

# Teoria chaosu a równania różnicowe

Maria Gąska

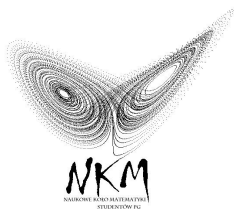
13 grudnia 2006

## Streszczenie

W referacie opisuję podstawowe pojęcia teorii chaosu w oparciu o równania różnicowe.

Plan referatu:

- Definicje zachowania chaotycznego oraz równania różnicowego
- Odwzorowanie logistyczne - najprostsze nieliniowe równanie różnicowe - opis i przykłady zastosowań.
- Odwzorowanie Hénona
- Charakterystyki ruchu chaotycznego:
  - Wykładnik Lapunowa
  - Miara niezmiennicza
  - Funkcja korelacji
- Atraktor chaotyczny i jego właściwości



# 1 Podstawowe pojęcia

**Definicja 1.1** Dla funkcji  $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  następujące równanie z niewiadomą  $x$  nazywamy równaniem różnicowym (rekurencyjnym) rzędu  $k$ :

$$f(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k)) = 0$$

Jeżeli  $b_0, b_1, \dots, b_{k-1} \in \mathbb{R}$  to

$$\begin{cases} x(n_0) = b_0 \\ x(n_0 + 1) = b_1 \\ \dots \\ x(n_0 + k - 1) = b_{k-1} \end{cases}$$

nazywamy warunkiem początkowym.

Równanie różnicowe wraz z warunkiem początkowym nazywamy zagadnieniem początkowym.

**Definicja 1.2** Niech  $X$  będzie zbiorem. Układem dynamicznym w  $X$  nazywamy dowolną rodzinę  $\{S_t; t \geq 0\}$  odwzorowań  $X$  w siebie taką, że

1.  $S_0 = id_X$
2.  $S_t \circ S_r = S_{t+r}$  dla dowolnych  $t, r \geq 0$

Przykładem dyskretnego układu dynamicznego jest układ  $N$  równań różnicowych (autonomicznych):

$$\begin{cases} x_1(n+1) = F_1(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ x_2(n+1) = F_2(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \\ \dots \\ x_k(n+1) = F_k(x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)) \end{cases}$$

**Definicja 1.3** Funkcja  $f : X \rightarrow X$  jest chaotyczna w sensie Devaney'a, jeżeli spełnia warunki:

1. *nierozkładalność* :  $f$  jest topologicznie tranzytywne tzn. dla każdej pary niepustych zbiorów otwartych  $U, V \subset X$  istnieje takie  $n > 0$ , że  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$
2. *element regularności* : zbiór punktów okresowych odwzorowania  $f$ :

$$Per(f) = \{x \in X : \exists_{n \in \mathbb{N}} f^n(x) = x\}$$

jest gęsty w  $X$

3. *nieprzewidywalność* :  $f$  jest wrażliwa na warunki początkowe, czyli:

$$\exists \delta \forall x \in X \forall N \exists y \in N \wedge n \|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$$

$N$  - otoczenie  $x$

**Uwaga 1.1** Przez chaos deterministyczny będziemy rozumieć ruch nieregularny, otrzymywany z układu nieliniowego, którego prawa dynamiki jednoznacznie określają ewolucję układu w czasie, gdy znana jest jego wcześniejsza historia.

Rzeczywistą przyczyną nieregularności jest własność układów nieliniowych polegająca na wykładniczym rozbieganiu początkowo bliskich trajektorii w ograniczonym obszarze przestrzeni fazowej. z [1]

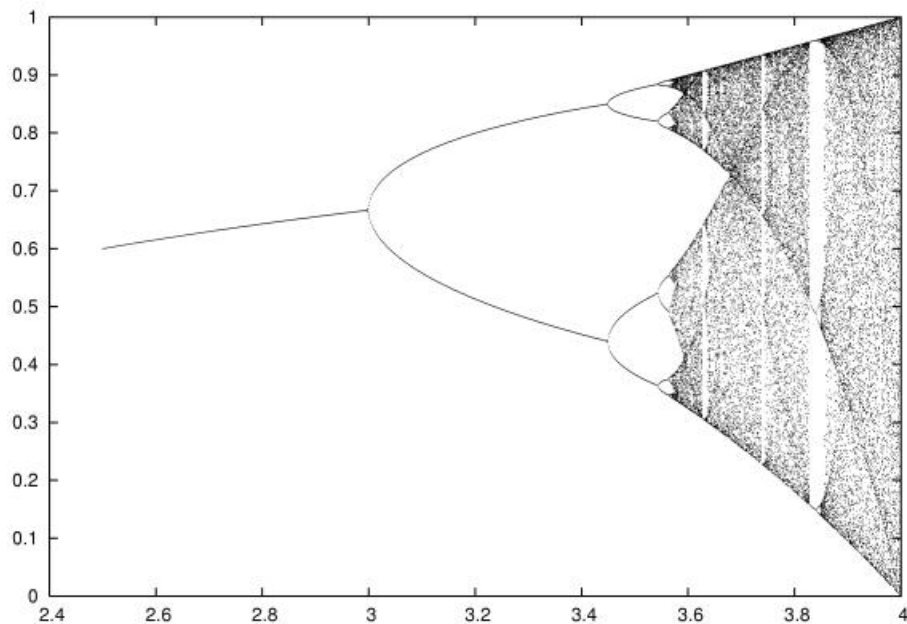
**Definicja 1.4** Zbiór  $A \subset X$  nazywamy niezmienniczym dla ustalonego układu dynamicznego w  $X$  jeżeli:

$$\forall_{t \in \mathbb{N}} S_t(A) = A$$

## 2 Równanie logistyczne

**Definicja 2.1** *Odwzorowaniem logistycznym będziemy nazywać równanie:*

$$x(n+1) = f_r(x(n)) = rx(n)(1-x(n)) \quad (2.1)$$



Rysunek 1: diagram bifurkacji odwzorowania logistycznego

Na osi poziomej mamy parametr  $r$ , a na pionowej  $x(n)$ . Na diagramie bifurkacyjnym możemy obserwować jaki rodzaj ruchu jest możliwy dla danego parametru  $r$ .

**Definicja 2.2** *Mówimy że dla parametru  $r_0$  w punkcie  $x_0$  zachodzi bifurkacja podwojenia okresu jeżeli istnieją takie parametry  $r_1 < r_0 < r_2$  oraz przedział  $P = [x_1, x_2]$ , że:*

- $f_{r_0}(x_0) = x_0$
- dla  $r_1 \leq r \leq r_0$  w przedziale  $P$  istnieje dokładnie jedno rozwiązanie równania  $f_r(x) = x$
- dla  $r_1 \leq r \leq r_0$  w przedziale  $P$  nie istnieją rozwiązania równania  $f_r^2(x) = x$  nie będące rozwiązaniami równania  $f_r(x) = x$

- dla  $r = r_0$  jedynym rozwiązaniem równania  $f_r^2(x) = x$  na przedziale  $P$  jest  $x_0$
- dla  $r_0 < r \leq r_2$  istnieją dokładnie 2 rozwiązania równania  $f_r^2(x) = x$  na zbiorze  $P$  nie będące rozwiązaniami równania  $f_r(x) = x$

Co można zaobserwować na przykładzie odzorowania logicznego:

### 1. Podwajanie okresu

Mechanizm ten jest jednym ze scenariuszy przejścia do chaosu. Znany jest pod nazwą scenariusza Feigenbauma i pojawia się w większości równań różnicowych pierwszego rzędu, poza nielicznymi wyjątkami. Ciekawe jest iż można scharakteryzować podwajanie okresu dla odwzorowań które mają kwadratowe maksimum przez tzw. liczbę Feigenbauma, nie zależy ona od natury odwzorowania, jest uniwersalna.

**Definicja 2.3** Liczbą Feigenbauma nazywamy:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_k - \mu_{k-1}}{\mu_{k+1} - \mu_k} = 4,669201609102\dots$$

gdzie  $\mu_k$  jest  $k$ -tą liczbą dla której zachodzi bifurkacja.

Wniosek:

Używając  $\delta$  do konstrukcji ciągu  $\mu_k$  otrzymujemy, że dla  $\mu = 3.569\dots$  układ musi przejść przez nieskończenie wiele bifurkacji.

### 2. Okna okresowe

Możemy zauważyć że obszary zachowań chaotycznych dla  $r > \mu$  są przecinane przez przedziały zachowań okresowych. Zwróćmy uwagę na jeden z najszerszych takich przedziałów w okolicach  $r = 3.83$

Przykład zastosowania równania logistycznego do modelowania sytuacji rzeczywistej:

Równanie zostało zaproponowane przez P.I Verhulsa do symulacji wzrostu populacji w ograniczonym środowisku.

$n$  - rok dla którego jest badana populacja

$x(n)$  - liczba osobników w roku  $n$

Rozważmy taki model wzrostu populacji, że liczba osobników w roku  $n+1$  jest proporcjonalna do ich liczby w roku poprzednim oraz do powierzchni dostępnego obszaru, która zmniejsza się proporcjonalnie do liczby ludności. Wówczas równanie opisujące tą sytuację ma postać (2.1)

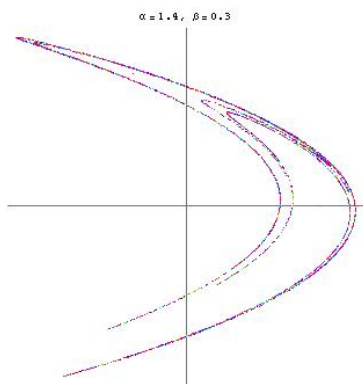
### 3 Odwzorowanie Hénona

**Definicja 3.1** *Odwzorowaniem Hénona nazywamy następujący układ równań różnicowych:*

$$\begin{cases} x(n+1) = 1 - a(x(n))^2 + yn \\ y(n+1) = bx(n) \end{cases}$$

gdzie  $a$  oraz  $|b| \leq 1$  są parametrami

Zauważmy, że odwzorowanie Hénona jest dwuwymiarowym rozszerzeniem odwzorowania logistycznego.



Rysunek 2: atraktor Henona

**Definicja 3.2** *Dla układu dynamicznego określonego w  $X$  atraktorem globalnym nazywamy zbiór ograniczony  $A \subset X$ , jeśli  $A$  jest niezmienniczy i spełnia warunki jednostajnego przyciągania zbiorów ograniczonych, tzn. dla każdego zbioru ograniczonego  $B \subset X$*   
 $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in B} d(S_t(x), A) = 0$   
*gdzie  $S_t$  - układ dynamiczny,  $d(y, C) = \inf_{z \in C} d(y, z)$  - odległość punktu  $y$  od zbioru  $C$  dana przez metrykę  $d$  w  $X$ .*

## 4 Charakterystyki ruchu chaotycznego

### 1. Wykładnik Lapunowa

**Definicja 4.1** Dla odwzorowania  $x(n+1) = f(x(n))$  wykładnikiem Lapunowa nazywamy liczbę

$$\lambda(x(0)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x(0))}{dx(0)} \right|$$

Korzystając z różniczkowania funkcji złożonej:  
 $\frac{d}{dx} f^2(x)_{x(0)} = f' [f(x(0))] f'(x(0)) = f'(x(1)) f'(x(0))$   
możemy zapisać:

$$\lambda(x(0)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \ln |f'(x(i))|$$

**Uwaga 4.1** Odwzorowanie  $n$ -wymiarowe będzie miało  $n$  wykładników Lapunowa. Początkowa  $n$ -wymiarowa objętość fazowa ewoluuje wg wzoru:

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)n}$$

Jeżeli układ jest chaotyczny przynajmniej jeden wykładnik jest dodatni.

### 2. Miara niezmiennicza

**Definicja 4.2** Niech  $f: X \rightarrow X$  wyznacza dyskretny układ dynamiczny. Miarę  $\mu$  na  $X$  nazywamy niezmienniczą (ze względu na ten układ), jeżeli  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$  dla każdego mierzalnego zbioru  $A \subset X$

**Definicja 4.3** Miara niezmiennicza  $\rho(x)$  określa gęstość iteracji odwzorowania  $x(n+1) = f(x(n))$ ,  $x(n) \in [0, 1]$ ,  $n = 0, 1, \dots$  na odcinku jednostkowym i jest określona związkiem:

$$\rho(x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta [x - f^i(x(0))]$$

**Uwaga 4.2** Jeżeli  $\rho(x)$  nie zależy od  $x(0)$  to układ jest nazywany *ergodycznym* w takim przypadku powyższa definicja pozwala nam na napisanie "średnich czasowych" funkcji  $g(x)$  jako średnich z miarą niezmienniczą:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(x(i)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g[f^i(x(0))] = \int_0^1 dx \rho(x) g(x)$$

### 3. Funkcja korelacji

**Definicja 4.4** Funkcja korelacji  $C(m)$  dla odwzorowania  $x(n+1) = f(x(n))$ ,  $x(n) \in [0, 1]$ ,  $n = 0, 1, \dots$  jest określona wzorem:

$$C(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \hat{x}_{i+m} \hat{x}_i, \text{ gdzie}$$
$$\hat{x}_i = f^i(x(0)) - \bar{x}, \quad \bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f^i(x(0))$$

**Uwaga 4.3**  $C(m)$  określa miarę nieregularności ciągu iteracji różną od wykładnika Lapunowa. Funkcja korelacji pokazuje średnio jak wiele wiedzą o sobie różniące się o  $m$  kroków odchylenia iteracji od wartości średniej.

## 5 Atraktor chaotyczny i jego właściwości

Wiele atraktorów tworzonych przez odwzorowania chaotyczne cechują się bardzo dużą złożonością. Będziemy mówić o atraktorach układów dyspasywnych

**Definicja 5.1** Układ nazywamy dyspasywnym, jeżeli istnieje zbiór ograniczony  $B_0 \subset X$  pochłaniający wszystkie zbiory ograniczone  $B \subset X$  tzn.

$$\forall B \exists t_0 \forall t \geq t_0 S_t(B) \subset B_0$$

**Przykład 5.1** Atraktor Hénona ma charakter fraktalny - jest nieskończenie złożony.

1. **Wymiar** Fraktale mają najczęściej wymiar pojemnościowy niewymierny.

**Definicja 5.2** Jeżeli istnieje granica

$$d(X) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N, \epsilon)}{\log(\epsilon)},$$

gdzie  $(N, \epsilon)$  jest liczbą kostek  $n$ -wymiarowych (kostka  $n$ -wymiarowa to iloczyn kartezyjski  $n$  odcinków  $[0, \epsilon] \in \mathbb{R}^n$ )

$$I(n, \epsilon) = [0, \epsilon] \times [0, \epsilon] \times \dots \times [0, \epsilon]$$

to nazywamy ją wymiarem pojemnościowym

2. **Związek wykładnika Lapunowa z wymiarem**

Związek ten podali Kaplan i Yorke.

**Definicja 5.3** Wymiar Kaplana-Yorke'a definiujemy przez analogię do wymiaru pojemnościowego:

$$d_L(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{d(\log(N, \epsilon))}{d(\log(\frac{1}{\epsilon}))} \right]$$

Dla przypadku  $n$ -wymiarowej przestrzeni fazowej (kartezyjski iloczyn  $n$  zbiorów) mamy:

$$d_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|},$$

gdzie  $\lambda_i$  są uporządkowane, z  $\lambda_1$  największym, a  $j$  jest indeksem przy najmniejszym nieujemnym wykładniku Lapunowa

## Literatura

- [1] H.G Schuster, "Chaos deterministyczny" *PWN, Warszawa 1993*
- [2] G.L.Baker, J.P.Gollub, "Wstęp do dynamiki układów chaotycznych" *PWN, Warszawa 1998*
- [3] E. Ott, "Chaos w układach dynamicznych"
- [4] V. Lakshmikantham, D. Trigiante, "Theory of difference equations : numerical methods and applications"