagrada Familia

Ten tajemniczy kwadrat magiczny, posiada sumę magiczną równą 33, co jest tłumaczone przez ludzi, jako wiek Chrystusa w chwili śmierci.
Zawiera on jeszcze wiele innych możliwości sumowania liczb w celu uzyskania tej samej sumy.

Ciekawą postać kwadratu magicznego znajdziemy w ogrodzie sztuki The Eaton Fine Art Gallery w Palm Beach na Florydzie. Twórcą jest Patrick Ireland.
Rzeźba składa się z 9 słupków, z których każdy, zbudowany jest z określonej ilości bloków. Ilości tych bloków odpowiadają pewnym liczbom, których suma w każdym rzędzie i na przekątnej jest równa 30.

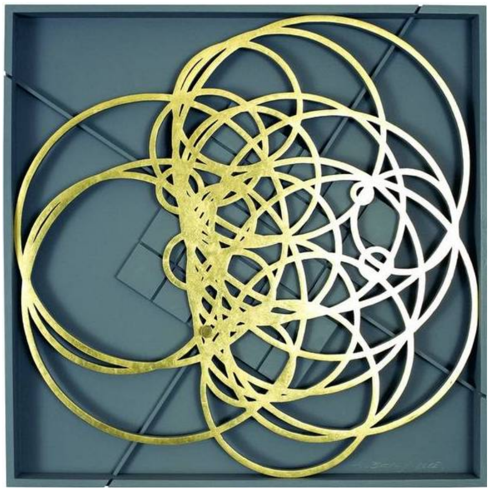
Rysunek 18: The Eaton Fine Art Gallery- kwadrat magiczny

8	6	16
18	10	2
4	14	12

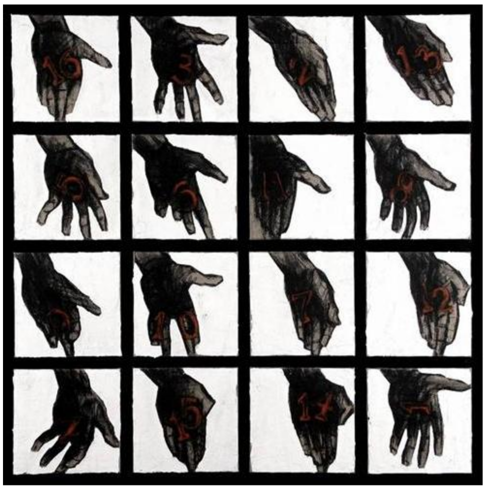
Rysunek 19: Kwadrat magiczny-forma lepiej widoczna

Kwadraty magiczne cieszą się ogromnym zainteresowaniem. Przykładem na to, jest wystawa malarstwaa pod tytułem „Kwadrat magiczny". Pomysłodawcą jest prof. Zbigniew Bajek wykładowca krakowskiej Akademii Sztuk Pięknych. Uczestnicy biorący udział w projekcie mieli za zadanie analizować pojęcie magii i kwadratu oraz ich wzajemne powiązania. W swych pracach sięgali po różne inspiracje i konteksty. Na własny sposób ustanawiali definicje różnych pojęć, przekładając je na ideę artystyczną swojej pracy.
Powstałe prace okazały się sukcesem. Zyskały ogromne uznanie nie tylko w oczach pomysłodawcy, lecz także w oczach osób zwiedzających wystawę. Dzięki temu wystawa nabrała szerszej prezentacji nie tylko w Krakowie, lecz także np. w Tarnowie, w Nowym Sączu, w Częstochowie. Pomogło to również w przygotowaniu katalogu, który pozwoli na promocję twórczości każdego z artysty.

Przykładowe prace:



Rysunek 20: Andrzej Bednarczyk *Kwadratura koła*



Rysunek 21: Zbigniew Bajek *Rachunek sumienia*

Wszystko to świadczy o tym, że temat magicznych kwadratów, jakby się wydawało należący do odległych czasów, jest nadal aktualny i inspirujący twórczo.