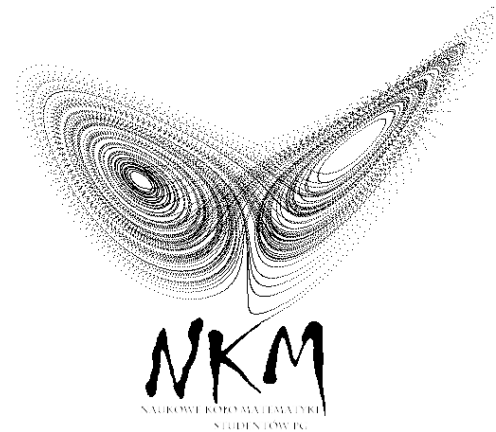


Niestabilne orbity okresowe a (niektóre) własności układów chaotycznych

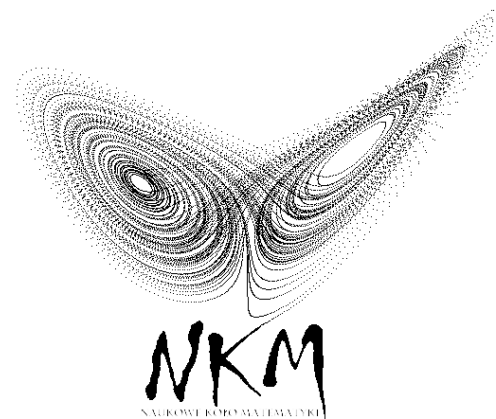
Justyna Signerska[♡], Jan Pyrzowski[♠]

♡ Politechnika Gdańska, ♠ Akademia Medyczna w Gdańsku



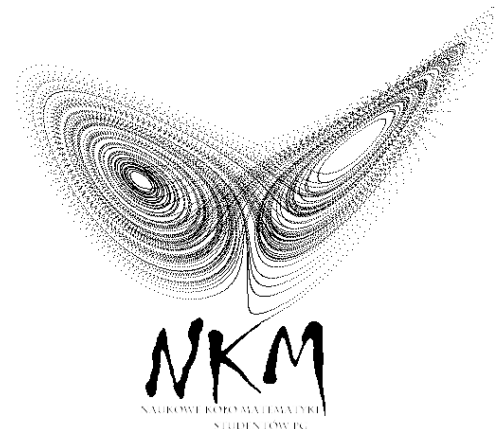
Outline

- Podstawowe definicje



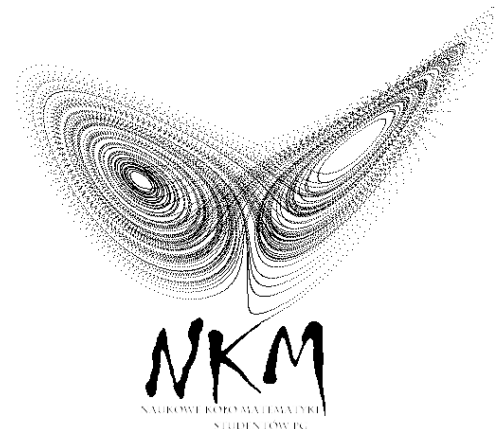
Outline

- Podstawowe definicje
- Odtwarzanie miary naturalnej przy pomocy niestabilnych orbit okresowych



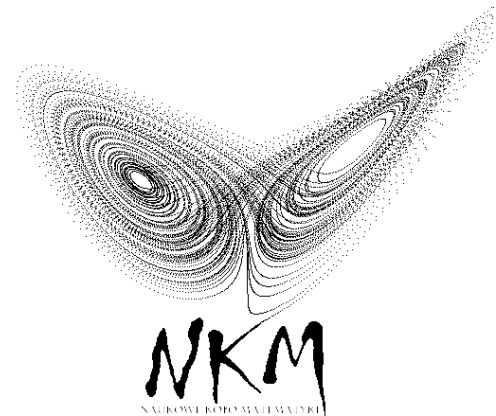
Outline

- Podstawowe definicje
- Odtwarzanie miary naturalnej przy pomocy niestabilnych orbit okresowych
- Escape rates

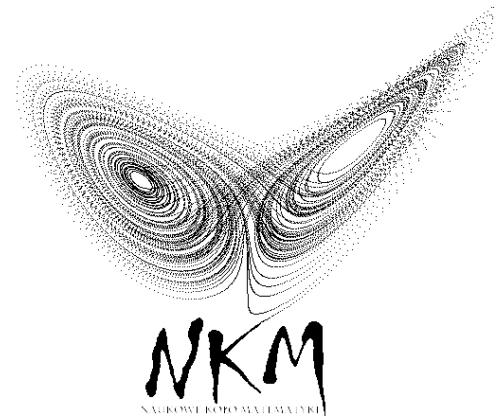


Outline

- Podstawowe definicje
- Odtwarzanie miary naturalnej przy pomocy niestabilnych orbit okresowych
- Escape rates
- Inne własności układów dynamicznych a niestabilne orbity okresowe



Definicje



Układ dynamiczny

X - p. metryczna, T -zbiór indeksów, $F : T \times X \rightarrow X$

Definicja

(F, X, T) nazywamy **układem dynamicznym**, gdy $F(t, \cdot) = F_t$, spełnia warunki:

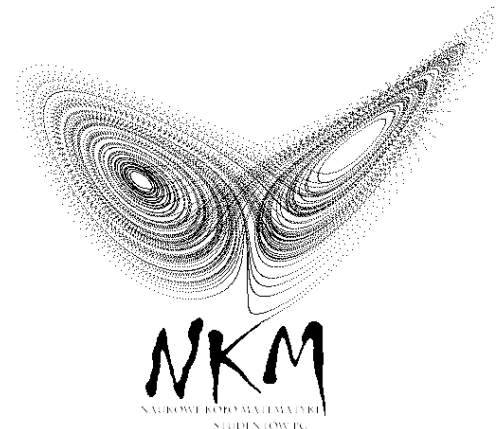
- (1) $F_0(x) = x$,
- (2) $\forall t, s \in T \quad F_{t+s}(x) = F_t(F_s(x))$.

Dla układów ciągłych $T = \mathbb{R}$, dla dyskretnych $T = \mathbb{Z}, T = \mathbb{N}$.

Uwaga

Układy ciągłe są zadawane przez autonomiczne równania różniczkowe zwyczajne (rzędu pierwszego):

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$



Miara naturalna

(X, \mathcal{F}, μ) - przestrzeń probabilistyczna

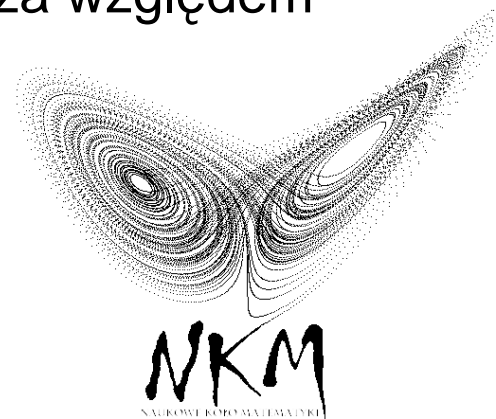
Definicja

Mówimy, że odwzorowanie mierzalne $F : X \rightarrow X$ **zachowuje miarę**, jeśli

$$\mu(F^{-1}(A)) = \mu(A) \quad \text{dla każdego } A \in \mathcal{F}$$

Definicja

Miara generowana przez *typowe trajektorie* w przestrzeni fazowej nazywana jest **miarą naturalną** i jest ona niezmiennicza względem dynamiki układu F .



Ergodyczność

Definicja

Odwzorowanie $F : X \rightarrow X$ zachowujące miarę jest **ergodyczne**, jeśli spełniony jest warunek:

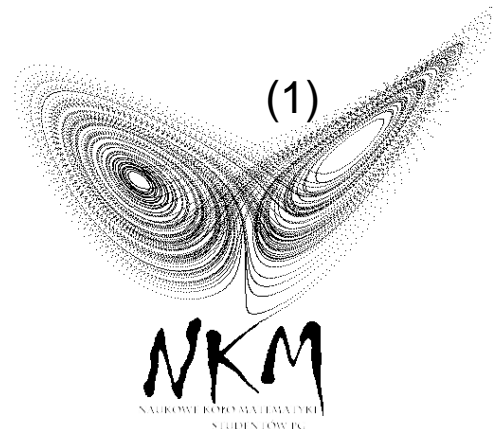
$$F^{-1}(A) = A \quad (A \in \mathcal{F}) \quad \Rightarrow \quad \mu(A) = 0 \text{ lub } \mu(A) = 1.$$

μ nazywamy wówczas miarą ergodyczną dla F .

Twierdzenie [Birkhoff]

Jeśli F jest ergodyczne, μ -miara niezmiennicza oraz $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, to:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(F^i(x)) \rightarrow \int_X f d\mu \quad \text{dla } N \rightarrow \infty$$



Rozmaitości stabilne i niestabilne

Definicja

X - zwarta gładka rozmaitość,

$f : X \rightarrow X$ - dyfeomorfizm klasy C^k ,

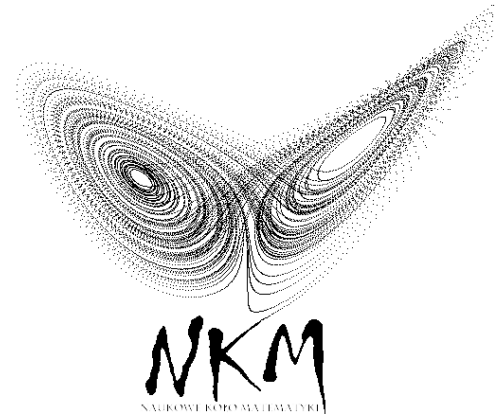
p - punkt stały dla f

Rozmaitością stabilną punktu p nazywamy zbiór:

$$W^s(p) := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) \rightarrow p\}$$

Rozmaitością niestabilną punktu p nazywamy zbiór:

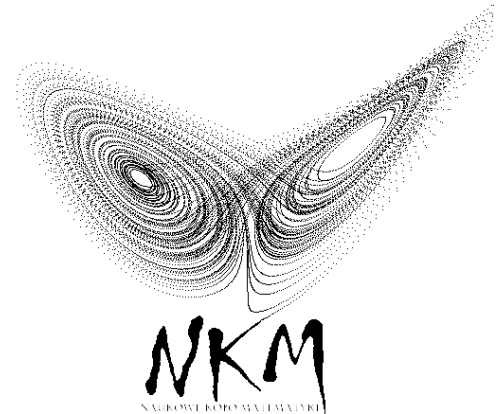
$$W^u(p) := \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) \rightarrow p\}$$



Hiperboliczność

Definicja

- w przypadku **układów dynamicznych dyskretnych** $x_{n+1} = f(x_n)$, mówimy, że **punkt stały p jest hiperboliczny**, jeśli wszystkie wartości własne macierzy Jakobiego $Df(p)$ są co do modułu różne od 1
- w przypadku **układów dynamicznych ciągłych** $\dot{x} = f(x)$, mówimy, że **rozwiązanie stacjonarne \bar{x} jest hiperboliczne**, gdy żadna z wartości własnych macierzy Jakobiego $Df(\bar{x})$ nie jest czysto urojona

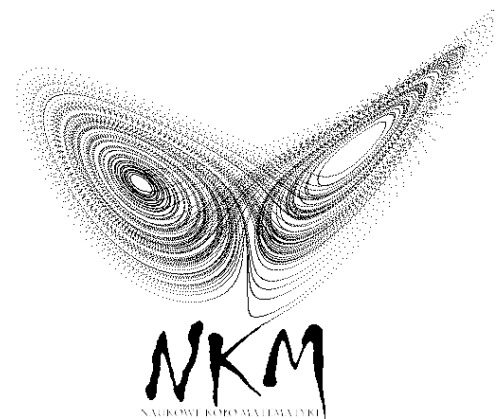
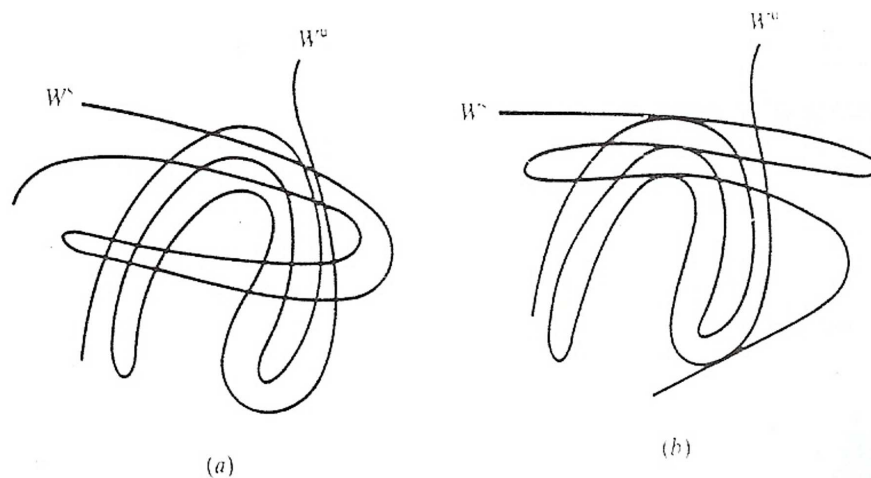


Hiperboliczność

Definicja

Odwzorowanie f nazywamy **hiperbolicznym**, jeśli przecinające się rozmaitości stabilne i niestabilne dowolnych punktów stałych zawsze przecinają się **transwersalnie**.

Jeśli przecinają się **stycznie**, to odwzorowanie jest **niehiperboliczne**.



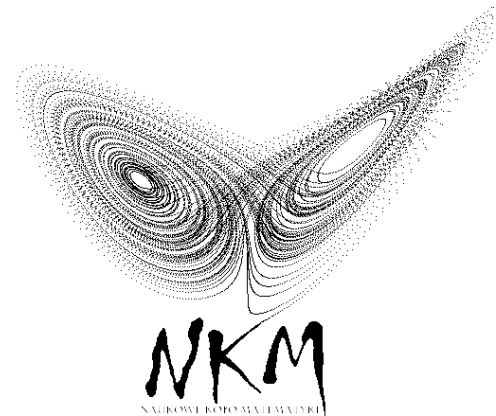
Atraktory i repelery

Definicja

Zbiór zwarty i niezmienniczy A nazywamy **atraktorem** potoku/odwzorowania F_t , jeżeli istnieje otoczenie (basen przyciągania) $U \supset A$ taki, że:

$$\forall t \geq 0 \quad F_t(U) \subset U \text{ oraz } \bigcap_{t \geq 0} F_t(U) = A.$$

Repeler jest to nieprzyciągający zbiór niezmienniczy; dynamika na nim ma również właściwości chaotyczne.



Chaos

Definicja

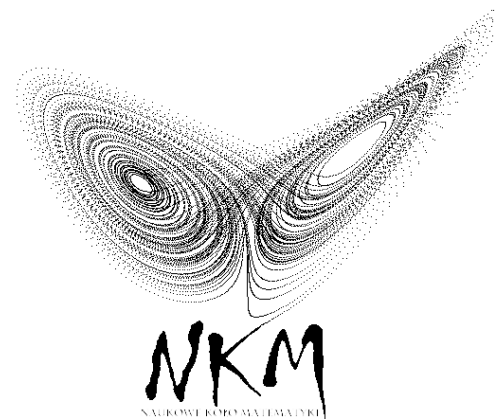
Odwzorowanie f nazywamy **tranzytywnym** wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\substack{\emptyset \neq U, V \subset X \\ U, V \text{ - otw.}}} \exists_{k > 0} f^k(U) \cap V \neq \emptyset$$

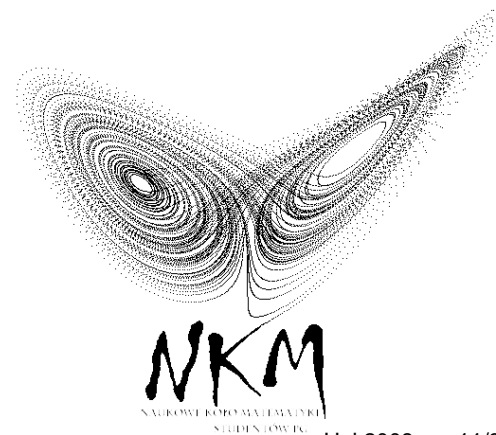
Definicja [Devaney, 1989]

Odwzorowanie $f : X \rightarrow X$ nazywamy **chaotycznym**, jeżeli:

1. f jest tranzytywne,
2. zbiór punktów periodycznych f jest gęsty,
3. f posiada wrażliwość na warunki początkowe.



Miara naturalna



Wyznaczanie miary naturalnej

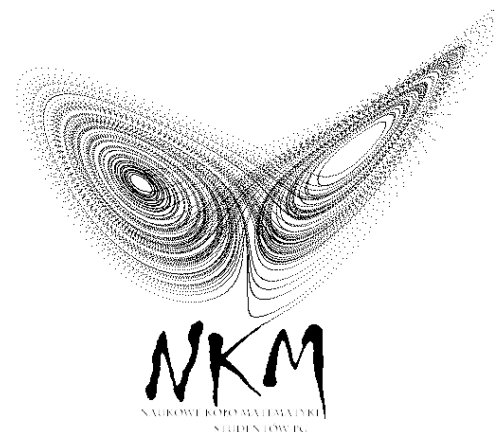
A - atraktor o basenie przyciągania S

$\{C_i\}$ -pokrycie atraktora A

$\rho(x_0, T, \epsilon_i)$ -ilość czasu, jaką trajektoria *długości* T wybranego losowo punktu $x_0 \in S$ spędza w komórce C_i rozmiaru ϵ_i

Wtedy **miara naturalna atraktora zawarta w C_i** dana jest wzorem:

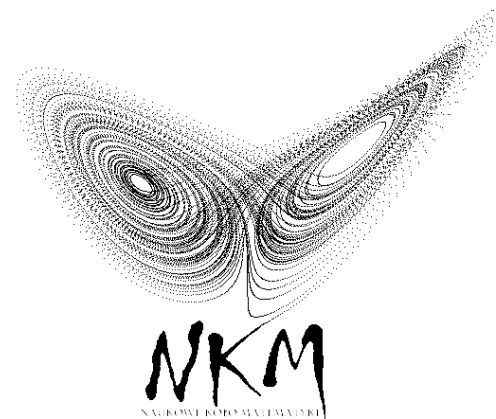
$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\rho(x_0, T, \epsilon_i)}{T} \quad (2)$$



M. naturalna a orbity okresowe

Uwaga

Hiperboliczne atraktory chaotyczne posiadają nieskończenie wiele niestabilnych orbit okresowych, które tworzą zbiór gęsty, ale o zerowej mierze Lebesgue'a. Stąd miary niezmiennicze „produkowane” przez niestabilne orbity okresowe są *atypowe*. Ponieważ jednak *typowa* trajektoria „odwiedza” ustalone otoczenie każdej z orbit okresowych z odpowiednią częstotliwością, orbity te poniekąd „rozpinają” miarę naturalną.



Wyznaczanie miary naturalnej

$M : X \rightarrow X$ - odwzorowanie d -wymiarowe

$x_{i,p}$ - i -ty punkt periodyczny o okresie p (niekoniecznie minimalnym)

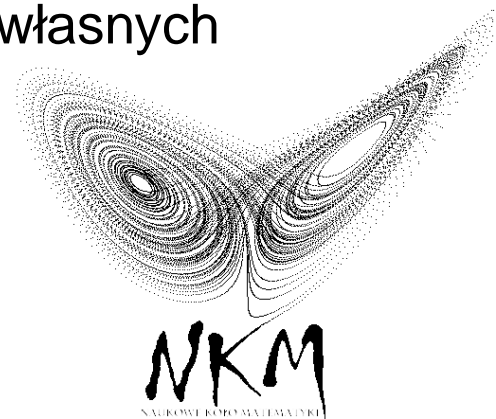
Miara naturalna atraktora zawarta w C_i :

$$\mu_i = \lim_{p \rightarrow \infty} \mu_i(p), \quad (3)$$

gdzie

$$\mu_i(p) = \sum_{x_{i,p} \in C_i} \frac{1}{L_1(x_{i,p})} \quad (4)$$

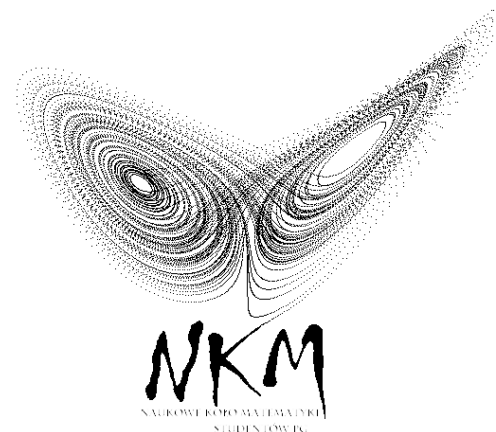
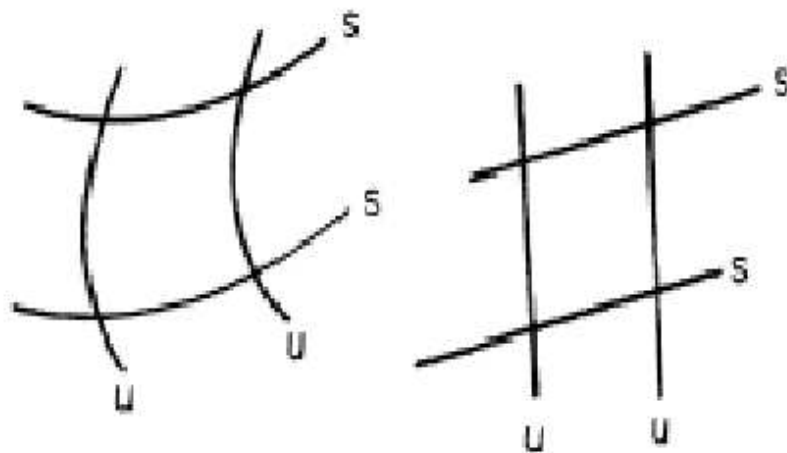
oraz $L_1(x_{i,p})$ jest iloczynem *rozszerzających* wartości własnych macierzy Jakobiego $DM^p(x_{i,p})$.



Wyznaczanie miary naturalnej

Wzór (4) dla układów hiperbolicznych może być wyprowadzony w następujący sposób:

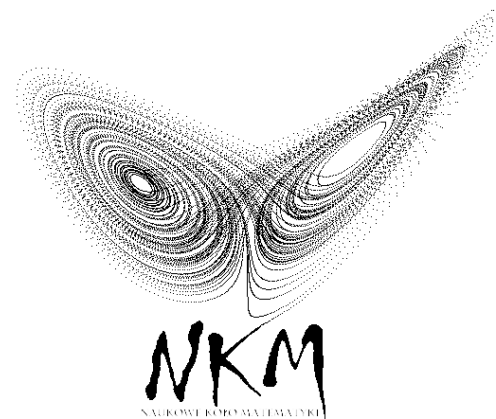
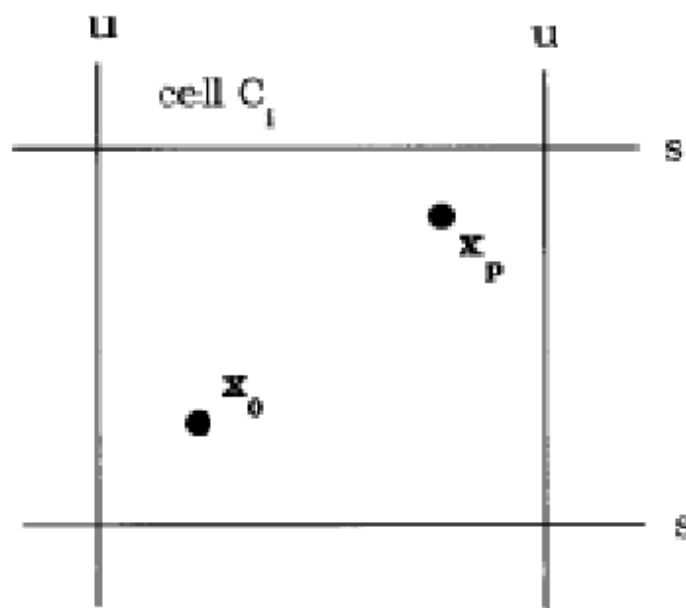
Pokrywamy odpowiednio atraktor zbiorami C_i



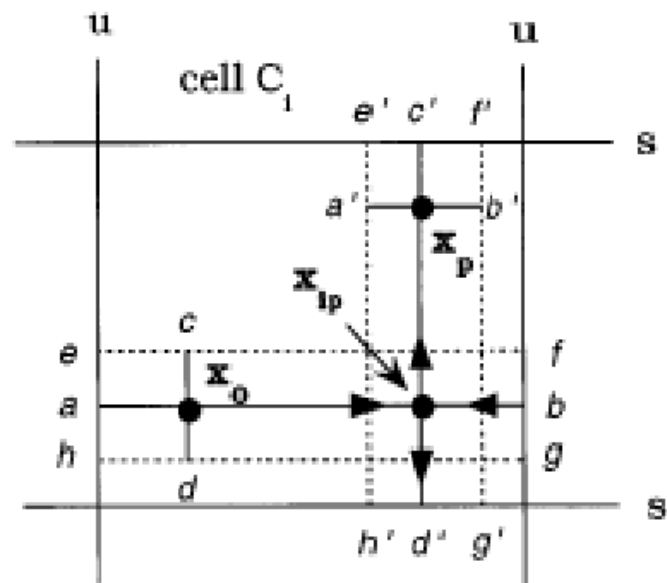
Wyznaczanie miary naturalnej

$x_0 \in C_i$ - warunek początkowy

x_p - punkt powrotu do C_i trajektorii startującej z x_0 po p iteracjach (ergodyczność)



Wyznaczanie miary naturalnej

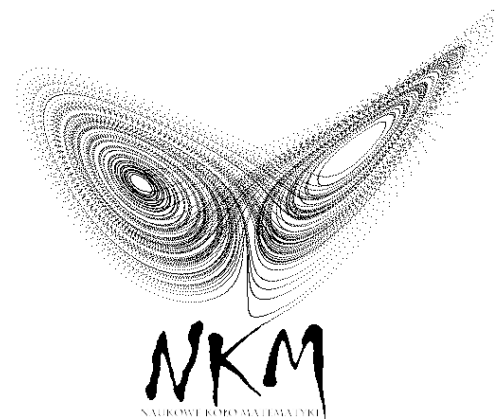


$$M^p(ab) = a'b'$$

$$M^{-p}(c'd') = cd$$

$$M^p(efgh) = e'f'g'h'$$

$x_{i,p}$ - niestabilny punkt stały
dla M^p



Wyznaczanie miary naturalnej

Założmy, że odcinek cd ma długość ϵ .

Wtedy odcinek cd ma długość $\epsilon/L_1(x_{i,p})$.

Stąd

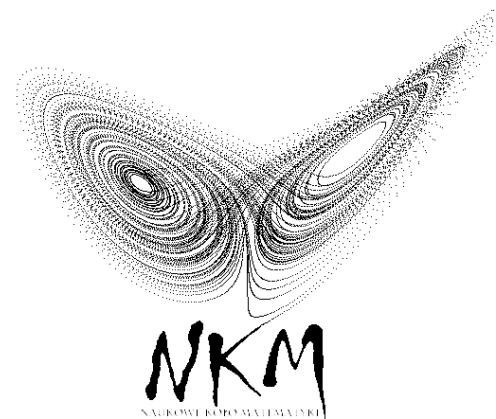
$$\frac{\epsilon/L_1(x_{i,p})}{\epsilon} = \frac{1}{L_1(x_{i,p})}$$

jest częścią trajektorii (związanych z $x_{i,p}$),
które powrócą do C_i po p iteracjach

(ponieważ miara naturalna jest jednostajna w kierunku niestabilnym).

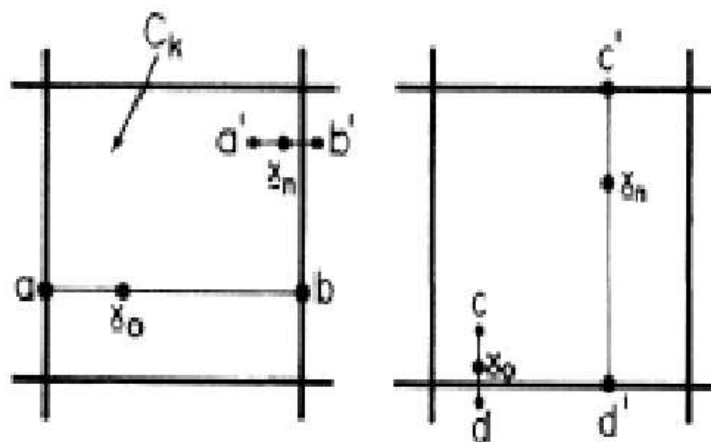
Biorąc pod uwagę wszystkie niestabilne punkty stałe dla M^p w C_i
oraz przechodząc do granicy $p \rightarrow \infty$ otrzymujemy

$$\mu_i = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{x_{i,p} \in C_i} \frac{1}{L_1(x_{i,p})}.$$



Uwagi

W wyprowadzeniu wzoru (4) założono, że istnieje *dobra* partycja $\{C_i\}$ przestrzeni fazowej, tj. taka, dla której nie zachodzą przypadki



Dla układów hiperbolicznych taki podział przestrzeni fazowej istnieje (tzw. *Markov partition*).

Dla niehiperbolicznych nie możemy go skonstruować, ponieważ istnieje nieskończenie wiele styczności między rozmaitościami stabilnymi i niestabilnymi.

Uwagi

$$\mu_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\rho(x_0, T, \epsilon_i)}{T} \quad (5)$$

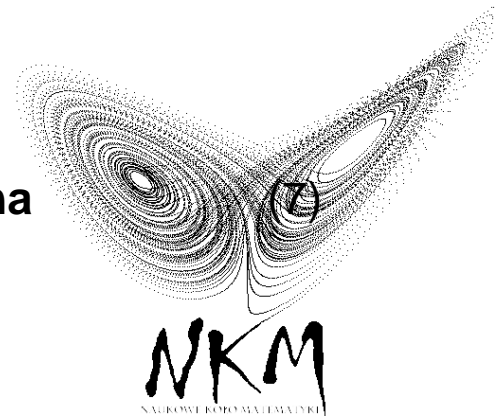
$$\mu_i(p) = \sum_{x_{i,p} \in C_i} \frac{1}{L_1(x_{i,p})} \quad (6)$$

Niech

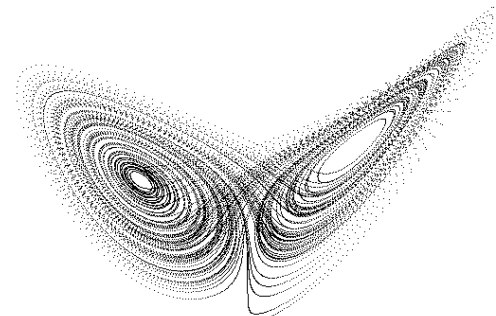
$$\Delta\mu_p = \sqrt{\sum_{i=1}^N [\mu_i(p) - \mu_i]^2 / N}.$$

Dla układów hiperbolicznych obserwujemy:

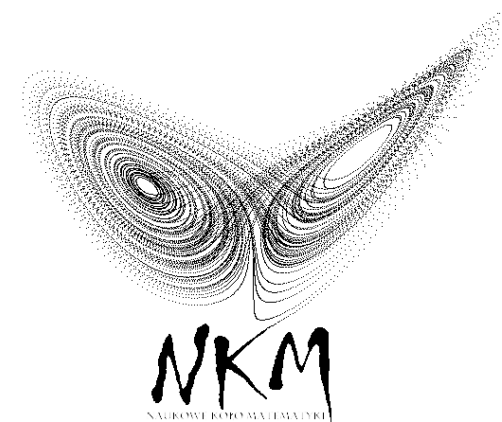
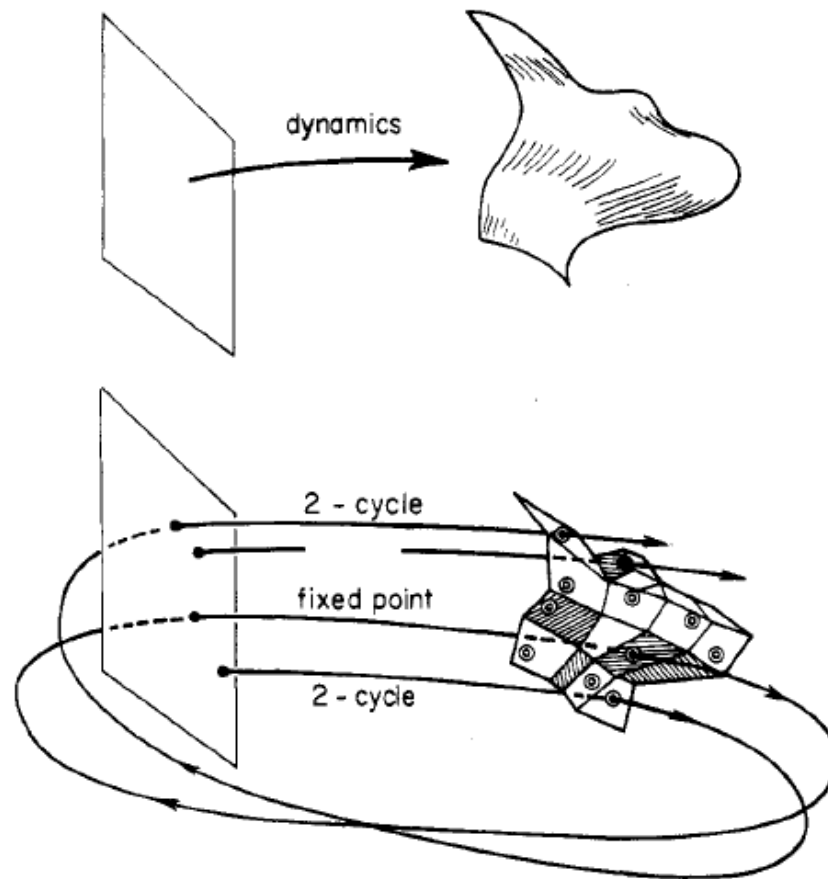
$$\Delta\mu_p \sim \exp^{-\alpha p}, \quad \alpha - \text{tzw. entropia topologiczna}$$



Stałe ucieczki (Escape rates)

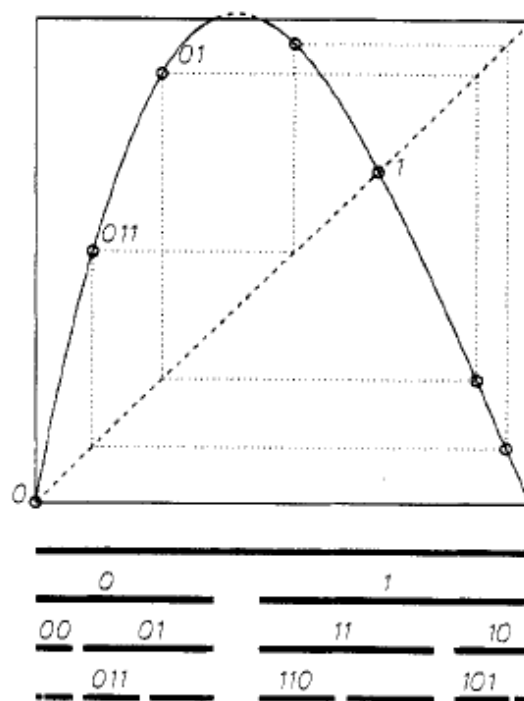


Orbity periodyczne

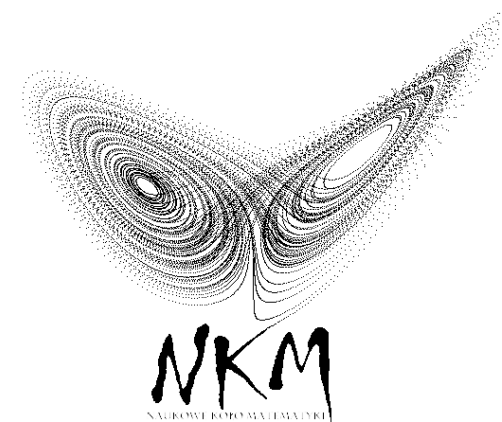


Odzworowania 1D

Rozważmy jednowymiarowy repeler:



$$f(x_c) > x_{max}$$



Odzworowania 1D

Obserwujemy

- przy pierwszej iteracji „ucieka” odcinek wokół x_c
- w drugiej iteracji „uciekają” jego dwa przeciwobrazy
- itd., itd. ...

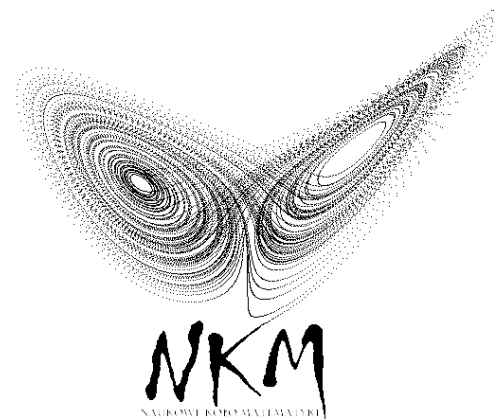
W n -tym kroku punkty, które *ocalały* możemy podzielić na 2^n rozłącznych odcinków:

i - ty odcinek zakodowany jest ciągiem

$$i = \epsilon_1 \epsilon_2 \dots \epsilon_n,$$

gdzie

$$\epsilon_k = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } f^k(x) < x_c; \\ 1, & \text{jeśli } f^k(x) > x_c. \end{cases}$$



Odzworowania 1D

l_i - szerokość i -tego odcinka

Miara zbioru punktów początkowych x , które *przetrwają* n iteracji wynosi

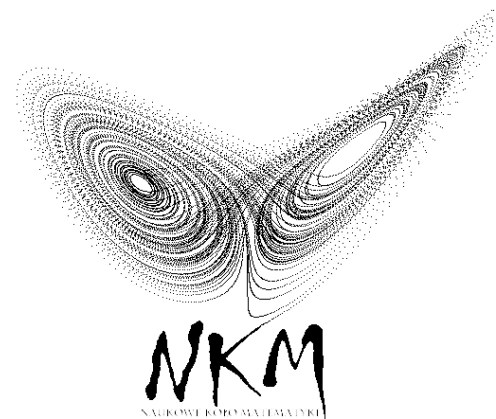
$$\Gamma_n = \sum_i^{(n)} l_i. \quad (8)$$

Odzworowanie jest gładkie i ma ograniczoną pochodną $\Lambda = df/dx$:

$$1 < |\Lambda_{min}| \leq |df/dx| \leq |\Lambda_{max}|$$

Stąd każdy odcinek w (8) jest ograniczony:

$$|\Lambda_{max}^{-n}| \leq l_i \leq |\Lambda_{min}^{-n}|$$



Odzworowania 1D

W konsekwencji

$$\left(\frac{2}{|\Lambda_{max}|}\right)^n \leq \Gamma_n \leq \left(\frac{2}{|\Lambda_{min}|}\right)^n$$

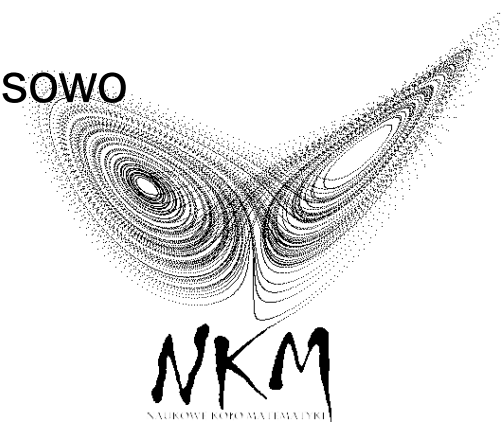
Γ_n jest rzędu wykładniczego:

$$\Gamma_n = e^{-n\gamma_n} \rightarrow e^{-n\gamma}$$

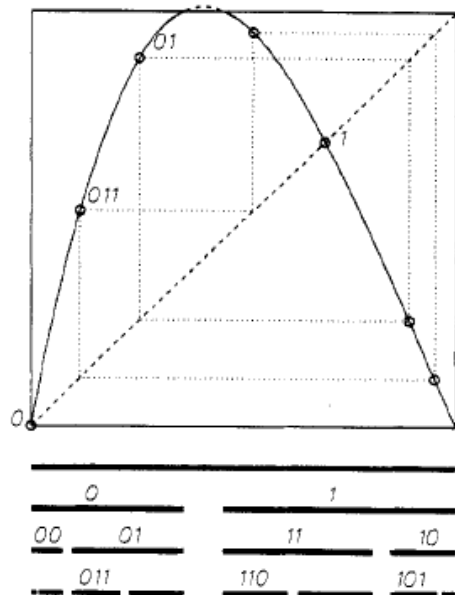
Definicja

$\gamma = 1/T$ - stała ucieczki - (*ang. escape rate*)

T - **asymptotyczny czas życia** (*asymptotic lifetime*) losowo wybranego punktu początkowego x



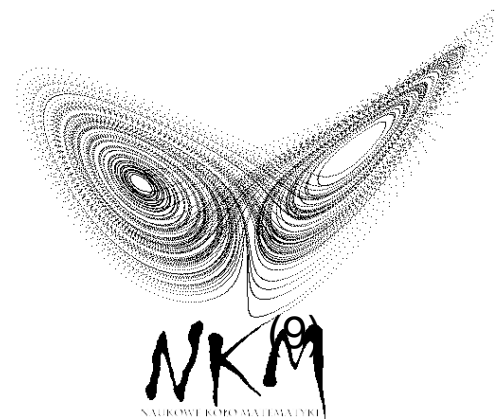
Odzworowania 1D



Każdy odcinek i zawiera punkt periodyczny x_i . Jeśli odcinki te są dostatecznie małe, to ich „ekspansja” na odcinek $[0, 1]$ w ciągu n -iteracji może być przybliżona przy pomocy stabilności punktu x_i :

$$l_i = \frac{a_i}{|\Lambda_i|}, \quad \text{gdzie}$$

$$\Lambda_i = \frac{d}{dx} f^n(x_i) = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(x_i))$$



Odzworowania 1D

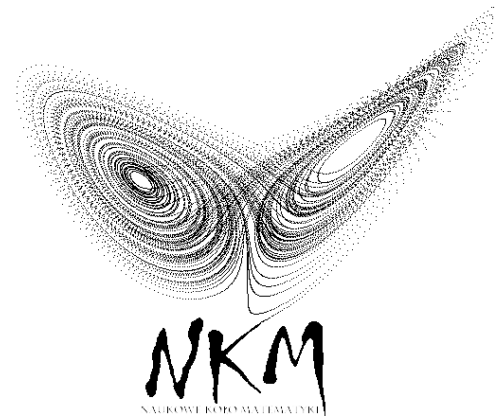
$$a_i = l_i |\Lambda_i|$$

Uwaga

Jeśli układ jest hiperboliczny, to dla dostatecznie dużych n $a_1 \approx \mathbf{O}(1)$ mogą być zaniedbane z powodu wykładniczego przyrostu $|\Lambda_i|$.

Stąd

$$\Gamma_n = \sum_i^{(n)} \frac{1}{|\Lambda_i|}.$$



Odwzorowania 1D

Zdefiniujmy

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} z^n \Gamma_n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_i^{(n)} |\Lambda_i|^{-1} \\ &= z/|\Lambda_0| + z/|\Lambda_1| + z^2/|\Lambda_{00}| + \\ &\quad + z^2/|\Lambda_{01}| + z^2/|\Lambda_{10}| + z^2/|\Lambda_{11}| + \\ &\quad + z^3/|\Lambda_{000}| + z^3/|\Lambda_{001}| + \dots\end{aligned}\tag{10}$$

Dla dostatecznie małych z suma ta jest zbieżna. Ponieważ $\Gamma_n \rightarrow e^{-n\gamma}$, to **escape rate γ jest wyznaczony poprzez najmniejsze $z = e^\gamma$, dla którego szereg $\Omega(z)$ jest rozbieżny:**

$$\Omega(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (ze^{-\gamma})^n.$$



Odzworowania 1D

Definicja

Cykle pierwsze (*ang. prime cycles*) są to takie orbity periodyczne $(x_1 x_2 \cdots x_n)$, które nie mogą być przedstawione w krótszej postaci - orbita taka jest zakodowana przy pomocy niepowtarzającego się ciągu symboli.

Uwaga

Istnieje dokładnie jeden cykl pierwszy dla każdej cyklicznej permutacji, np.

$p = \overline{0011} = \overline{0110} = \overline{1100} = \overline{1001}$ jest cyklem pierwszym, ale nie jest nim

$p = \overline{0101} = \overline{01}$.

Stąd

$$\Omega(z) = \sum_p n_p \sum_{r=1}^{\infty} (z^{n_p} |\Lambda_p^{-1}|)^r = \sum_p \frac{n_p z^{n_p} |\Lambda_p^{-1}|}{1 - z^{n_p} |\Lambda_p^{-1}|} \quad (12)$$

gdzie sumujemy po wszystkich cyklach pierwszych p długości n_p , a r jest liczbą

powtórzeń danego cyklu.

Dynamiczna funkcja ζ

Zauważmy, że

$$\Omega(z) = -z \frac{d}{dz} \sum_p \ln\left(1 - \frac{z^{n_p}}{|\Lambda_p|}\right)$$

Stąd $\Omega(z)$ jest pochodną logarytmiczną funkcji

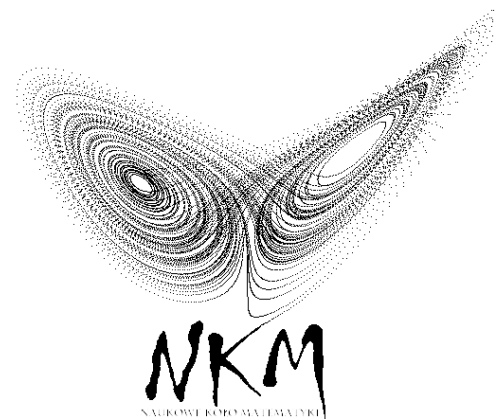
$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p \left(1 - \frac{z^{n_p}}{|\Lambda_p|}\right) \quad (13)$$

Jest to tzw. **dynamiczna funkcja ζ** .

Uwaga

Funkcja ζ -Riemanna:

$$\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z} = \prod_{p \text{ - l. pierwsza}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$



Układy wielowymiarowe

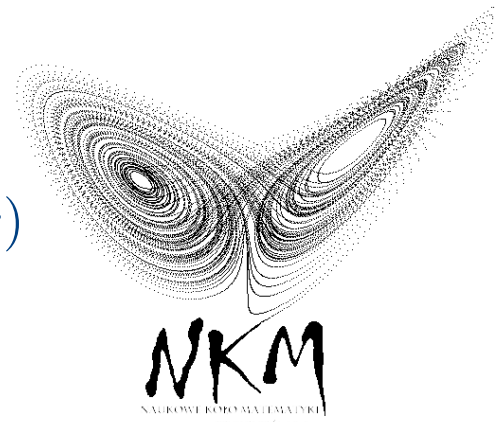
V -ograniczone otoczenie d -wymiarowego repelera
Stała ucieczki z V dana jest wzorem:

$$\begin{aligned} e^{-n\gamma_n} &= \frac{\int_{V \times V} \delta(y - f^n(x)) dx dy}{\int_V dx} = \\ &= \int_V \delta(x - f^n(x)) dx = \\ \sum_i^{(n)} \frac{1}{|\det(1 - J^{(n)}(x_i))|} &= \sum_i^{(n)} \frac{1}{|\prod_{a=1}^d (1 - \Lambda_i^a)|}, \end{aligned} \quad (14)$$

gdzie

$$J^{(n)}(x_i) = \prod_{j=0}^{n-1} J(f^{(j)}(x_i)), \quad J_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l} f_k(x)$$

oraz $\Lambda_i^1, \Lambda_i^2, \dots, \Lambda_i^d$ są wartościami własnymi $J^{(n)}$.



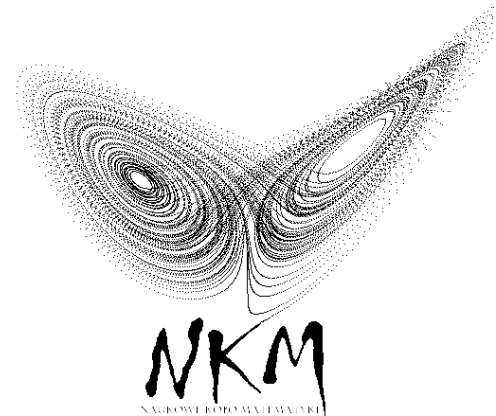
Układy wielowymiarowe

Zakładając, że $|\Lambda_i^a| \neq 1$:

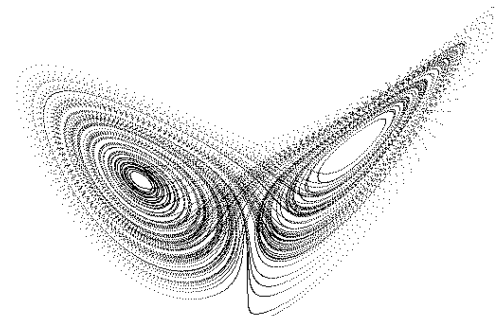
$$e^{-n\gamma_n} = \sum_i^{(n)} \frac{1}{|\Lambda_i|}, \quad (15)$$

gdzie $\Lambda_i = \prod_a^{\text{rozsz}} \Lambda_i^a$ jest iloczynem rozszerzających wartości własnych.

Stąd funkcja ζ (13) uogólnia się również dla układów wielowymiarowych.

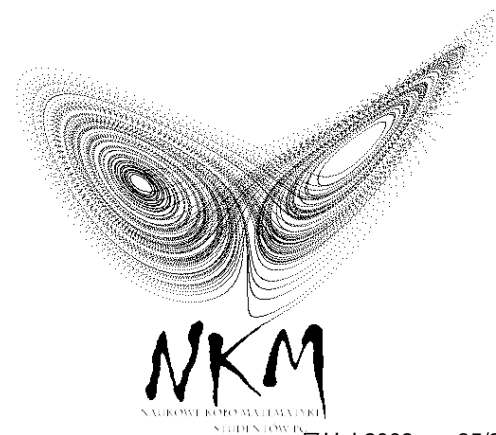


Inne własności układów dynamicznych a niestabilne orbity okresowe



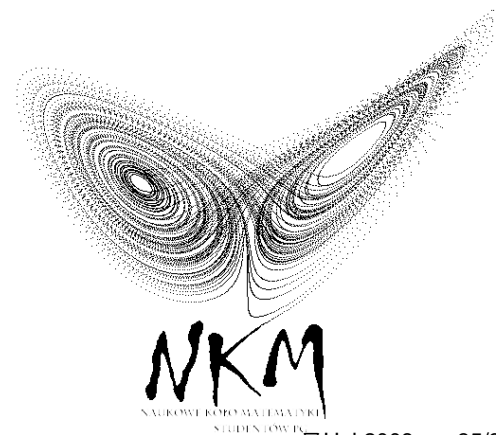
co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna



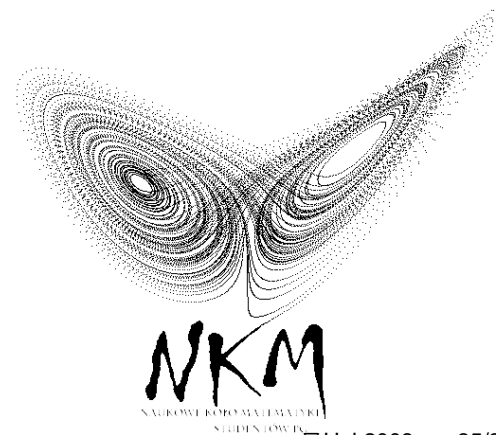
co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna
- escape rates



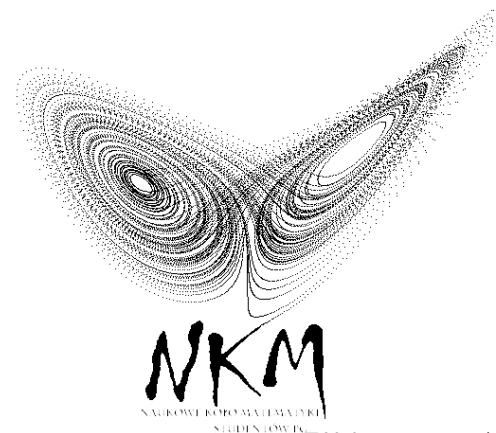
co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna
- escape rates
- ciśnienie topologiczne $P(\beta)$ (escape rate = $-P(1)$)



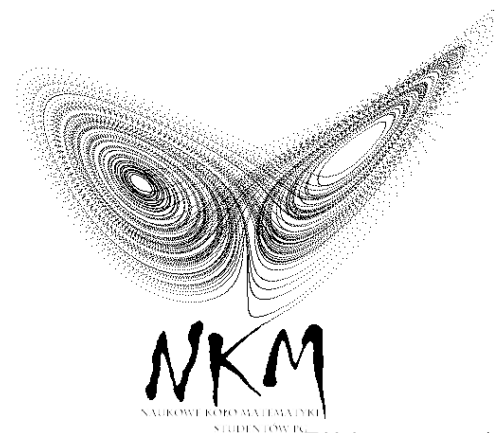
co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna
- escape rates
- ciśnienie topologiczne $P(\beta)$ (escape rate = $-P(1)$)
- wymiary Renyi'ego $D(\beta)$



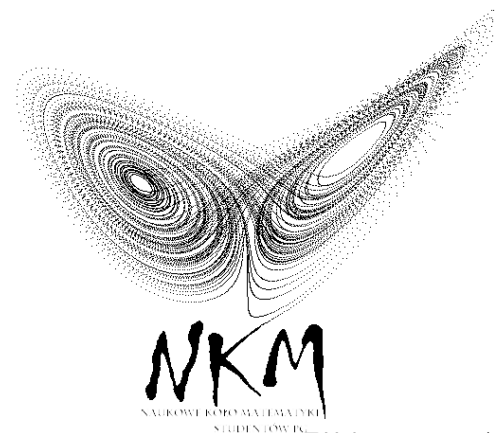
co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna
- escape rates
- ciśnienie topologiczne $P(\beta)$ (escape rate = $-P(1)$)
- wymiary Renyi'ego $D(\beta)$
- spektrum osobliwości $f(\alpha)$



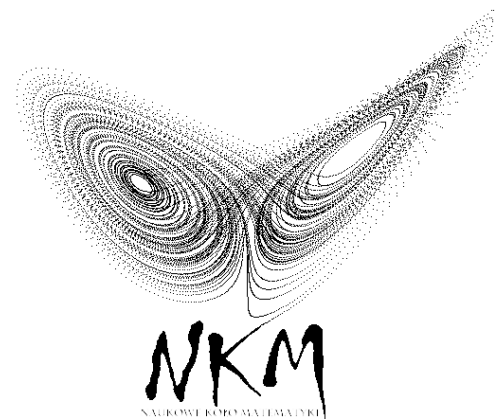
co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna
- escape rates
- ciśnienie topologiczne $P(\beta)$ (escape rate = $-P(1)$)
- wymiary Renyi'ego $D(\beta)$
- spektrum osobliwości $f(\alpha)$
- znajdowanie partycji Markowa



co jeszcze możemy policzyć ...

- miara naturalna
- escape rates
- ciśnienie topologiczne $P(\beta)$ (escape rate = $-P(1)$)
- wymiary Renyi'ego $D(\beta)$
- spektrum osobliwości $f(\alpha)$
- znajdowanie partycji Markowa
- i przypuszczalnie jeszcze więcej...



Bibliografia

1. Lai YC, Nagai Y, Grebogi C. Characterization of the Natural Measure by Unstable Periodic Orbits in Chaotic Attractors. Phys Rev Lett 79(4):649-652 (1997)
2. Artuso R, Aurell E, Cvitanovic P. Recycling of strange sets I: Cycle expansions. Nonlinearity 3:325-359 (1990)
3. Grebogi C, Ott E, Yorke JA. Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors. Phys Rev A 37(5):1711:1724 (1988)
4. Beck C, Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge University Press (1993)

