HEX

referat z teorii gier

Michał Krzemiński i Justyna Signerska

Politechnika Gdańska

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

Wstęp

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Outline

- Historia
- Zasady gry
- Strategie
- Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu
- Hex a Topologia
- Hex wielowymiarowy
- Bibliografia

Historia

HEX został wymyślony przez duńskiego wynalazcę, pisarza i matematyka Piet'a Hein'a w 1942 roku i stał się popularny pod nazwą *Polygon*

Historia

HEX został wymyślony przez duńskiego wynalazcę, pisarza i matematyka Piet'a Hein'a w 1942 roku i stał się popularny pod nazwą *Polygon* oraz niezależnie w 1948 roku przez Johna Nasha, który to udowodnił (1949), że

- HEX nigdy nie kończy się remisem,
- pierwszy gracz ma strategię wygrywającą dla gry HEX na planszy dowolnej wielkości.

Historia

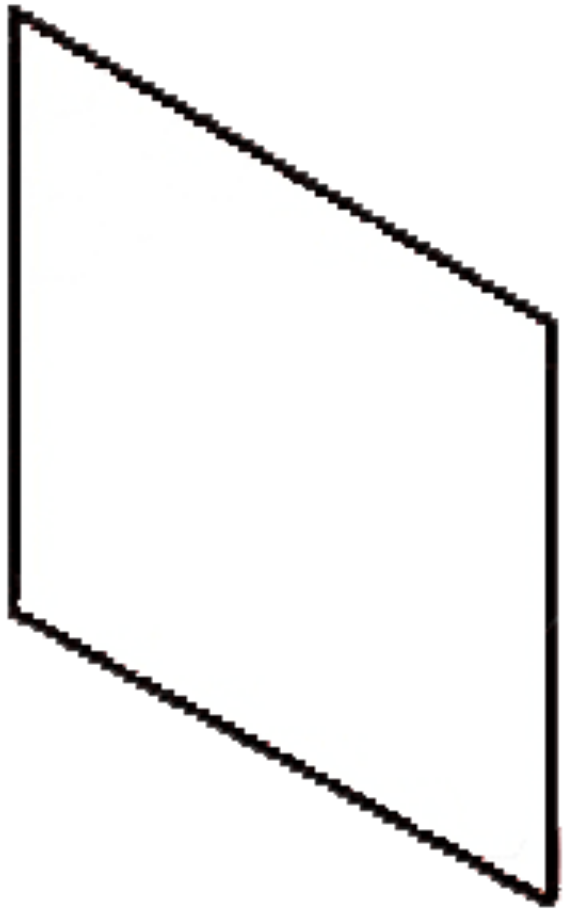
HEX został wymyślony przez duńskiego wynalazcę, pisarza i matematyka Piet'a Hein'a w 1942 roku i stał się popularny pod nazwą *Polygon* oraz niezależnie w 1948 roku przez Johna Nasha, który to udowodnił (1949), że

- HEX nigdy nie kończy się remisem,
- pierwszy gracz ma strategię wygrywającą dla gry HEX na planszy dowolnej wielkości.

W 1979 roku David Gale pokazał, że fakt iż HEX nigdy nie kończy się remisem jest równoważny twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym.

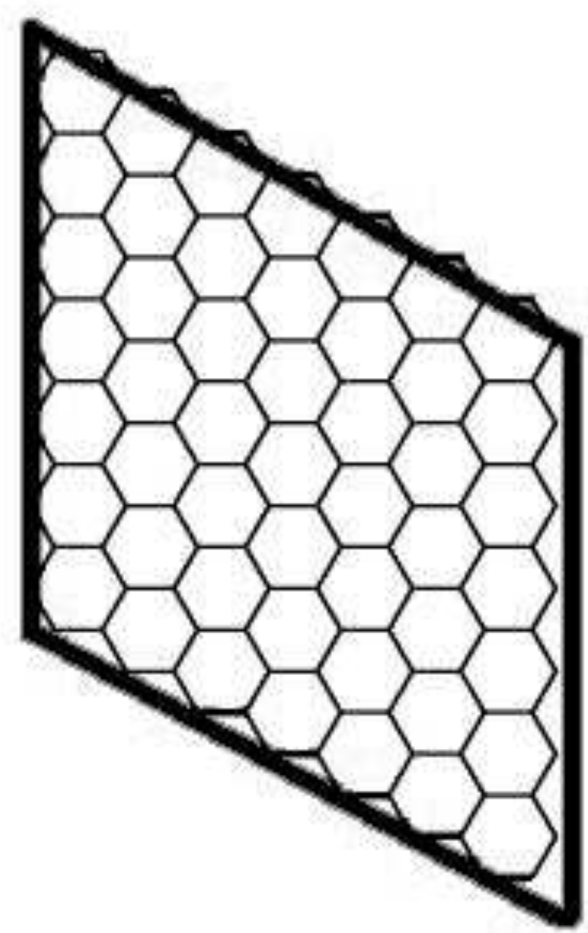
Zasady Gry

Plansza do HEXa



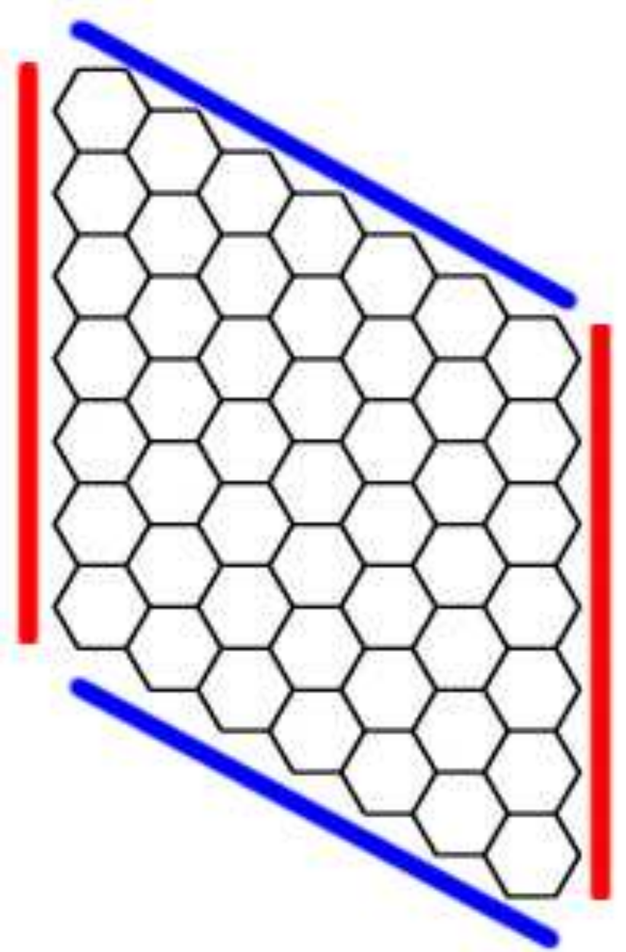
- plansza w kształcie rombu
- o sześciokątnych polach
- i przeciwległych bokach w dwóch kolorach
- rozmiar planszy może być różny jednak zwykle rozgrywki toczą się na planszy 11×11

Plansza do HEXa



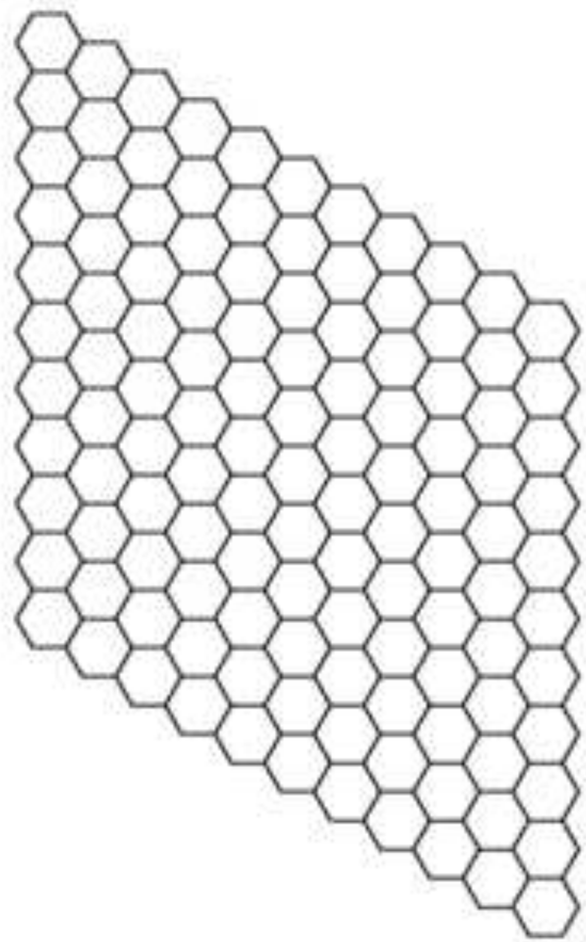
- plansza w kształcie rombu
- o sześciokątnych polach
- i przeciwległych bokach w dwóch kolorach
- rozmiar planszy może być różny jednak zwykle rozgrywki toczą się na planszy 11×11

Plansza do HEXa



- plansza w kształcie rombu
- o sześciokątnych polach
- i przeciwległych bokach w dwóch kolorach
- rozmiar planszy może być różny jednak zwykle rozgrywki toczą się na planszy 11×11

Plansza do HEXa



- plansza w kształcie rombu
- o sześciokątnych polach
- i przeciwległych bokach w dwóch kolorach
- rozmiar planszy może być różny jednak zwykle rozgrywki toczą się na planszy 11×11

Zasady gry

- Dwóch graczy Czerwony i Niebieski grają kolejno.
- Czerwony zaczyna.
- Ruch gracza polega na zajęciu wolnego pola swoim kolorem.
- Grę wygrywa gracz, który utworzy nieprzerwany łańcuch swojego koloru łączący jego brzegi planszy.

Zasady gry

- Dwóch graczy **C**zerwony i **N**iebieski grają kolejno.
- **C**zerwony zaczyna.
- Ruch gracza polega na zajęciu wolnego pola swoim kolorem.
- Grę wygrywa gracz, który utworzy nieprzerwany łańcuch swojego koloru łączący jego brzegi planszy.

Zasady gry

- Dwóch graczy **C**zerwony i **N**iebieski grają kolejno.
- **C**zerwony zaczyna.
- Ruch gracza polega na zajęciu wolnego pola swoim kolorem.
- Grę wygrywa gracz, który utworzy nieprzerwany łańcuch swojego koloru łączący jego brzegi planszy.

Zasady gry

- Dwóch graczy Czerwony i Niebieski grają kolejno.
- Czerwony zaczyna.
- Ruch gracza polega na zajęciu wolnego pola swoim kolorem.
- Grę wygrywa gracz, który utworzy nieprzerwany łańcuch swojego koloru łączący jego brzegi planszy.

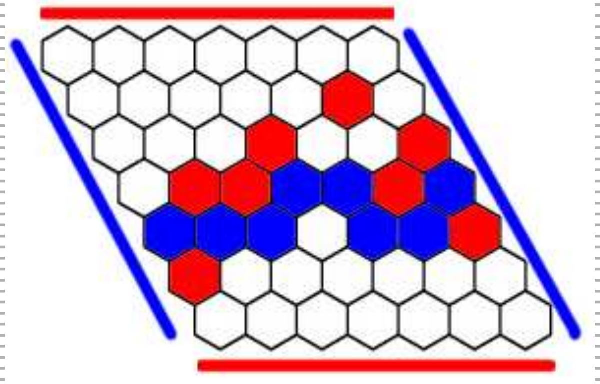


Figure 1: Niebieski wygrał

Zasady gry - *swap rule*

Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

- *Dowód:* (a.a.)
- Załóżmy, że istnieje strategia wygrywająca dla drugiego gracza.
- Pierwszy gracz wykonuje dowolny ruch. Następnie gra gracz drugi.
- Gracz pierwszy "kopiuje" ruchy gracza drugiego, jeżeli nie może wykonać takiego ruchu, wykonuje dowolny inny ruch.
- Ponieważ z założenia gracz drugi ma strategię wygrywającą, a pomijając pierwszy losowy ruch, gracz pierwszy gra jako drugi, ten wygrywa, choć był pierwszy :D.

(*sprzeczność*)

Zasady gry - *swap rule*

Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

- *Dowód:* (a.a.)
- Załóżmy, że istnieje strategia wygrywająca dla drugiego gracza.
- Pierwszy gracz wykonuje dowolny ruch. Następnie gra gracz drugi.
- Gracz pierwszy "kopiuje" ruchy gracza drugiego, jeżeli nie może wykonać takiego ruchu, wykonuje dowolny inny ruch.
- Ponieważ z założenia gracz drugi ma strategię wygrywającą, a pomijając pierwszy losowy ruch, gracz pierwszy gra jako drugi, ten wygrywa, choć był pierwszy :D.

(*sprzeczność*)

Zasady gry - *swap rule*

Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

- *Dowód:* (a.a.)
- Załóżmy, że istnieje strategia wygrywająca dla drugiego gracza.
- Pierwszy gracz wykonuje dowolny ruch. Następnie gra gracz drugi.
- Gracz pierwszy "kopiuje" ruchy gracza drugiego, jeżeli nie może wykonać takiego ruchu, wykonuje dowolny inny ruch.
- Ponieważ z założenia gracz drugi ma strategię wygrywającą, a pomijając pierwszy losowy ruch, gracz pierwszy gra jako drugi, ten wygrywa, choć był pierwszy :D.

(*sprzeczność*)

Zasady gry - *swap rule*

Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

- *Dowód:* (a.a.)
- Załóżmy, że istnieje strategia wygrywająca dla drugiego gracza.
- Pierwszy gracz wykonuje dowolny ruch. Następnie gra gracz drugi.
- Gracz pierwszy "kopiuje" ruchy gracza drugiego, jeżeli nie może wykonać takiego ruchu, wykonuje dowolny inny ruch.
- Ponieważ z założenia gracz drugi ma strategię wygrywającą, a pomijając pierwszy losowy ruch, gracz pierwszy gra jako drugi, ten wygrywa, choć był pierwszy :D.

(*sprzeczność*)

Zasady gry - *swap rule*

Pierwszy gracz ma strategię wygrywającą.

- *Dowód:* (a.a.)
- Załóżmy, że istnieje strategia wygrywająca dla drugiego gracza.
- Pierwszy gracz wykonuje dowolny ruch. Następnie gra gracz drugi.
- Gracz pierwszy "kopiuje" ruchy gracza drugiego, jeżeli nie może wykonać takiego ruchu, wykonuje dowolny inny ruch.
- Ponieważ z założenia gracz drugi ma strategię wygrywającą, a pomijając pierwszy losowy ruch, gracz pierwszy gra jako drugi, ten wygrywa, choć był pierwszy :D.

(*sprzeczność*)

Zasady gry - *swap rule*

Aby zrównoważyć tę przewagę gracza pierwszego wprowadzamy *swap rule*.

Zasady gry - *swap rule*

Aby zrównoważyć tę przewagę gracza pierwszego wprowadzamy *swap rule*.
Po wykonaniu rozpoczynającego ruchu przez pierwszego gracza drugi gracz może zdecydować czy przejąć ten ruch, czy wykonać kolejny własny.

Zasady gry - *swap rule*

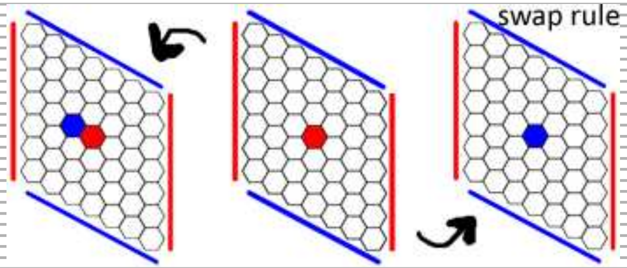
Aby zrównoważyć tę przewagę gracza pierwszego wprowadzamy *swap rule*.
Po wykonaniu rozpoczynającego ruchu przez pierwszego gracza drugi gracz może zdecydować czy przejąć ten ruch, czy wykonać kolejny własny.
W teorii ta zasada zapewnia strategię wygrywającą dla drugiego gracza,

Zasady gry - *swap rule*

Aby zrównoważyć tę przewagę gracza pierwszego wprowadzamy *swap rule*.

Po wykonaniu rozpoczynającego ruchu przez pierwszego gracza drugi gracz może zdecydować czy przejąć ten ruch, czy wykonać kolejny własny.

W teorii ta zasada zapewnia strategię wygrywającą dla drugiego gracza, jednak w praktyce gracz pierwszy wykonuje rozpoczynający ruch w miejscu, dla którego nie ma znanej strategii wygrywającej.



Strategie

Otwarcie

- W przypadku braku zasady "*swap rule*" pierwszy ruch wydaje się oczywisty, należy rozegrać jak najbliżej środka.
- Najsłabszym otwarciem będzie rozpoczęcie w ostrych rogach planszy i pole sąsiednie.
- Jeżeli "*swap rule*" obowiązuje, to gracz drugi powinien zamieniać ruchy przeciwnika, który otworzył grę w centrum planszy.

- Dla plansz do rozmiaru 7×7 włącznie, znane są strategie wygrywające dla pierwszego gracza.

Otwarcie

- W przypadku braku zasady "*swap rule*" pierwszy ruch wydaje się oczywisty, należy rozegrać jak najbliżej środka.
- Najsłabszym otwarciem będzie rozpoczęcie w ostrych rogach planszy i pole sąsiednie.
- Jeżeli "*swap rule*" obowiązuje, to gracz drugi powinien zamieniać ruchy przeciwnika, który otworzył grę w centrum planszy.
- Dla plansz do rozmiaru 7×7 włącznie, znane są strategie wygrywające dla pierwszego gracza.

Otwarcie

- W przypadku braku zasady "*swap rule*" pierwszy ruch wydaje się oczywisty, należy rozegrać jak najbliżej środka.
- Najsłabszym otwarciem będzie rozpoczęcie w ostrych rogach planszy i pole sąsiednie.
- Jeżeli "*swap rule*" obowiązuje, to gracz drugi powinien zamieniać ruchy przeciwnika, który otworzył grę w centrum planszy.
- Dla plansz do rozmiaru 7×7 włącznie, znane są strategie wygrywające dla pierwszego gracza.

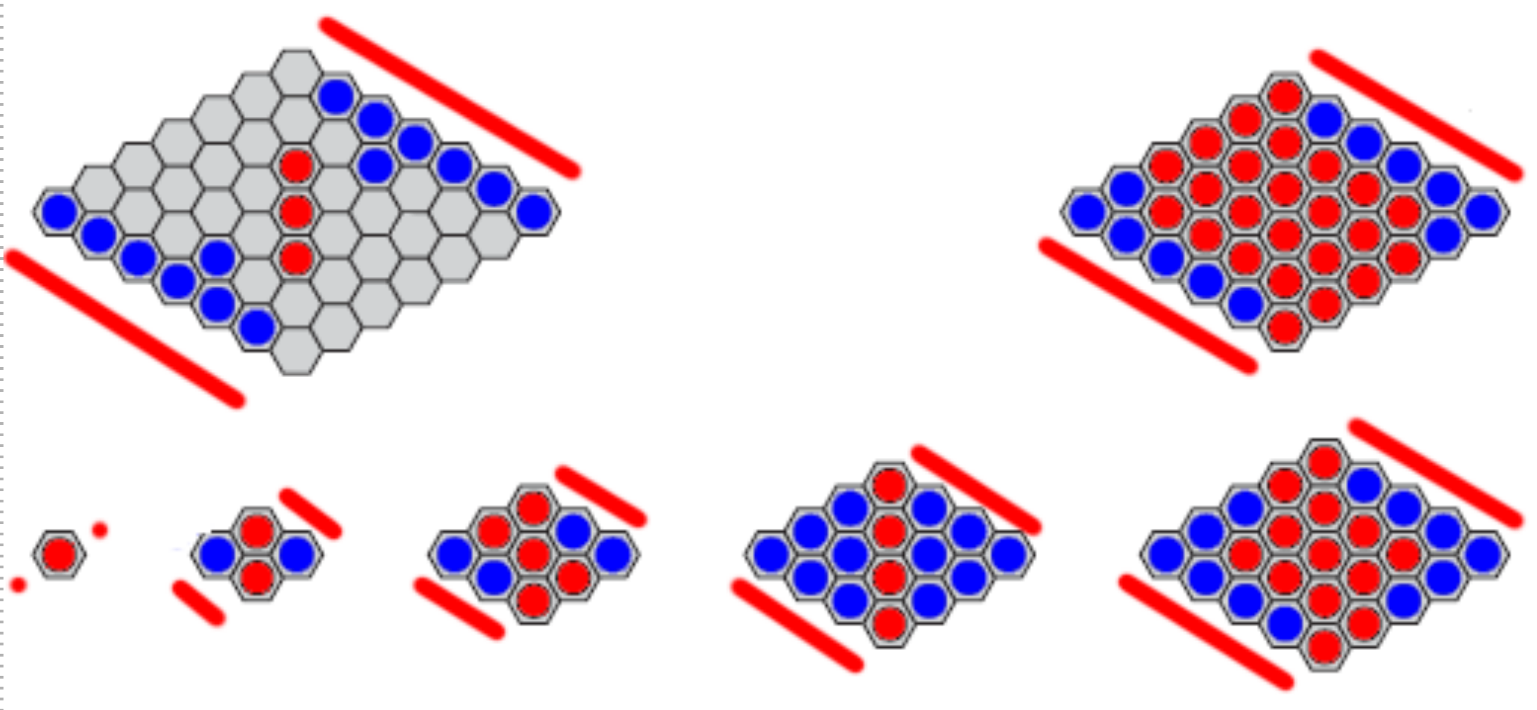
Otwarcie

- W przypadku braku zasady "*swap rule*" pierwszy ruch wydaje się oczywisty, należy rozegrać jak najbliżej środka.
- Najsłabszym otwarciem będzie rozpoczęcie w ostrych rogach planszy i pole sąsiednie.
- Jeżeli "*swap rule*" obowiązuje, to gracz drugi powinien zamieniać ruchy przeciwnika, który otworzył grę w centrum planszy.

- Dla plansz do rozmiaru 7×7 włącznie, znane są strategie wygrywające dla pierwszego gracza.

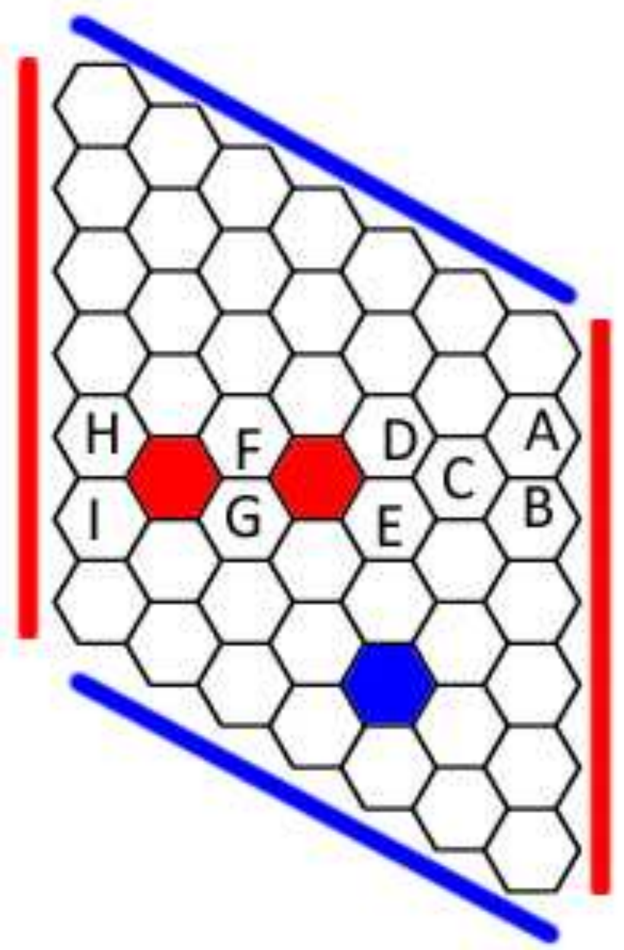
Otwarcie

1-opening results dla plansz 1×1 do 7×7 dla rozpoczynającego gracza **C**zerwonego.



Two-bridge i *sudden death*

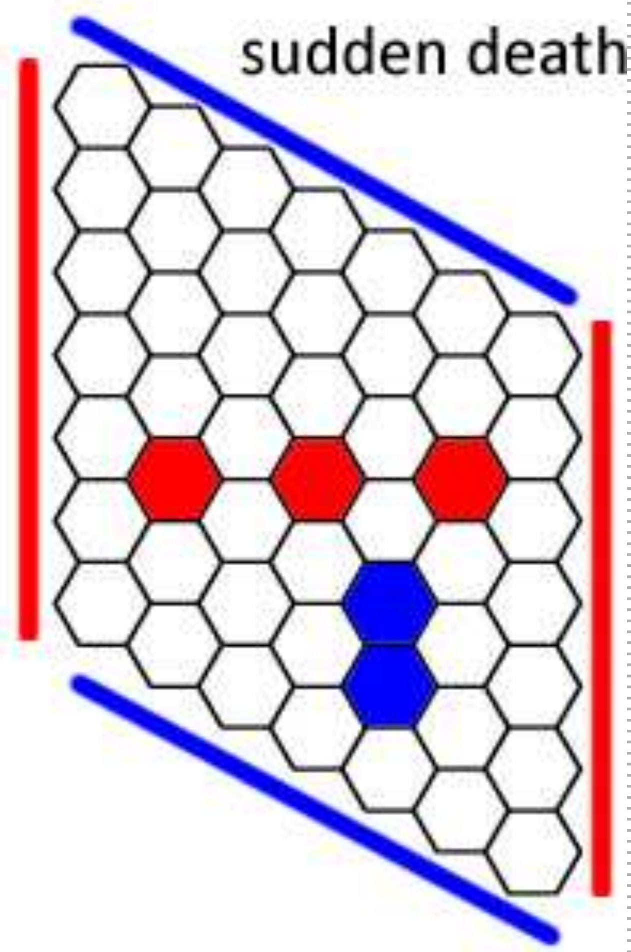
Rozważmy grę



- Jeżeli **N**iebieski nie zagra w pole oznaczone literą, wtedy **C**zerwony może zagrać w ***C***
- Teraz, niezależnie od ruchów **N**iebieskiego możemy utworzyć czerwony łańcuch. *two-bridge*, *virtual connection*

Two-bridge i *sudden death*

Rozważmy grę



- Jeżeli **N**iebieski nie zagra w pole oznaczone literą, wtedy **C**zerwony może zagrać w ***C***
- Teraz, niezależnie od ruchów **N**iebieskiego możemy utworzyć czerwony łańcuch. *two-bridge*, *virtual connection*

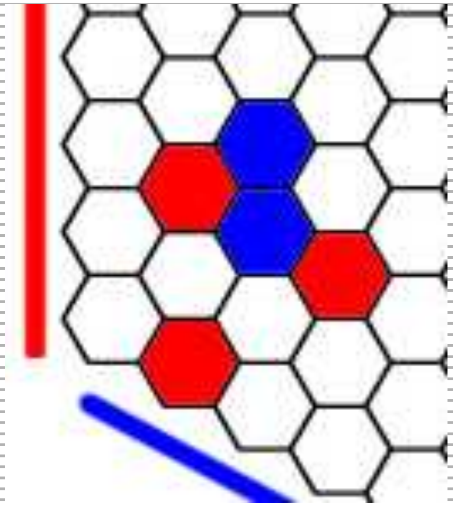
Przykład gry

Bottlenecks i *drabinki*

- *Bottleneck* jest popularnym układem obronnym. Rozważmy grę:
- **N**iebieski został powstrzymany przez formację czerwonego
- Ta figura często prowadzi do kolejnej, tzw. *drabinki*.

Bottlenecks i *drabinki*

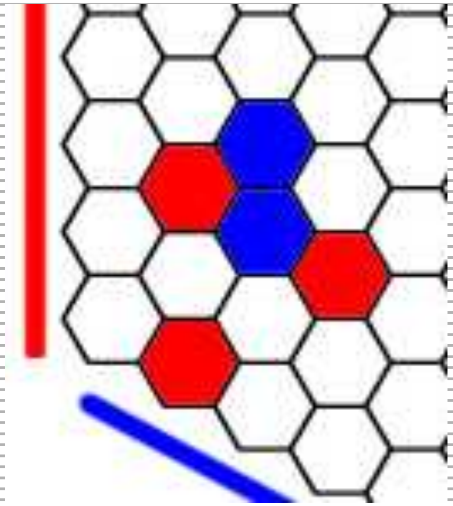
- *Bottleneck* jest popularnym układem obronnym. Rozważmy grę:
- Niebieski został powstrzymany przez formację czerwonego



- Ta figura często prowadzi do kolejnej, tzw. *drabinki*.

Bottlenecks i *drabinki*

- *Bottleneck* jest popularnym układem obronnym. Rozważmy grę:
- **N**iebieski został powstrzymany przez formację czerwonego



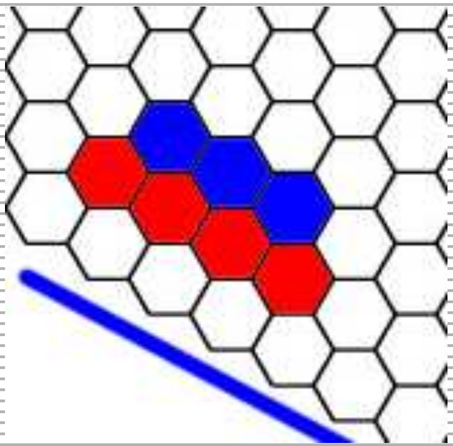
- Ta figura często prowadzi do kolejnej, tzw. *drabinki*.

Bottlenecks i *drabinki*

- *Drabinką* nazywamy sytuację, w której obaj gracze na poruszają się do krawędzi tworząc nieprzerwany łańcuch.
- Łańcuch atakującego jest prawie zawsze dalej od brzegu - dobra strategia obronna

Bottlenecks i *drabinki*

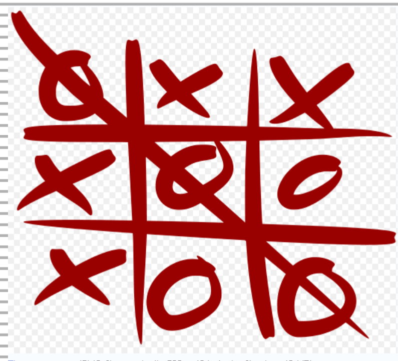
- *Drabinką* nazywamy sytuację, w której obaj gracze na poruszają się do krawędzi tworząc nieprzerwany łańcuch.
- Łańcuch atakującego jest prawie zawsze dalej od brzegu - dobra strategia obronna

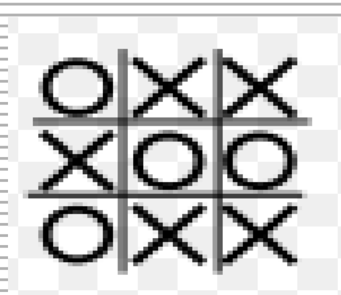


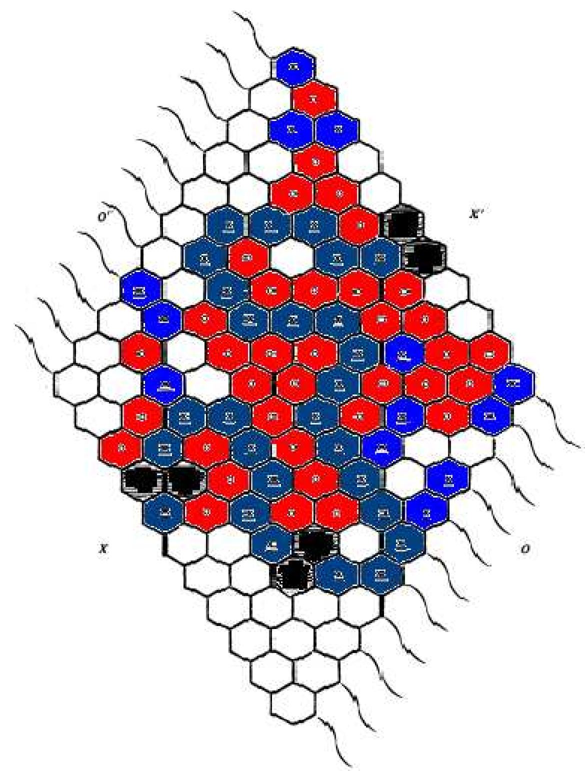
Twierdzenie o skończoności gry i braku remisu

"Twierdzenie o Hexie"

W Hexie, zamiast używać kolorów, możemy równoważnie stawiać „kółka” i „krzyżyki”. Jednakże, w przeciwieństwie do gry w *kółko i krzyżyk*, w Hexie zawsze istnieje zwycięzca.







Gracz **N**iebieski ma zapewnioną wygraną w 3 ruchach.

"Twierdzenie o Hexie"

- **Intuicja:**
  Jeden gracz może *zablokować* drugiego jedynie, jeśli ułoży łańcuch w swoim kolorze łączący „jego” brzegi planszy.
- **Twierdzenie (o Hexie, wersja słabsza)**
  *Jeśli każde pole na planszy Hexa jest pokryte kolorem **N**iebieskim lub **C**zerwonym, to istnieje ścieżka łącząca przeciwległe brzegi **N**iebieskie lub brzegi **C**zerwone.*
- **Twierdzenie (o Hexie, wersja silniejsza)**
  *Jeśli każde pole na planszy Hexa jest pokryte kolorem **N**iebieskim lub **C**zerwonym, to istnieje ścieżka łącząca przeciwległe brzegi **N**iebieskie lub ścieżka łącząca brzegi **C**zerwone, ale nie obie jednocześnie.*

"Twierdzenie o Hexie"

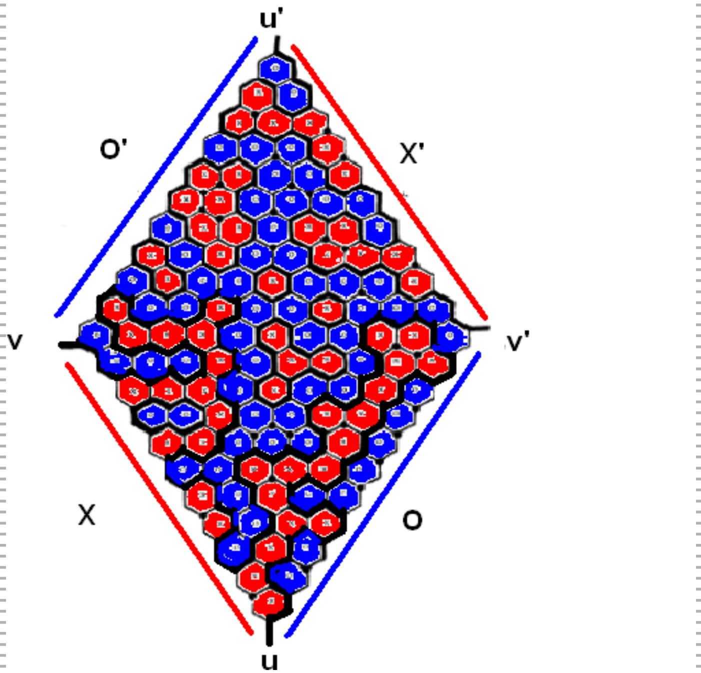
- **Intuicja:**
  Jeden gracz może *zablokować* drugiego jedynie, jeśli ułoży łańcuch w swoim kolorze łączący „jego” brzegi planszy.
- **Twierdzenie (o Hexie, wersja słabsza)**
  *Jeśli każde pole na planszy Hexa jest pokryte kolorem **N**iebieskim lub **C**zerwonym, to istnieje ścieżka łącząca przeciwległe brzegi **N**iebieskie lub brzegi **C**zerwone.*
- **Twierdzenie (o Hexie, wersja silniejsza)**
  *Jeśli każde pole na planszy Hexa jest pokryte kolorem **N**iebieskim lub **C**zerwonym, to istnieje ścieżka łącząca przeciwległe brzegi **N**iebieskie lub ścieżka łącząca brzegi **C**zerwone, ale nie obie jednocześnie.*

"Twierdzenie o Hexie"

- **Intuicja:**
  Jeden gracz może *zablokować* drugiego jedynie, jeśli ułoży łańcuch w swoim kolorze łączący „jego” brzegi planszy.
- **Twierdzenie(o Hexie, wersja słabsza)**
  *Jeśli każde pole na planszy Hexa jest pokryte kolorem **N**iebieskim lub **C**zerwonym, to istnieje ścieżka łącząca przeciwległe brzegi **N**iebieskie lub brzegi **C**zerwone.*
- **Twierdzenie(o Hexie, wersja silniejsza)**
  *Jeśli każde pole na planszy Hexa jest pokryte kolorem **N**iebieskim lub **C**zerwonym, to istnieje ścieżka łącząca przeciwległe brzegi **N**iebieskie lub ścieżka łącząca brzegi **C**zerwone, ale nie obie jednocześnie.*

Dowód (wersji słabszej)

Załóżmy, że cała plansza Hexa została pokryta kolorami Niebieskim i Czerwonym.



Pokażemy, jak znaleźć na planszy „łańcuch zwycięski”.

"Twierdzenie o Hexie"

- Γ - graf złożony z wierzchołków i krawędzi planszy Hexa wraz z dodatkowymi krawędziami odchodzącymi z wierzchołków u, $u\prime$, v i $v\prime$.
- Prowadzimy scieżkę wzdłuż Γ rozpoczynając od wierzchołka u. Zawsze wybieramy tę krawędź, która rozdziela ściany **N**iebieską i **C**zerwoną.
- Ta reguła wyznacza jednoznacznie ścieżkę wzdłuż Γ.
- Możemy dodatkowo (choć nie jest to konieczne) zażądać, aby **C**zerwone pole było zawsze po lewej stronie, a **N**iebieskie po prawej.

"Twierdzenie o Hexie"

- Γ - graf złożony z wierzchołków i krawędzi planszy Hexa wraz z dodatkowymi krawędziami odchodzącymi z wierzchołków u, $u\prime$, v i $v\prime$.
- Prowadzimy scieżkę wzdłuż Γ rozpoczynając od wierzchołka u. Zawsze wybieramy tę krawędź, która rozdziela ściany **N**iebieską i **C**zerwoną.
- Ta reguła wyznacza jednoznacznie ścieżkę wzdłuż Γ.
- Możemy dodatkowo (choć nie jest to konieczne) zażądać, aby **C**zerwone pole było zawsze po lewej stronie, a **N**iebieskie po prawej.

"Twierdzenie o Hexie"

- Γ - graf złożony z wierzchołków i krawędzi planszy Hexa wraz z dodatkowymi krawędziami odchodzącymi z wierzchołków u, $u\prime$, v i $v\prime$.
- Prowadzimy scieżkę wzdłuż Γ rozpoczynając od wierzchołka u. Zawsze wybieramy tę krawędź, która rozdziela ściany **N**iebieską i **C**zerwoną.
- Ta reguła wyznacza jednoznacznie ścieżkę wzdłuż Γ.
- Możemy dodatkowo (choć nie jest to konieczne) zażądać, aby **C**zerwone pole było zawsze po lewej stronie, a **N**iebieskie po prawej.

"Twierdzenie o Hexie"

- Γ - graf złożony z wierzchołków i krawędzi planszy Hexa wraz z dodatkowymi krawędziami odchodzącymi z wierzchołków u, $u\prime$, v i $v\prime$.
- Prowadzimy scieżkę wzdłuż Γ rozpoczynając od wierzchołka u. Zawsze wybieramy tę krawędź, która rozdziela ściany **N**iebieską i **C**zerwoną.
- Ta reguła wyznacza jednoznacznie ścieżkę wzdłuż Γ.
- Możemy dodatkowo (choć nie jest to konieczne) zażądać, aby **C**zerwone pole było zawsze po lewej stronie, a **N**iebieskie po prawej.

"Twierdzenie o Hexie"

- Nasza reguła gwarantuje, że nigdy nie odwiedzimy dwa razy tego samego wierzchołka - w naszej ścieżce $\Gamma\prime$ nie ma cykli.
- Ponieważ liczba wierzchołków w grafie Γ jest skończona, to procedura ta kiedyś się skończy - na którymś z wierzchołków $u\prime$, v lub $v\prime$, z których każdy jest przyległy do któregoś z regionów $O\prime$ lub $X\prime$.
- Jeśli wierzchołek końcowy jest przyległy do regionu $X\prime$, to „łańcuch zwycięzki" ma gracz **C**zerwony, w przeciwnym wypadku ma go gracz **N**iebieski.

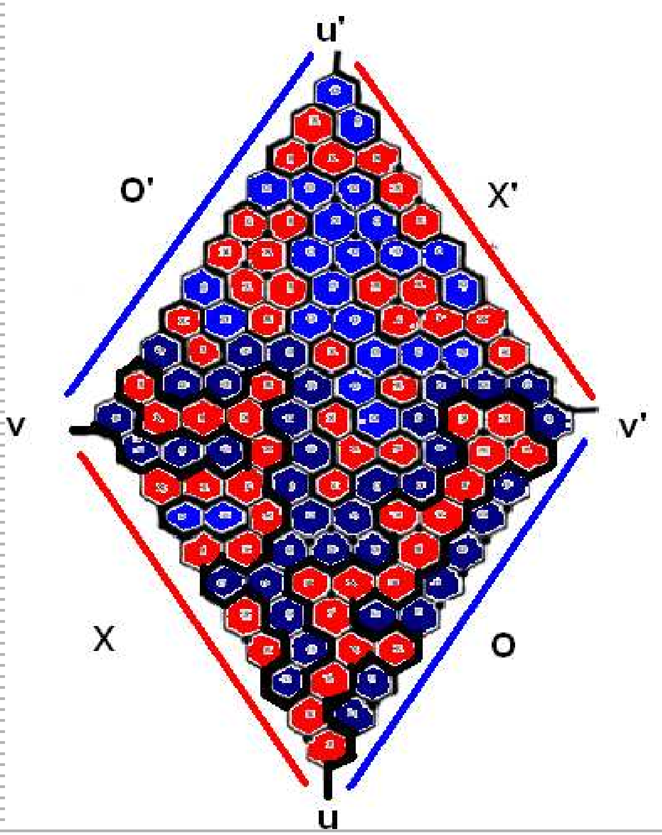
"Twierdzenie o Hexie"

- Nasza reguła gwarantuje, że nigdy nie odwiedzimy dwa razy tego samego wierzchołka - w naszej ścieżce $\Gamma\prime$ nie ma cykli.
- Ponieważ liczba wierzchołków w grafie Γ jest skończona, to procedura ta kiedyś się skończy - na którymś z wierzchołków $u\prime$, v lub $v\prime$, z których każdy jest przyległy do któregoś z regionów $O\prime$ lub $X\prime$.
- Jeśli wierzchołek końcowy jest przyległy do regionu $X\prime$, to „łańcuch zwycięzki" ma gracz **C**zerwony, w przeciwnym wypadku ma go gracz **N**iebieski.

"Twierdzenie o Hexie"

- Nasza reguła gwarantuje, że nigdy nie odwiedzimy dwa razy tego samego wierzchołka - w naszej ścieżce Γ' nie ma cykli.
- Ponieważ liczba wierzchołków w grafie Γ jest skończona, to procedura ta kiedyś się skończy - na którymś z wierzchołków u', v lub v', z których każdy jest przyległy do któregoś z regionów O' lub X'.
- Jeśli wierzchołek końcowy jest przyległy do regionu X', to „łańcuch zwycięzki" ma gracz **C**zerwony, w przeciwnym wypadku ma go gracz **N**iebieski.

"Twierdzenie o Hexie"



Lemat (teoriografowy) Skończony graf, którego wierzchołki mają conajwyżej stopień 2 jest sumą rozłącznych podgrafów, z których każdy jest albo izolowanym wierzchołkiem, albo cyklem albo ścieżką.

Hex a Topologia

Twierdzenie o krzywej Jordana

Uwaga

Twierdzenie o Hexie w wersji słabszej jest prawdziwe także w wyższych wymiarach, natomiast własność, że dokładnie jeden gracz może zbudować „łańcuch zwycięski" jest prawdziwe jedynie w przypadku 2D.

Wersja silniejsza twierdzenia ma związek z ***Twierdzeniem o krzywej Jordana***.

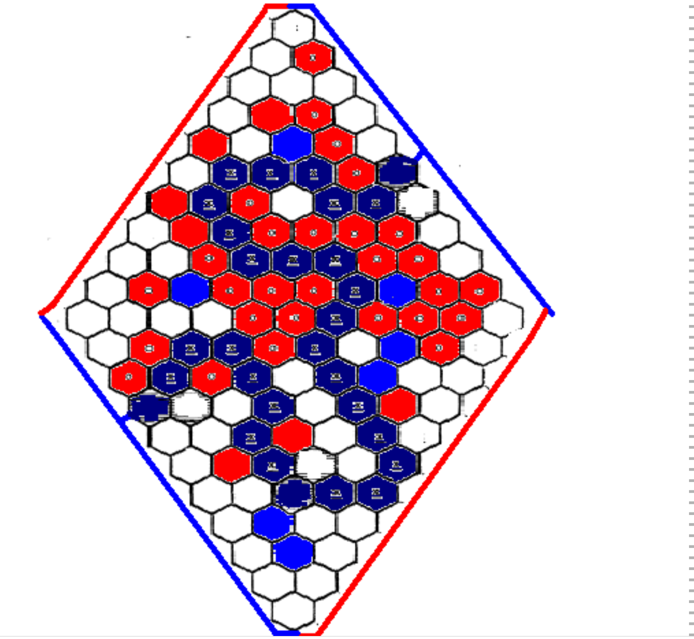
Definicja

Krzywą Jordana w przestrzeni topologicznej X nazywamy odwzorowanie ciągłe różnowartościowe $\gamma : S^1 \to X$.

Twierdzenie o krzywej Jordana

Jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa, to odwzorowanie to jest homeomorfizmem na swój obraz, $\Gamma = \gamma(S^1)$.

Twierdzenie (Jordana)
Jeżeli γ jest krzywą Jordana w $\mathbb{R}^2$ o obrazie Γ, to $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ ma dokładnie dwie składowe spójności.



Twierdzenie Brouwer'a

Uwaga
Okazuje się, że twierdzenie o Hexie w wersji słabszej jest równoważne twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym.

Twierdzenie (Brouwer)
Niech $f : I^2 \longrightarrow I^2$ będzie odwzorowaniem ciągłym kwadratu jednostkowego I^2. Istnieje wówczas $x \in I^2$ takie, że $f(x) = x$.

Hex zredefiniowany $:-)$

Rozważmy $Z^n \subset \mathbb{R}^n$. Dla $x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \max_i x_i$. Dla $x \neq y$, $x \leq y$, jeśli $x_i \leq y_i$ dla każdego i. Punkty x i y są *porównywalne*, jeśli $x \leq y$ lub $y \leq x$.

Definicja

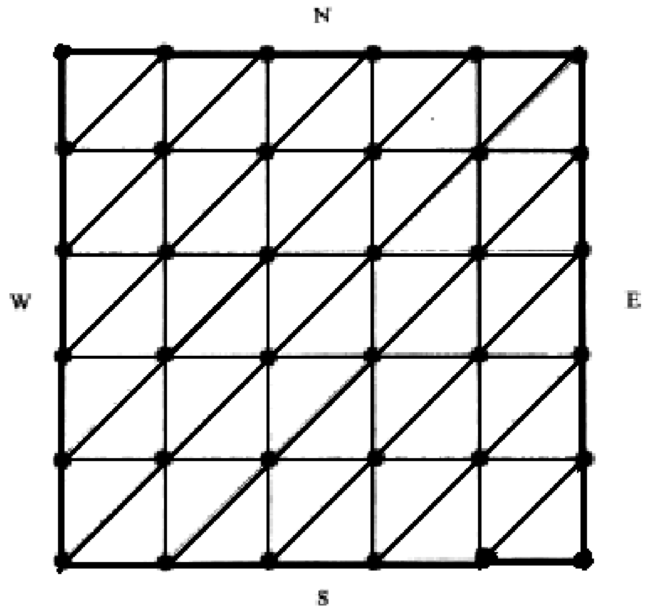
Dwuwymiarowa plansza Hexa B_k rozmiaru k jest to graf, którego wierzchołki to wszystkie punkty z w Z^2 takie, że $(0,0) \leq z \leq (k,k)$. Dwa wierzchołki z i $z\prime$ są *sąsiadujące* (rozpinają krawędź) w B_k, jeśli

$$|z - z\prime| = 1,$$

z oraz $z\prime$ są porównywalne.

Twierdzenie Hex w wersji nowej

Oznaczmy brzegi planszy B_k poprzez **N**, **S**, **E**, **W**. Gracz *poziomy* (*pionowy*) próbuje utworzyć ścieżkę łączącą E i W (N i S).



Twierdzenie

Niech plansza B_k będzie pokryta dwoma zbiorami H i V. Wtedy H zawiera spójny zbiór łączący krawędzie E i W lub V łączy N i S.

Hex $\Rightarrow$ Brouwer

Niech $f : I^2 \longrightarrow I^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ będzie ciągła. Ze zwartości I^2 wystarczy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{x \in I^2} \quad |f(x) - x| < \varepsilon.$$

Hex $\Rightarrow$ Brouwer

Niech $f : I^2 \longrightarrow I^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ będzie ciągła. Ze zwartości I^2 wystarczy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{x \in I^2} \quad |f(x) - x| < \varepsilon.$$

Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości f

$$(1) \quad \exists_{0<\delta<\varepsilon} \quad |x - x\prime| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x\prime)| < \varepsilon.$$

Hex $\Rightarrow$ Brouwer

Niech $f : I^2 \to I^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ będzie ciągła. Ze zwartości I^2 wystarczy pokazać, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{x\in I^2} \quad |f(x) - x| < \varepsilon.$$

Wybierzmy $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości f

$$(1) \quad \exists_{0<\delta<\varepsilon} \quad |x - x\prime| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x\prime)| < \varepsilon.$$

Rozważmy planszę Hexa B_k, gdzie $1/k < \delta$. Definiujemy cztery podzbiory B_k:

$$\begin{aligned} H^+ &= \{z : f_1(z/k) - z_1/k > \varepsilon\} \\ H^- &= \{z : z_1/k - f_1(z/k) > \varepsilon\} \\ V^+ &= \{z : f_2(z/k) - z_2/k > \varepsilon\} \\ (2) \qquad V^- &= \{z : z_2/k - f_2(z/k) > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Hex $\Rightarrow$ Brouwer

Twierdzenie będzie udowodnione, jesli pokażemy, że te cztery zbiory nie pokrywają B_k - bo jeśli wierzchołek z nie jest w żadnym z nich, to $|f(z/k) - z/k| < \varepsilon$.

Hex ⇒ Brouwer

Twierdzenie będzie udowodnione, jesli pokażemy, że te cztery zbiory nie pokrywają B_k - bo jeśli wierzchołek z nie jest w żadnym z nich, to $|f(z/k) - z/k| < \varepsilon$.
Kluczową obserwacją jest to, że rozłączne zbiory H^+ i H^- (V^+ i V^-) *nie są przyległe* (para podzbiorów A i B grafu jest przyległa, jeśli istnieją $a \in A$ oraz $b \in B$ takie, że a i b sa sąsiadującymi wierzchołkami).

Hex $\Rightarrow$ Brouwer

Twierdzenie będzie udowodnione, jesli pokażemy, że te cztery zbiory nie pokrywają B_k - bo jeśli wierzchołek z nie jest w żadnym z nich, to $|f(z/k) - z/k| < \varepsilon$.

Kluczową obserwacją jest to, że rozłączne zbiory H^+ i H^- (V^+ i V^-) *nie są przyległe* (para podzbiorów A i B grafu jest przyległa, jeśli istnieją $a \in A$ oraz $b \in B$ takie, że a i b sa sąsiadującymi wierzchołkami).

Niech teraz $H = H^+ \cup H^-$ oraz $V = V^+ \cup V^-$ i załóżmy, że D jest zbiorem spójnym zawartym w H - D musi leżeć w całości w H^+ lub H^-. Ale zauważmy, że H^+ „nie dotyka" brzegu E. Podobnie H^- „nie dotyka" brzegu W, więc D nie może łączyć brzegów E i W. Analogicznie V nie zawiera zbioru spójnego łączącego oba brzegi N i S.

Hex $\Rightarrow$ Brouwer

Twierdzenie będzie udowodnione, jesli pokażemy, że te cztery zbiory nie pokrywają B_k - bo jeśli wierzchołek z nie jest w żadnym z nich, to $|f(z/k) - z/k| < \varepsilon$.

Kluczową obserwacją jest to, że rozłączne zbiory H^+ i H^- (V^+ i V^-) *nie są przyległe* (para podzbiorów A i B grafu jest przyległa, jeśli istnieją $a \in A$ oraz $b \in B$ takie, że a i b sa sąsiadującymi wierzchołkami).

Niech teraz $H = H^+ \cup H^-$ oraz $V = V^+ \cup V^-$ i załóżmy, że D jest zbiorem spójnym zawartym w H - D musi leżeć w całości w H^+ lub H^-. Ale zauważmy, że H^+ „nie dotyka" brzegu E. Podobnie H^- „nie dotyka" brzegu W, więc D nie może łączyć brzegów E i W. Analogicznie V nie zawiera zbioru spójnego łączącego oba brzegi N i S.

Z twierdzenia o Hexie zbiory H i V nie pokrywają B_k.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Zauważmy, że plansza Hexa B_k daje *triangulację* kwadratu $k \times k$ I_k^2 w $\mathbb{R}^2$. Każdy punkt $z \in I_k^2$ jest jednoznacznie reprezentowany przez pewną kombinację wypukłą zbioru o conajwyżej trzech wierzchołkach, które są **parami sąsiadujące**.

Zauważmy, że plansza Hexa B_k daje *triangulację* kwadratu $k \times k$ I_k^2 w $\mathbb{R}^2$. Każdy punkt $z \in I_k^2$ jest jednoznacznie reprezentowany przez pewną kombinację wypukłą zbioru o conajwyżej trzech wierzchołkach, które są **parami sąsiadujące**.

Fakt

Każde odwzorowanie ciągłe $f : B_k \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rozrzesza się do **ciągłego *odwzorowania symplicjalnego*** („kawałkami liniowego”) $\widehat{f} : I_k^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:
jeśli $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$, to z definicji
$\widehat{f}(x) = \lambda_1 \widehat{f}(z_1) + \lambda_2 \widehat{f}(z_2) + \lambda_3 \widehat{f}(z_3)$.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Załóżmy, że plansza B_k została podzielona na dwa zbiory H i V.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Załóżmy, że plansza B_k została podzielona na dwa zbiory H i V.

Zdefiniujmy cztery zbiory następująco:

$\widehat{W}$ - zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z brzegiem W za pomocą scieżki w H

$\widehat{E} := H \setminus \widehat{W}$

$\widehat{S}$ - zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z brzegiem S za pomocą scieżki w V

$\widehat{N} := V \setminus \widehat{S}$

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Załóżmy, że plansza B_k została podzielona na dwa zbiory H i V.
Zdefiniujmy cztery zbiory następująco:

$\widehat{W}$ - zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z brzegiem W za pomocą scieżki w H

$\widehat{E} := H \setminus \widehat{W}$

$\widehat{S}$ - zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z brzegiem S za pomocą scieżki w V

$\widehat{N} := V \setminus \widehat{S}$

Ze sposobu zdefiniowania widać, że zbiory $\widehat{W}$ **i** $\widehat{E}$ **(**$\widehat{S}$ **i** $\widehat{N}$**) nie są przyległe**.

Załóżmy, że plansza B_k została podzielona na dwa zbiory H i V.

Zdefiniujmy cztery zbiory następująco:

$\widehat{W}$ - zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z brzegiem W za pomocą scieżki w H

$\widehat{E} := H \setminus \widehat{W}$

$\widehat{S}$ - zbiór wszystkich wierzchołków połączonych z brzegiem S za pomocą scieżki w V

$\widehat{N} := V \setminus \widehat{S}$

Ze sposobu zdefiniowania widać, że zbiory $\widehat{W}$ **i** $\widehat{E}$ **(**$\widehat{S}$ **i** $\widehat{N}$**) nie są przyległe**.

Przypuśćmy, niewprost, że nie ma H-*ścieżki* z E do W ani V-*ścieżki* z S do N.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Zdefiniujmy $f : B_k \longrightarrow B_k$ następujaco:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z + e_1 \quad \text{dla } z \in \widehat{W} \\
&= z - e_1 \quad \text{dla } z \in \widehat{E} \\
&= z + e_2 \quad \text{dla } z \in \widehat{S} \\
&= z - e_2 \quad \text{dla } z \in \widehat{N}.
\end{aligned}
$$

Można zweryfikować, że w każdym z powyższych przypadków $f(z) \in B_k$.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Zdefiniujmy $f : B_k \longrightarrow B_k$ następujaco:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= z + e_1 \quad \text{dla } z \in \widehat{W} \\
&= z - e_1 \quad \text{dla } z \in \widehat{E} \\
&= z + e_2 \quad \text{dla } z \in \widehat{S} \\
&= z - e_2 \quad \text{dla } z \in \widehat{N}.
\end{aligned}
$$

Można zweryfikować, że w każdym z powyższych przypadków $f(z) \in B_k$.
Rozszerzamy teraz f symplicjalnie do $\widehat{f}$ określonej na całym I_k^2.

Lemat

Niech z_1, z_2, z_3 będą wierzchołkami dowolnego $\triangle$ w $\mathbb{R}^2$ i $\widehat{\rho}$ będzie rozszerzeniem symplicjalnym $\rho(z_i) = z_i + v_i$, gdzie v_1, v_2, v_3 wektory dane. Wtedy $\widehat{\rho}$ ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy 0 leży w uwypukleniu $\sigma(v_1, v_2, v_3)$.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Lemat

Niech z_1, z_2, z_3 będą wierzchołkami dowolnego $\triangle$ w $\mathbb{R}^2$ i $\widehat{\rho}$ będzie rozszerzeniem symplicjalnym $\rho(z_i) = z_i + v_i$, gdzie v_1, v_2, v_3 wektory dane. Wtedy $\widehat{\rho}$ ma punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy 0 leży w uwypukleniu $\sigma(v_1, v_2, v_3)$.

Dowód lematu

Niech $x = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$. Wtedy $\widehat{\rho}(x) = \lambda_1(z_1 + v_1) + \lambda_2(z_2 + v_2) + \lambda_3(z_3 + v_3)$ i x jest punktem stałym wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$.

$\blacksquare$

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Stosujemy ten lemat do odwzorowania f.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Stosujemy ten lemat do odwzorowania f. Niech teraz $\triangle$ będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach **sąsiadujących** na planszy B_k. Kluczowe jest to, że zbiory $\widehat{W}$ i $\widehat{E}$ ($\widehat{N}$ i $\widehat{S}$) są **nieprzyległe**.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Stosujemy ten lemat do odwzorowania f.
Niech teraz $\triangle$ będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach **sąsiadujących** na planszy B_k.
Kluczowe jest to, że zbiory $\widehat{W}$ i $\widehat{E}$ ($\widehat{N}$ i $\widehat{S}$) są **nieprzyległe**.
Oznacza to, że nigdy się nie zdarzy, aby funkcja f przesuwała jeden z tych wierzchołków o e_i, a drugi o $-e_i$. Stąd f przesuwa te wierzchołki o wektory, które leżą w pojedynczej „ćwiartce" $\mathbb{R}^2$ i 0 nie leży w kombinacji wypukłej tych wektorów.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Stosujemy ten lemat do odwzorowania f.
Niech teraz $\triangle$ będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach **sąsiadujących** na planszy B_k.
Kluczowe jest to, że zbiory $\widehat{W}$ i $\widehat{E}$ ($\widehat{N}$ i $\widehat{S}$) są **nieprzyległe**.
Oznacza to, że nigdy się nie zdarzy, aby funkcja f przesuwała jeden z tych wierzchołków o e_i, a drugi o $-e_i$. Stąd f przesuwa te wierzchołki o wektory, które leżą w pojedynczej „ćwiartce" $\mathbb{R}^2$ i 0 nie leży w kombinacji wypukłej tych wektorów.
Zatem $\widehat{f} : I_k^2 \longrightarrow I_k^2$, ciągła, nie posiada punktu stałego.

Brouwer $\Rightarrow$ Hex

Stosujemy ten lemat do odwzorowania f.
Niech teraz $\triangle$ będzie dowolnym trójkątem o wierzchołkach **sąsiadujących** na planszy B_k.
Kluczowe jest to, że zbiory $\widehat{W}$ i $\widehat{E}$ ($\widehat{N}$ i $\widehat{S}$) są **nieprzyległe**.
Oznacza to, że nigdy się nie zdarzy, aby funkcja f przesuwała jeden z tych wierzchołków o e_i, a drugi o $-e_i$. Stąd f przesuwa te wierzchołki o wektory, które leżą w pojedynczej „ćwiartce" $\mathbb{R}^2$ i 0 nie leży w kombinacji wypukłej tych wektorów.
Zatem $\widehat{f} : I_k^2 \rightarrow I_k^2$, ciągła, nie posiada punktu stałego.
Sprzeczność z twierdzeniem Brouwer'a. $\blacksquare$

Hex wielowymiarowy

Hex zredefiniowany po raz drugi

Definicja

Plansza n-wymiarowego Hexa rozmiaru k, H_k^n, składa się ze wszystkich wektorów (wierzchołków) $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{Z}^n$ takich, że $0 \leq z_i \leq k$, $i = 1, ..., n$. Para wierzchołków z i $z\prime$ jest *sąsiadująca*, jeśli:

$$|z - z\prime| = 1,$$

z oraz $z\prime$ są porównywalne.

Zamiast H_k^n będziemy pisali po prostu H.

Dla każdego i definiujemy:

$$\begin{aligned} H_i^- &= \{z : z \in H, z_i = 0\} \\ H_i^+ &= \{z : z \in H, z_i = k\} \end{aligned}$$

Twierdzenie Hex po raz trzeci

Niech $L : H \to N = \{1, 2, ..., n\}$ („*labeling*”)

Twierdzenie

Dla każdego odwzorowania $L : H \to N$ istnieje przynajmniej jedno $i \in N$ takie, że $L^{-1}(i)$ zawiera spójny zbiór, który „dotyka” brzegów H_i^- oraz H_i^+. (Taki zbiór nazywamy *zwycięskim* i*-zbiorem*.)

Oczywiście twierdzenie o n-wymiarowym Hexie oraz n wymiarowa wersja twierdzenia Brouwera też są równoważne.

Bibliografia

Bibliografia

[1] Vadim V. Anshelevich *The Game of Hex: An Automatic Theorem Proving Approach to Game Programming*

[2] Jing Yang, Simon Liao, Mirek Pawlak *On a decomposition method for finding winning strategy in Hex game*

[3] David Gale *The Game of Hex and the Brouver Fixed-Point Theorem* The American Mathematical Monthly, Vol. 86, No. 10. (Dex.,1979), pp.818-827

[4] Ryan B. Hayward, Jack van Rijswijck *Hex and combinatorics* Discrete Mathematics 306 (2006), pp.2515-2528

[5] Ryan Hayward, Yngvi Björnsson, Michael Johanson, Morgan Kan, Nathan Po, Jack van Rijswijck *Solving 7×7 Hex with domination, fill-in and virtual connections* Theoretical Computer Science 349 (2005) pp.123-139

[6] Yasuhito Tanaka *Equivalence of the Hex game theorem and the Arrow impossibility theorem* Applied Mathematisc and Computation 186 (2007), pp. 509-515

[7] http://www.hexwiki.org