Radosław Juszczuk, Wydział FTiMS, Politechnika Gdańska

Dowody o wiedzy zerowej

Dowody o wiedzy zerowej (inaczej: dowody z wiedzą zerową, protokoły wiedzy zerowej, z ang. zero-knowledge proofs, zero-knowledge protocols) to takie procedury kryptograficzne, za pomocą których udowadniamy fakt posiadania pewnej informacji, bez ujawniania jej. Innymi słowy: wykazujemy prawdziwość pewnego stwierdzenia bez ujawniania niczego poza tą prawdziwością.

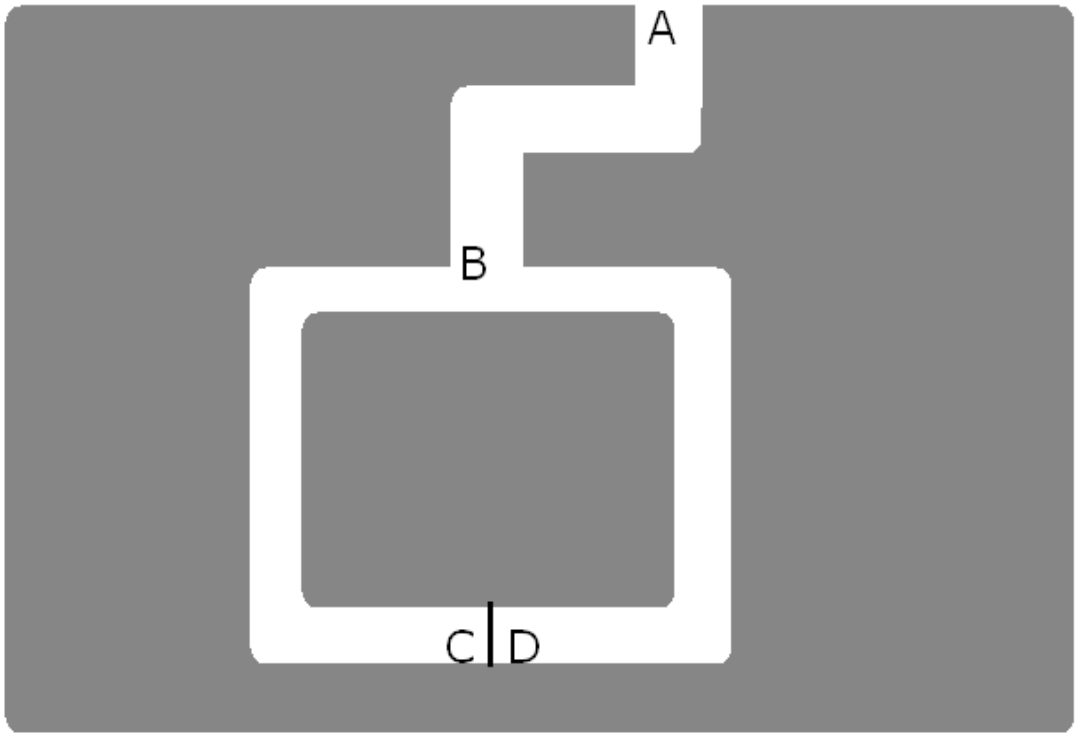
Przykład 1.

Peggy twierdzi, że zna hasło do sejfu jej rodziców. Victor nie daje temu wiary i prosi ją o udowodnienie tego faktu. Peggy przedstawia mu te hasło. Ale teraz zna je też Victor i może wykorzystać w niecnych celach.

Niestety jedynym sposobem na udowodnienie faktu posiadania tej informacji jest jej przedstawienie.

Przykład 2a.

W ciekawy sposób ideę dowodu o wiedzy zerowej wyjaśniono w pochodzącym 1990 roku artykule (autorzy: J.-J. Quisquater, L.Guillou, T. Berson) pod tytułem „Jak wyjaśnić protokoły wiedzy zerowej twoim dzieciom". Podczas gdy tam opowiadano historyjkę o Ali Babie, my posłużmy się uproszczeniem fabuły.



Na rysunku mamy jaskinię zawierającą tajemne drzwi pomiędzy punktami C i D. Drzwi te może otworzyć tylko osoba znająca czarodziejskie zaklęcie. Dla osoby nieznającej zaklęcia oba przejścia kończą się ślepo.

Peggy zna zaklęcie. Victor chce zapłacić jej za możliwość poznania zaklęcia, ale tylko wtedy gdy będzie pewien, że ona naprawdę je zna. Peggy mówi mu, że zdradzi sekret, ale dopiero gdy dostanie pieniądze. Chce więc udowodnić znajomość zaklęcia, ale nie ma zamiaru ujawniać czarodziejskiej formuły. Oto, w jakis posób tego dokonuje:

1. Victor jest w punkcie A.
2. Peggy udaje się do jednego z punktów, C lub D.
3. Kiedy Peggy już tam dociera, Victor przechodzi do punktu B.
4. Victor wydaje Peggy polecenie, aby
    a) wyszła z lewego korytarza, albo
    b) wyszła z prawego korytarza.
5. Peggy spełnia polecenie, w razie potrzeby używając zaklęcia do otwarcia tajemnych drzwi.
6. Peggy i Victor kroki 1.-5. powtarzają n-krotnie.

Zwróćmy uwagę, że Victor nie wie do którego punktu (C czy D) udała się Peggy. Załóżmy, że nie zna ona tajemnej formuły. Wtedy będzie mogła wrócić wybranym przez Victora wyjściem tylko wtedy, gdy wybrała to samo, co on. Jako, że Victor wybiera pomiędzy C i D w sposób losowy, miałaby w takiej sytuacji 50% szans na odgadnięcie jego zamiaru. Jeżeli powtórzą doświadczenie wiele razy, szansa na to, że za każdym razem Peggy uda się wyjść właściwą drogą pomimo nieznajomości zaklęcia będzie niewielka (przy n=16 jest to szansa jedna na 65536). Jeżeli więc za każdym razym Peggy pojawi się we wskazanym przez Victora wyjściu, może on bezpiecznie przyjąć, że zaklęcie jest przez nią znane.

Przykład 2b.

Załóżmy teraz, że Victor ma kamerę i nagrywa wszystko, co widzi. Rejestruje to, jak Peggy znika w jaskini; rejestruje to, co krzyczy do Peggy, gdy żąda by wyszła z jaskini; oraz moment, kiedy Peggy z niej wychodzi. W ten sposób zapisuje na taśmie wszystkie *n* prób.

Postawmy pytanie: Czy jeśli pokaże ten zapis Carol, to na podstawie filmu uwierzy ona, że Peggy zna tajemne hasło?

Na pewno nie. Peggy i Victor mogli przecież ustalić wcześniej kolejność poleceń wydawanych przez Victora, lub w innym wypadku zmontować film z udanych prób odgadnięcia polecenia Victora przez Peggy (gdy nie zna ona zaklęcia).

Victor nie może więc przekonać trzeciej strony o poprawności dowodu.

Dowód o wiedzy zerowej musi spełniać trzy warunki:

1. Zupełność – jeśli twierdzenie jest prawdziwe, uczciwy weryfikator (czyli taki, który postępuje dokładnie według protokołu) zostanie przekonany o tym fakcie przez uczciwą osobę udowadniającą.
2. Słuszność – jeśli twierdzenie jest fałszywe, nieuczciwa (oszukująca) osoba udowadniająca nie przekona weryfikatora o jego prawdziwości, poza przypadkiem, gdy „dopisze jej szczęście" (jednak z minimalnym prawdopodobieństwem).
3. Wiedza zerowa – jeśli twierdzenie jest prawdziwe, nieuczciwy weryfikator nie dowie się na jego temat nic więcej poza tym faktem. W dodatku każdy nieuczciwy weryfikator może zasymulować protokół, który będzie wyglądał jak interakcja między udowadniającym a weryfikatorem.

Badania nad dowodami o wiedzy zerowej zostały prowadzone przede wszystkim na potrzeby systemów uwierzytelniania. Przy uwierzytelanianiu jedna strona chce udowodnić drugiej swoją tożsamość przy pomocy jakiejś tajnej informacji (np. hasła), ale nie chce, by ta druga dowiedziała się czegokolwiek na jej temat.

Dowody wiedzy zerowej nie są dowodami w ściśle matematycznym sensie. Zawsze istnieje bowiem minimalna szansa (*błąd słuszności)*, że nieuczciwa osoba udowadniająca przekona weryfikatora o fałszywym twierdzeniu. Istnieją jednak techniki zmniejszające ten błąd do tak niskich wartości, że można je pominąć.

Izomorfizm grafowy

Grafy G_1 i G_2 nazywamy izomorficznymi, jeżeli istnieje bijekcja zbioru wierzchołków grafu G_1 na zbiór wierzchołków grafu G_2, która zachowuje strukturę grafu (krawędzie). Wiemy, że dla skrajnie dużych grafów stwiedzenie, czy dwa dane grafy są izomorficzne, zajęłoby wieki pracy komputera (jest to problem NP-zupełny).

Przy pomocy izomorfizmu grafów także można przedstawić dowód o wiedzy zerowej. Zakładamy, że Peggy zna izomorfizm między grafami G_1 i G_2. Oto, jaki protokół przekona Victora co do wiedzy Peggy:

1. Peggy dokonuje losowej permutacji wierzchołków grafu G_1 i w ten sposób tworzy graf H izomorficzny do G_1. Ponieważ zna izomorfizm pomiędzy G_1 a H, zna izomorfizm pomiędzy H a G_2. Dla każdej innej osoby znalezienie izomorfizmu pomiędzy G_1 a H albo H a G_2 jest równie trudne co znalezienie izomorfizmu pomiędzy G_1 a G_2 .
2. Peggy przekazuje Victorowi kopię grafu H.
3. Victor żąda od niej wykonania jednej z dwóch rzeczy:
   a) udowodnienia, że G_1 i H są izomorficzne, albo
   b) udowodnienia, że H i G_2 są izomorficzne.
4. Peggy wykonuje polecenie. Robi jedną z dwóch rzeczy:
   a) udowadnia, że G_1 i H są izomorficzne bez udowadniania, że H i G_2 są izomorficzne; albo
   b) udowadnia, że H i G_2 są izomorficzne bez udowadniania, że G_1 i H są izomorficzne.
5. Peggy i Victor powtarzają kroki 1.-4. n-krotnie.

Jeśli Peggy nie zna izomorfizmu pomiędzy G_1 i G_2 , to nie utowrzy grafu H izomorficznego z oboma grafami. Może jedynie utworzyć taki, który jest izomorficzny albo z jednym albo z drugim. Ma więc wtedy tylko 50% szans w każdym cyklu na odgadnięcie tego , którego dowodu zażąda Victor w kroku 3.

Protokół ten nie zdradza Victorowi żadnej informacji, potrzebnej do znalezienia izomorfizmu pomiędzy G_1 a G_2 . Peggy generuje graf H w każdym cyklu protokołu, nie istnieje więc żadna taka informacja, którą Victor może uzyskać nawet po kilku cyklach. Nawet dzięki wielu odpowiedziom Peggy nie odnajdzie on izomorfizmu pomiędzy G_1 a G_2 .

W każdym cyklu Victor otrzymuje nową permutację losową H wraz z izomorfizmem między ha G_1 lub G_2 . Równie dobrze może je wygenerować osobiście. Ponieważ może on utworzyć symulację protokołu, można dowieść, że jest dowodem o wiedzy zerowej.

Cykle Hamiltona

Cykl Hamiltona to taki cykl w grafie, w którym występuje każdy wierzchołek grafu i występuje jeden raz.

Znalezienie cyklu Hamiltona dla grafu jest kolejnym „trudnym problemem".

Peggy zna cykl Hamiltona w grafie G, Victor zna G, ale nie zna cyklu Hamiltona. Peggy chce mu udowodnić, że zna cykl, bez jego ujawniania. Istnieje protokół, dzięki któremu tego może dokonać.

Przedstawione dowody wiedzy zerowej zawierały n wymian informacji między Peggy i Victorem. Można stowrzyć takie protokoły, które będą je wykonywały równolegle. Dla nich jednak zapis protokołu jest niewygodny do symulacji, dalej jednak są to dowody o wiedzy zerowej.

Aby przekonać osobę trzecią, należy użyć niekonwersacyjnego dowodu o wiedzy zerowej (poprzednie były konwersacyjne). Te dowody nie wymagają konwersacji, przykładowa Peggy mogłaby je opublikować i tym samym dowieść prawdziwości twierdzenia. Protokół taki podobny jest do wspomnianego przed chwilą dowodu równoległego, rolę Victora odgrywa funkcja jednokierunkowa (spełniająca rolę bezstronnego losowego generatora bitowego). Aby Peggy mogła oszukać, musiałaby przewidzieć wynik takiej funkcji. Nie ma bowiem żadnego sposobu, aby Peggy mogła wymusić na funkcji wygeerowanie określonych bitów, albo odgadnąć jaki ciąg bitów ona wytworzy.

W takim protokole musi wystąpić znacznie więcej cykli związanych z sekwencją zapytanie/odpowiedź. W protokole konwersacyjnym wykonanie 10 iteracji (prawdopodobieństwo 1/1024, że Peggy oszukuje) jest świetnym zabezpieczeniem. W przypadku niekonwersacyjnego to nie wystarcza. Potrzebuje 64 lub 128 iteracji, aby uznać go za poprawny.

Ten protokół może być stosowany do schematów podpisów cyfrowych.

Manuel Blum udowodnił, że dowolne twierdzenie matematyczne może być przekształcone w graf w taki sposób, że dowód tego twierdzenia jest równoważny z drogą hamiltona w grafie. Przy zastosowaniu dobrej jakości funkcji jednokierunkowych i algorytmów szyfrujących dowolny dowód matematyczny może być przekształcony w dowolny dowód o wiedzy zerowej. Za pomocą tego można dowieść, że zna się dowód konkretnego twierdzenia bez ujawniania jaki to jest dowód.

Klasyfikacja dowodów o wiedzy zerowej:

doskonałe – istnieje przekształcenie (symulator), które umożliwia uzyskanie zapisów identycznie rozproszonych jak rzeczywiste (przykłady – cykl Hamiltona i izomorfizm grafów),
statystyczne - istnieje przekształcenie (symulator), które umożliwia uzyskanie zapisów identycznie rozproszonych jak rzeczywiste oprócz pewnej stałej liczby wyjątków,
obliczeniowe - istnieje przekształcenie (symulator), które umożliwia uzyskanie zapisów nieodróżnialnych od rzeczywistych,
nieformalne – przekształcenie (symulator) może nie istnieć, ale możemy dowieść, że weryfikator nie uzyska żadnej wiedzy z dowodu (przykład dowodu równoległego).

Źródła:
Bruce Schneier - "Kryptografia dla praktyków", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne 2002
Wikipedia