Logika rozmyta

Justyna Signerska i Krzysztof Bartoszek

18 marca 2006

1 Wstęp

Jednym z podstawowych praw logiki klasycznej jest tzw. ,,prawo wyłączonego środka" (ang. *the law of the excluded middle*). Symbolicznie można je wyrazić jako:

$$\text{A AND NOT A} \equiv 0$$
$$\text{A OR NOT A} \equiv 1.$$

Mówi ono o tym, że każde zdanie przyjmuje dokładnie jedną z dwóch wartości logicznych: *prawdę* albo *fałsz*. Ale czy w ,,realnym życiu" rzeczywiście możemy każdą rzecz określić jednoznacznie jako *w 100% prawdziwą* lub *w 100% nieprawdziwą*? Czy nie ma żadnych ,,stanów pośrednich"? Najlepszym przykładem na to, że prawa logiki klasycznej, używane przez matematyków w dowodzeniu twierdzeń matematycznych, nie zawsze aplikują się do ,,realnego świata", jest następujący paradoks:

- Paradoks Bitwy Morskiej (*Arystoteles, Sea-battle Paradox*):
  "It is necessary for there to be or not to be a sea-battle tomorrow; but it is not necessary for a sea-battle to take place tomorrow, nor for one not to take place."

A oto, co na temat prawa wyłączonego środka powiedział pewien wybitny filozof i matematyk:

- Bertrand Russell *("Vagueness". Australian J. Philosophy, 1,1923)*:
  "The law of the excluded middle is true when precise symbols are employed but it is not true when symbols are vague, as, in fact, all symbols are."

Tak więc musiały powstać pewne alternatywne do logiki klasycznej systemy logiczne, np. stworzona przez polskiego uczonego Jana Łukasiewicza logika trójwartościowa. Jednym z takich systemw jest również tzw. *logika rozmyta*. Jej twórcą jest profesor Lofti A. Zadeh (University of California, Berkeley). W 1965 roku opublikował on teorię zbiorów rozmytych, a w 1973 roku stworzył system logiki rozmytej. Logika rozmyta jest w pewnym sensie uogólnieniem logiki klasycznej. Modeluje ona zjawiska nieprecyzyjne np. zdanie ,,Dziś jest zimno" i znajduje głównie zastosowanie w tworzeniu systemów eksperckich, które działają m.in. w pralkach, lodówkach, odkurzaczach, czy w systemach wentylacyjnych tuneli podziemnych. Jako ciekawostkę można dodać, że w Japonii przy produkcji sake stosuje się urządzenia działające w oparciu o logikę rozmytą.

2 Definicje

Niech X będzie pewną przestrzenią rozważań. Będzie to dziedzina istotna dla danego zagadnienia. Musi zawsze być określona, gdyż np. zbiór możliwych temperatur w Polsce $[-30\,^\circ\mathrm{C}, 35\,^\circ\mathrm{C}]$ jest inny niż w Afryce $[-5\,^\circ\mathrm{C}, 50\,^\circ\mathrm{C}]$. I naturalnie zdanie ,,Dziś jest zimno" będzie w obu miejscach miało różne znaczenia. Niech $A \subset X$. Z danym zbiorem A można utożsamić funkcje przynależności μ. W klasycznej teorii mnogości jest to funkcja charakterystyczna zbioru A,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A. \end{cases}$$

W logice rozmytej ta funkcja może być dowolna. Funkcję tę można interpretować np. w jakim stopniu dany element x należy do zbioru A.

Definicja 1 (Zbiór rozmyty)
Zbiorem rozmytym A w pewnej niepustej przestrzeni X nazywamy zbiór uporządkowanych par

$$\{(x, \mu_A(x)) : x \in X\}$$

gdzie

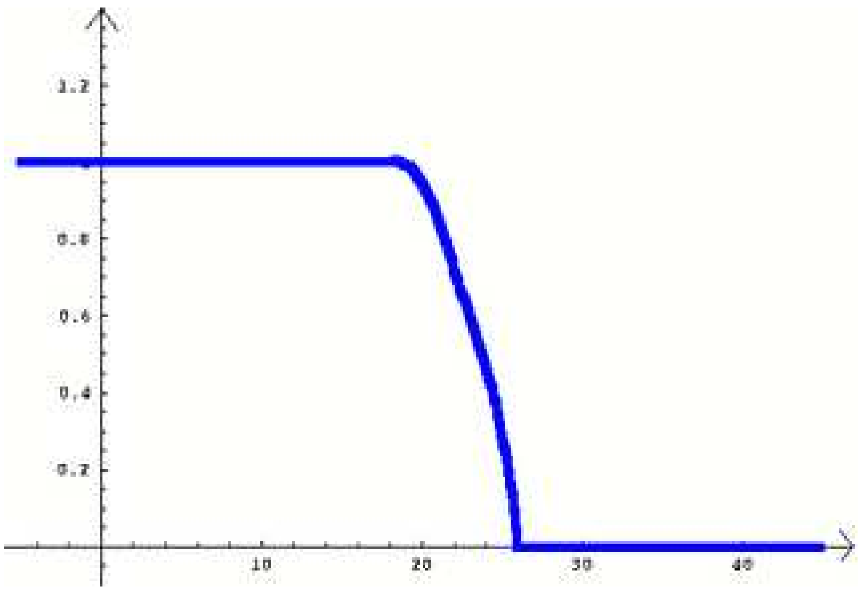
$$\mu_A : X \to \Re$$

jest funkcją przynależności zbioru A.

Przykład 1

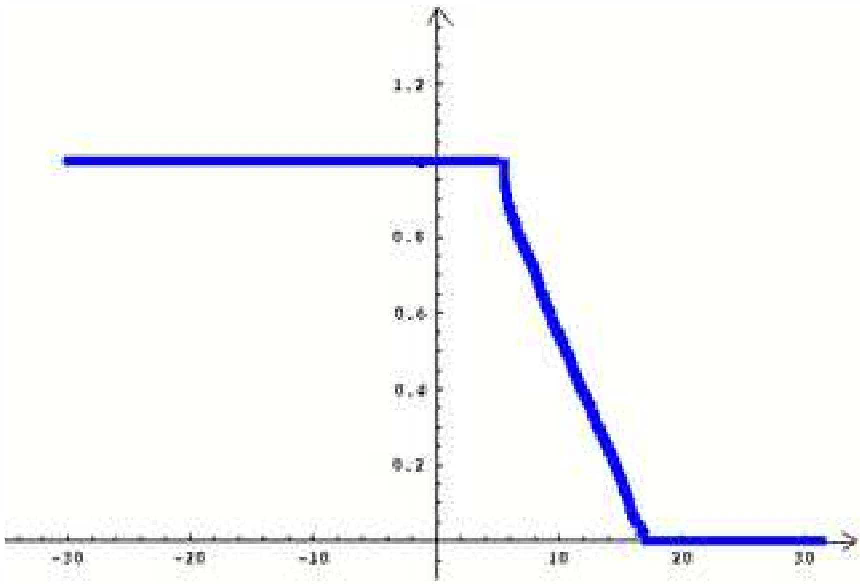
Niech A będzie zbiorem temperatur niskich.

1. $X = [-5\,^\circ\mathrm{C}, 50\,^\circ\mathrm{C}]$ zbiór temperatur w Afryce. Przykładową funkcje przynależności μ_A przedstawiono poniżej.



Wykres 1.

2. $X = [-30\,^\circ\mathrm{C}, 35\,^\circ\mathrm{C}]$ zbiór temperatur w Polsce. Przykładową funkcje przynależności μ_A przedstawiono poniżej.



Wykres 2.

Pewną istotną funkcją przynależności, która jest często wykorzystywana w systemach rozmytych jest funkcja typu *singleton*.

Definicja 2 (Singleton)
Niech $A = \{\overline{x}\}$

$$\mu_{\{\overline{x}\}}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq \overline{x} \\ 1 & x = \overline{x} \end{cases}$$

Funkcję tę często oznacza się w następujący sposób, $\mu_{\{\overline{x}\}}(x) = \delta(x - \overline{x})$.

Przedstawimy kilka pojęć związanych z zbiorami rozmytmi. W nawiasach podano angielskie odpowiedniki.

Definicja 3 (Nośnik zbioru A (*support*))

$$supp(A) = S_A = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$$

Nośnik zbioru A jest to zbiór tych x, które mają znaczenie dla A.

Definicja 4 (Wysokość zbioru A (*height*))

$$h(A) = H_A = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

Mówimy, że zbiór A jest *normalny* jeżeli $h(A) = 1$. Takie ograniczenie na funkcje μ_A z punktu widzenia teorii jest nieistotne, jednakże w zastosowaniach praktycznych okazuje się bardzo przydatne. Jeżeli A jest normalny to wartość funkcji przynależności można interpretować jako procent na ile dany element x należy do A. Jeżeli A nie jest normalny to zawsze można go znormalizować poprzez określenie zbióru A_N o funkcji przynależności

$$\mu_{A_N}(x) = \frac{\mu_A(x)}{h(A)}.$$

Definicja 5 (α–przekrój)

$$A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$$

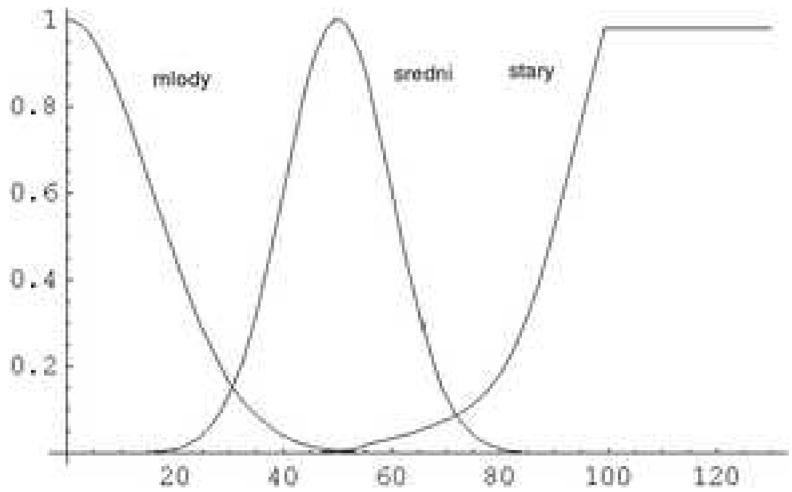
Można też spotkać się z dualnym pojęciem α–*cut*.

Definicja 6 (α–cut)
Jest to zbiór rozmyty A^α o funkcji przynależności

$$\mu_{A^\alpha}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) & \mu_A(x) \geq \alpha \\ 0 & \mu_A(x) < \alpha. \end{cases}$$

Definicja 7 (Zmienna lingwistyczna (*Linguistic Variable*) [1])
Zmienna lingwistyczna jest czwórką (N, T, X, M_N), gdzie

N	*nazwa zmiennej np. wiek*
T	*zbiór wartości lingwistycznych np. {młody, średni, stary }*
X	*przestrzeń rozważań np. $[0, 125]$ lat*
M_N	*funkcja semantyczna $M_N : T \rightarrow$zbiór funkcji przynależności*



Wykres 3. Przykładowe funkcje przynależności ilustrujące M_N

Definicja 8 (Kompletność (*complete*))
Mówimy, że zmienna lingwistyczna V jest kompletna, jeżeli zachodzi

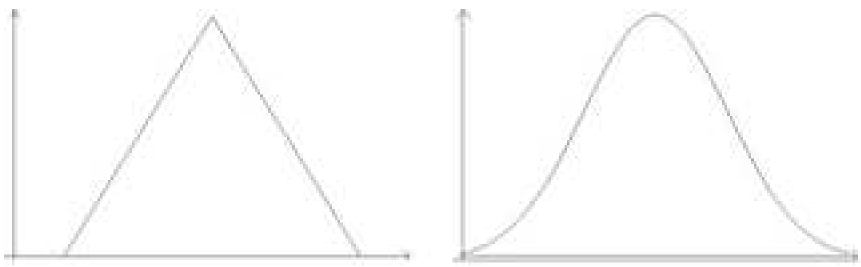
$$\forall_{x \in X} \ \exists_{A \in T} \ \mu_A(x) > 0.$$

Jeżeli zmienna lingwistyczna nie jest kompletna, to wtedy przestrzeń rozważań X_V jest nadmiarowa, bo część jej nie ma żadnego znaczenia.

Definicja 9 (Suma do jedności (*partition of unity*))
Mówimy, że zmienna lingwistyczna V sumuje się do jedności, jeżeli

$$\forall_{x \in X} \ \sum_{i=1}^{\overline{\overline{T}}} \mu_{A^i}(x) \ = \ 1.$$

Suma do jedności nie wprowadza niczego istotnego do teorii, jednakże taka własność okazuje się przydatna w praktyce.
W danej przestrzeni rozważań funkcją przynależności zbioru A może być dowolna funkcja określona na całej przestrzeni X. W praktyce często korzysta się oprócz funkcji typu *sigleton* z funkcji trójkątnych oraz krzywych Gaussa.



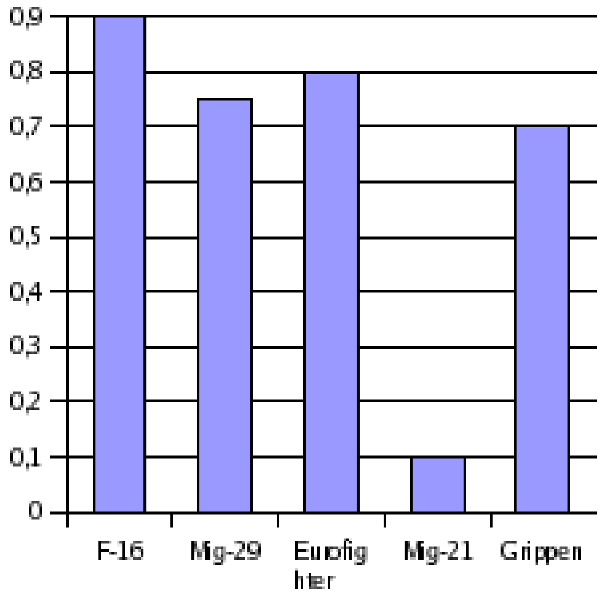
Wykres 4. Funkcja trójkątna i krzywa Gaussa.

Powyżej przyjmowano, że zbiory rozmyte są ciągłe, ale nic nie stoi na przeszkodzie, aby zbiór był dyskretny.

Przykład 2

Niech $X = \{F-16, Mig-29, Eurofighter, Mig-21, Grippen\}$, a A będzie zbiorem ,,Dobry myśliwiec". Wtedy funkcja przynależności μ_A może wyglądać następująco,

Myśliwiec	$\mu_A(x)$
F–16	0.9
Mig–29	0.75
Eurofighter	0.8
Mig–21	0.1
Grippen	0.7



Wykres 5. Funkcja przynależności zbioru ,,Dobry myśliwiec".

Zanim przejdziemy do omówienia podstawowych działań na zbiorach rozmytych potrzebne nam będą jeszcze tzw. *normy trójkątne*.

Definicja 10 *Funkcję dwóch zmiennych* T

$$T:\ [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$$

nazywamy T*-normą, jeżeli:*

1. *funkcja* T *jest nierosnąca względem obu argumentów*

$$T(a,c) \leq T(b,d) \quad dla\ a \leq b, \quad c \leq b$$

2. *funkcja* T *spełnia warunek przemienności*

$$T(a,b) = T(b,a)$$

3. *funkcja* T *spełnia warunek łączności*

$$T(T(a,b),c) = T(a,T(b,c))$$

4. *funkcja* T *spełnia warunki brzegowe*

$$T(a,0) = 0, \quad T(a,1) = a,$$

gdzie $a,b,c,d \in [0,1]$.

Dla dowolnej T-normy zachodzi:

$$T(a,b) \leq min(a,b)$$

Przyjmujemy oznaczenie:

$$T(a,b) = a \overset{T}{\underset{*}{}} b$$

Najczęsciej spotykane T-normy to:

1. $T(a,b) = min(a,b)$
2. $T(a,b) = ab$

Definicja 11 *Funkcję dwóch zmiennych S:*

$$S : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

nazywamy S-normą, je.zeli jest nierosnąca względem obu argumentw, spełnia warunek przemienności, łączności, a ponadto zachodzą następujące warunki brzegowe:

$$S(a,0) = a \quad S(a,1) = 1.$$

Dla dowolnej S-normy zachodzi:

$$max(a,b) \leq S(a,b)$$

Przyjmujemy oznaczenie:

$$S(a,b) = a \overset{S}{\underset{*}{}} b$$

Najczęsciej spotykane S-normy to:

1. $S(a,b) = max(a,b)$
2. $S(a,b) = a + b - ab$

Każdej T-normie odpowiada S-norma, a zależność między nimi wyraża równanie:

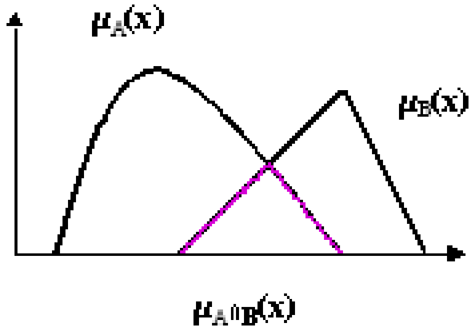
$$a \overset{T}{\underset{*}{}} b = 1 - [(1-a) \overset{S}{\underset{*}{}} (1-b)]$$

Przedstawimy teraz własności zbiorów rozmytych i operatory rozmyte.

Definicja 12 ***Przecięcie*** *zbiorów rozmytych A i B definiujemy jako:*

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Przykład 3

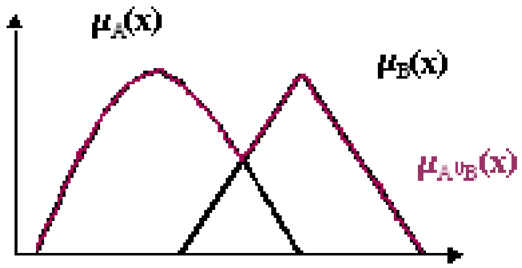


Wykres 6. Przykład przecięcia dwóch zbiorów rozmytych.

Definicja 13 ***Sumę*** *zbiorów rozmytych A i B definiujemy jako:*

$$\mu_{A\cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

Przykład 4

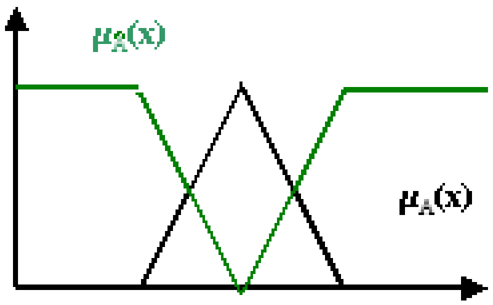


Wykres 7. Przykład sumy dwóch zbiorów rozmytych.

Definicja 14 ***Dopełnieniem*** *zbioru rozmytego $A \subseteq X$ jest zbiór rozmyty $\widehat{A}$ o funkcji przynależności:*

$$\mu_{\widehat{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \textit{dla każdego} \quad x \in X.$$

Przykład 5



Wykres 8. Przykład dopełnienia zbioru rozmytego.

Przedstawione operacje na zbiorach rozmytych mają własności przemienności, łączności i rozdzielności, zachodzą również prawa de Morgana. Ogólnie jednak:

$$A \cap \widehat{A} \neq \emptyset$$

$$A \cup \widehat{A} \neq X$$

Definicja 15 ***Iloczyn kartezjański*** *zbiorów rozmytych* $A_1 \subseteq X_1$, $A_2 \subseteq X_2$, ... ,$A_n \subseteq X_n$ *oznaczamy* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *i definiujemy jako:*

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n))$$

lub

$$\mu_{A_1 \times A_2 \times ... \times A_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_{A_1}(x_1)\mu_{A_2}(x_2)...\mu_{A_n}(x_n))$$

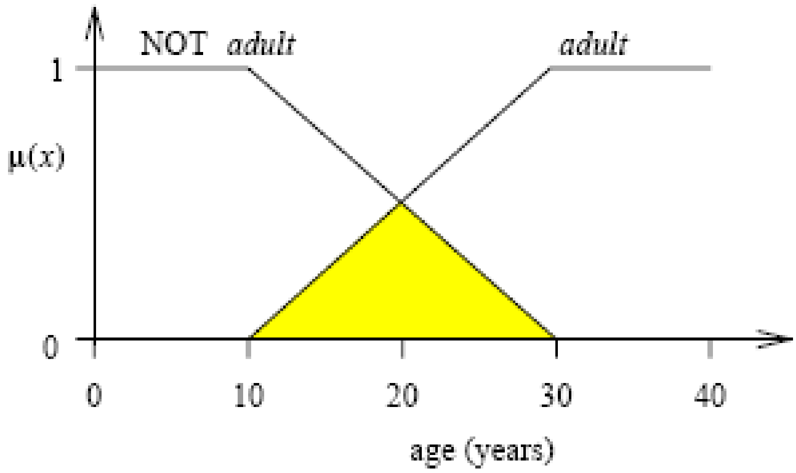
dla każdego $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, ..., x_n \in X_n$.

Definicja 16 ***Entropią rozmytą*** *nazywamy miarę rozmycia zbioru zdefiniowaną wzorem:*

$$E(A) = \frac{c(A\ AND\quad NOT\,A)}{c(A\quad OR\quad NOT\,A)},$$

gdzie c oznacza sumowanie (lub całkowanie) po wszystkich wartościach funkcji przynależności zbioru A.

Przykład 6 ([1])



Wykres 9. Obliczanie entropii zbioru rozmytego.

Niech A oznacza zbiór o nazwie "DOROSŁY" (*adult*). Używając dodawania jako operatora "OR" oraz operatora typu *min* jako "AND" otrzymujemy:

$$E(A) = \frac{c(A\ AND\ \ NOT\,A)}{c(A\ \ OR\ \ NOT\,A)} = \frac{5}{40} = 0.125$$

3 Relacje rozmyte i reguły wnioskowania w logice rozmytej

Definicja 17 ***Relacją rozmytą*** *R między dwoma zbiorami (nierozmytymi) X i Y nazywamy zbiór rozmyty określony na iloczynie kartezjańskim* $X \times Y$. *Relacja rozmyta jest zbiorem par:*

$$R = \{((x,y), \mu_R(x,y)); x \in X, y \in Y\},$$

gdzie $\mu_R : X \times Y \to [0,1]$ *jest funkcją przynależności.*

Funkcja ta każdej parze (x,y), $x \in X$, $y \in Y$ przypisuje stopień przynależności $\mu_R(x,y)$, który ma interpretację siły powiązania między elementami $x \in X$ i $y \in Y$.

Przykład 7 *[2]*

Określmy przestrzenie rozważań: $X = \{x_1, x_2, x_3\} = \{3,4,5\}$,
$Y = \{y_1, y_2, y_3\} = \{4,5,6\}$ oraz relację $R \subset X \times Y$ jako "y jest mniej więcej równe x". Niech

relację tę reprezentuje macierz $[a_{ij}]$, gdzie wartosc a_{ij} oznacza stopień powiązania między elementami x_i i y_j:

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.4 \\ 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Równoważnie możemy tę relację zapisać jako:

$$\mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x = y; \\ 0.8 & \text{jeżeli } |x-y| = 1; \\ 0.6 & \text{jeżeli } |x-y| = 2; \\ 0.4 & \text{jeżeli } |x-y| = 3. \end{cases}$$

Definicja 18 (Złożenie relacji rozmytych)
Złożeniem typu $sup-T$ *relacji rozmytych* $R \subseteq X \times Y$ *i* $S \subseteq Y \times Z$ *nazywamy relację rozmytą* $R \circ S \subseteq X \times Z$ *o funkcji przynależności:*

$$\mu_{R \circ S}(x,z) = \sup_{y \in Y} [\mu_R(x,y) \overset{T}{*} \mu_S(y,z)]$$

Przykład 8 *[2]*

Określmy przestrzenie rozważań: $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$,
$Y = \{y_1, y_2, y_3\} = \{a, b, c\}$, $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon\}$ oraz relację $R \subset X \times Y$ ("x jest w relacji z y"), $S \subset Y \times Z$ ("y jest w relacji z z") zdefiniowane odpowiednio przez macierze:

$$\mu_R(x,y) = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 & 0.8 \\ 0.1 & 0.8 & 0.9 \\ 0.7 & 0.7 & 0.7 \\ 0.8 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix} \mu_S(y,z) = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.9 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Obliczymy $\mu_{R \circ S}(2, \alpha)$. Korzytając z powyższej definicji i przyjmując za T-normę operator *min* otrzymujemy:

$$\mu_{R \circ S}(2, \alpha) = \max_{y \in Y} min[\mu_R(2,y), \mu_S(y, \alpha)] = max[0.1, 0.2, 0.1] = 0.2$$

Definicja 19 (Złożenie zbioru rozmytego i relacji rozmytej)
Złożenie zbioru rozmytego $A \subseteq X$ *i relacji rozmytej* $R \subseteq X \times Y$ *oznaczamy* $A \circ R$ *i definiujemy jako zbiór rozmyty* $B \subseteq Y$

$$B = A \circ R$$

o funkcji przynależności

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} [\mu_A(x) \overset{T}{*} \mu_R(x,y)].$$

Konkretna postać tego wzoru zależy od przyjętej T-normy oraz od własciwości zbioru X. Na przykład, jeżeli $T(a,b) = min(a,b)$ oraz X jest zbiorem o skończonej liczbie elementów, to otrzymujemy złożenie:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X} min[\mu_A(x), \mu_R(x,y)]$$

Definicja 20 (Reguły rozmytej implikacji)
Niech A i B będą zbiorami rozmytymi, $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$.
Rozmytą implikacją *$A \to B$ nazywamy relację R okresloną w $X \times Y$ i zdefiniowaną, na przykład, za pomocą jednej z czterech następujących reguł:*

1. *Reguła typu minimum:*

$$\mu_{A \to B}(x,y) = \mu_R(x,y) = min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

2. *Reguła typu iloczyn:*

$$\mu_{A \to B}(x,y) = \mu_R(x,y) = \mu_A(x)\mu_B(y)$$

3. *Reguła Sharpa:*

$$\mu_{A \to B}(x,y) = \mu_R(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{jeżeli } \mu_A(x) \leq \mu_B(y) \\ 0 & \textit{jeżeli } \mu_A(x) > \mu_B(y) \end{cases}$$

4. *Reguła Łukasiewicza:*

$$\mu_{A \to B}(x,y) = \mu_R(x,y) = min[1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)]$$

Wniosek reguły rozmytej odnosi się do pewnego zbioru rozmytego B', który jest określony przez złożenie zbioru rozmytego A' i rozmytej implikacji
$A \to B$, tzn.:

$$B' = A' \circ (A \to B)$$

W logice klasycznej jako metodę wnioskowania często stosuje się tzw. **"regułę odrywania"** [5]:

przesłanka 1 (fakt) przeslanka 2 (reguła)	A $A \to B$
wniosek	B

W logice rozmytej zarówno przesłanki, jak i wniosek są zbiorami rozmytymi. Wnioskowanie przebiega wtedy w następujący sposób [5]:

przesłanka 1 (fakt) przeslanka 2 (reguła)	A' $A \to B$
wniosek	B'

Przykład 9 *[5]*

Przełanka: *"Prędkość samochodu jest **duża***

Implikacja: *"Jeżeli prędkośś samochodu jest **bardzo duża**, to poziom hałasu jest **wysoki**.*

Wniosek: *"Poziom hałasu jest **średnio wysoki***

W powyższym wnioskowaniu możemy wyróżnić dwie zmienne lingwistyczne, odpowiadaję im przestrzenie rozważań oraz zbiory rozmyte:

zmienna lingwistyczne	przestrzeń rozważań	zbiory rozmyte
x-prędkość samochodu	T_1={mała, średnia, duża, -bardzo duża }	A-bardzo duża prędkość samochodu A'-duża prędkość samochodu
y-poziom hałasu	T_2-{ mały, średni, średniowysoki, wysoki}	B-wysoki poziom hałasu B'-średniowysko poziom ha'l asu

B' - wniosek z przesłanki wyprowadzimy znajdując $\mu_{B'}(y)$. Niech:

$$\mu_B(y) = \max_{x \in X} min[\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)].$$

oraz niech:

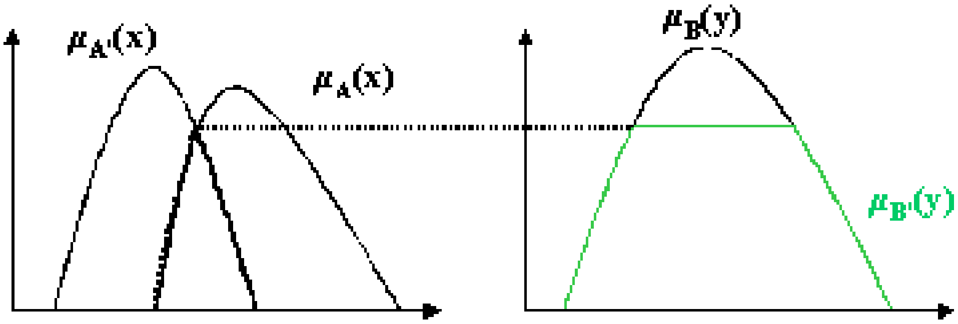
$$\mu_{A \to B}(x, y) = min[\mu_A(x), \mu_B(y).$$

Wtedy:

$$\mu_{B'}(y) = \max_{x \in X} min[\mu_{A'}(x), min(\mu_A(x), \mu_B(y))]$$

$$= min[\max_{x \in X} min(\mu_{A'}(x), \mu_A(x)), \mu_B(y)].$$

Ilustruje to poniższy rysunek:

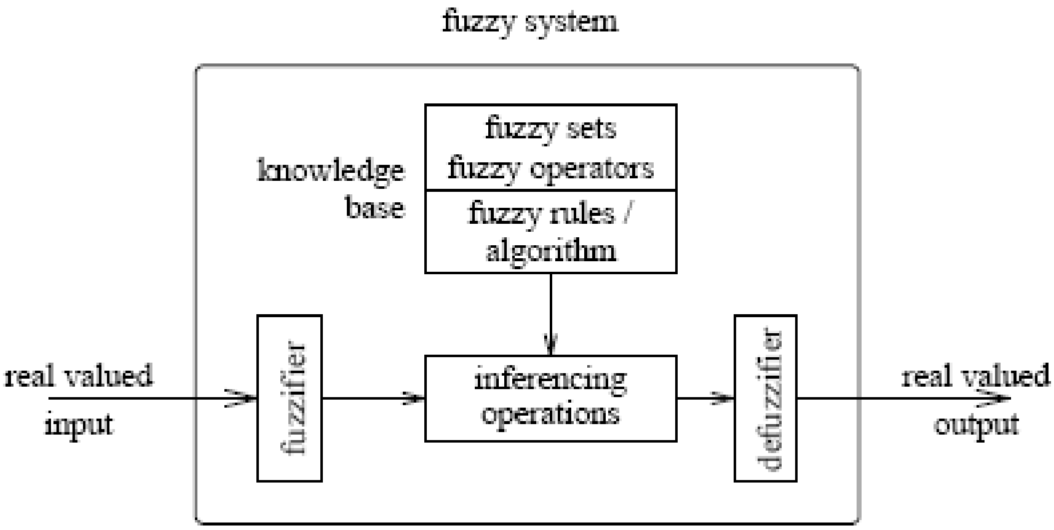


Wykres 10. Rozmyta implikacja. [2]

4 Systemy rozmyte

Typowy proces wnioskowania rozmytego zachodzi w czterech etapach:

1. rozmywanie (fuzzification)
2. zastosowanie operacji rozmytych
3. zastosowaniem implikacji rozmytych
4. precyzowanie (deffuzification)- na przykład metoda wyznaczania "środka ciężkości" *(ang. Centre of Gravity, COG)*



Rysunek 1. Schemat systemu rozmytego. [1]

W pierwszym etapie dane wejściowe muszą zostać poddane ,,fazyfikacji", aby potem można było zastosować operacje rozmyte i reguły wnioskowania rozmytego. Otrzymane w ten sposób wyniki ulegają ,,defazyfikacji" i uzyskujemy konkretną odpowiedź systemu na dane wejściowe.
Systemy (sterowniki) rozmyte są automatami korzystającymi z praw logiki rozmytej w celu podjęcia decyzji w warunkach niepewnych. Automat taki posiada pewną bazę wiedzy oraz reguł wnioskowania i po obserwacji otoczenia i procesie wnioskowania podejmuje decyzję. Decyzja może dotyczyć różnych rzeczy np. siły strumienia wody w przysznicu czy temeperatury w lodówce. Baza wiedzy i reguły wnioskowania pochodzą od eksperta tworzącego system. Zatem efektywność systemu głównie zależy od wiedzy eksperta w danej dziedzinie i jego umiejętności zamodelowania jej za pomocą logiki rozmytej. Są dwa rodzaje systemów rozmytych, sterowniki typu Mamdani oraz sterowniki Takagi-Sugeno.

4.1 Sterownik Mamdaniego

4.1.1 Wnioskowanie

Sterownik działa na zasadzie rozmytej reguły *modus ponens*. Ilustruje to poniższa tabelka [5].

Przesłanka	$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ jest $A^{'}$ $A^{'} = A_1^{'} \times A_2^{'} \times \ldots \times A_n^{'}$
Implikacja	$\bigcup_{k=1}^{N} R^{(k)}, R^{(k)} : A^k \to B^k$ $A^k = A_1^k \times A_2^k \times \ldots \times A_n^k$
Wniosek	y jest $B^{'}$

Na podstawie definicji operacji rozmytych mamy

$$B^{'} = A^{'} \circ \bigcup_{k=1}^{N} R^{(k)}$$

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} [\mu_{A'}(x) \overset{T}{*} \max_{1 \leq k \leq N} \mu_{R^{(k)}}(x, y)]$$

Poniżej przedstawimy prosty przykład abstrakcyjnego sterownika o dwóch wejściach i jednym wyjściu.

Przykład 10 ([5])

Baza reguł :
$R^{(1)}$: IF (x_1 jest A_1^1 AND x_2 jest A_2^1) THEN (y jest B^1)
$R^{(2)}$: IF (x_1 jest A_1^2 AND x_2 jest A_2^2) THEN (y jest B^2)
Niech na wejściu będzie wektor

$$\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$$

Przyjmuje się, że poszczególne operacje rozmyte oraz funkcje przynależności będą zdefiniowane następująco,

$$\mu_{A_1'}(x) = \delta(x_1 - \overline{x}_1)$$

$$\mu_{A_2'}(x) = \delta(x_2 - \overline{x}_2)$$

$$\mu_{\overline{B^k}}(y) = \sup_{x_1, x_2} [\min (\mu_{A_1' \times A_2'}(x_1, x_2), \mu_{R^{(k)}}(x_1, x_2, y))].$$

Za T–normę przyjęto min oraz

$$\mu_{A_1' \times A_2'}(x_1, x_2) = \min (\mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_2'}(x_2))$$

wtedy

$$\mu_{\overline{B^k}}(y) = \mu_{R^{(k)}}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, y).$$

Za implikację przyjmuje się

$$\mu_{R^{(k)}}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, y) = \mu_{A_1^k \times A_2^k \to B^k}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, y)$$

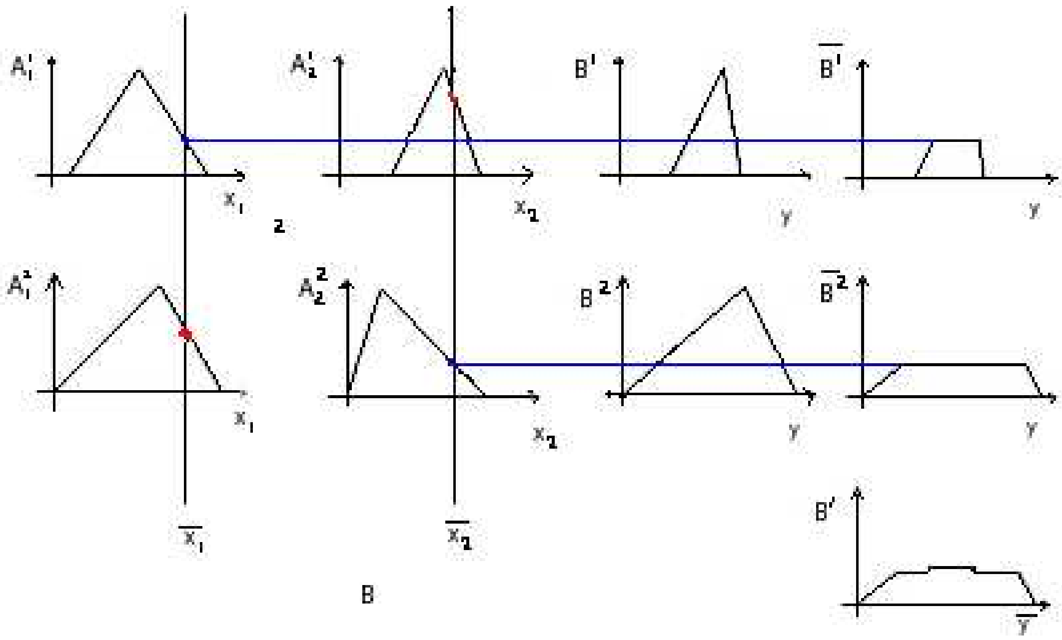
$$\mu_{A_1^k \times A_2^k \to B^k}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, y) = \min\left[\mu_{A_1^k \times A_2^k}(\overline{x}_1, \overline{x}_2), \mu_{B^k}(y)\right]$$

$$\mu_{A_1^k \times A_2^k}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) = \min\left[\mu_{A_1^k}(\overline{x}_1), \mu_{A_2^k}(\overline{x}_2)\right].$$

Ostateczna forma funkcji przynależności wniosku jest

$$\mu_{B'}(y) = \max_{k=1,2} \min\left(\mu_{A_1^k}(\overline{x}_1), \mu_{A_2^k}(\overline{x}_2), \mu_{B^k}(y)\right).$$

Za funkcje przynależności przyjęto funkcje trójkątne. Poniższe wykresy ilustrują powyższe wzory.



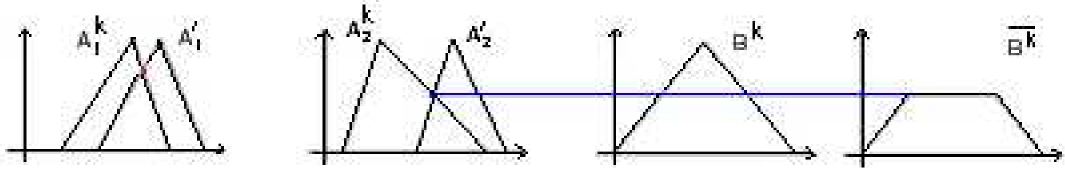
Wykres 11. Proces wnioskowania

Przyjęcie, że $\mu_{A_1'}(x)$ i $\mu_{A_2'}(x)$ są typu singleton można rozumieć np., że pomiar wejścia był bezbłędny. Przyjęcie innej funkcji przynależności może być związane np. z błędem pomiaru. Zmienią się wtedy wzory na $\mu_{\overline{B^k}}(y)$. Przyjmując definicje iloczynu kartezjańskiego i implikacji jak powyżej:

$$\mu_{\overline{B^k}}(y) \overset{np.}{=} \sup_{x_1, x_2}\left[\min\left(\mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_2'}(x_2)\right), \mu_{R^{(k)}}(x_1, x_2, y)\right] =$$

$$= \min\left[\sup_{x_1}\left(\min\left(\mu_{A_1'}(x_1), \mu_{A_1^k}(x_1)\right)\right), \sup_{x_2}\left(\mu_{A_2'}(x_2), \mu_{A_2^k}(x_2)\right), \mu_{B^k}(y)\right].$$

Ilustrują to poniższe wykresy.



Wykres 12. Proces wnioskowania

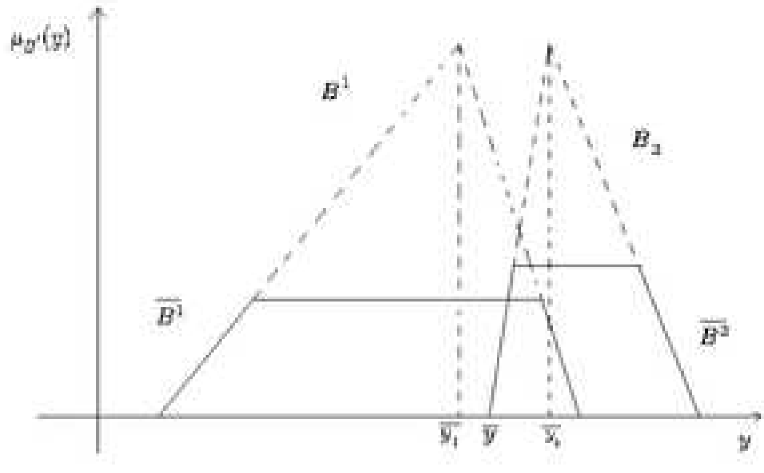
4.1.2 Blok wyostrzania

Najczęściej system musi zwrócić na swoim wyjściu pojedynczą liczbę. Musi być ona wyznaczona na podstawie zbioru rozmytego, który jest wnioskiem. Do tego służy blok wyostrzania. Jest wiele metod na wyliczenie tej wartości. Wybór, którą z nich użyć pozostaje w gestii eksperta. Poniżej przedstawiono cztery najpopularniejsze. $\overline{y}$ oznacza wyliczone wyjście.

1. *Center average defuzzification*

$$\overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \mu_{\overline{B^k}}(\overline{y}^k)\overline{y}^k}{\sum_{k=1}^{N} \mu_{\overline{B^k}}(\overline{y}^k)}$$

gdzie $\overline{y}^k$ jest punktem w którym funkcja $\mu_{B^k}(y)$ osiąga maximum.



Wykres 13. Center average defuzzification

2. *Center of sums defuzzification*
Metoda środka ciężkości sum.

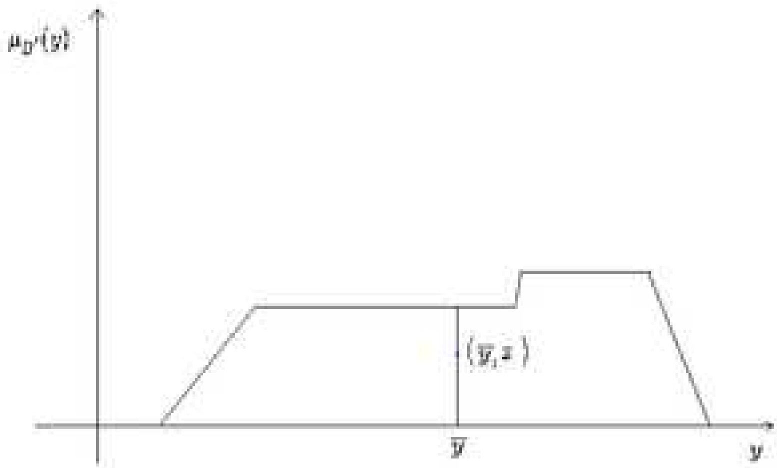
$$\overline{y} = \frac{\int_Y y \sum_{k=1}^{N} \mu_{\overline{B^k}}(y)dy}{\int_Y \sum_{k=1}^{N} \mu_{\overline{B^k}}(y)dy}$$

3. *Center of gravity*

   Metoda środka ciężkości

$$\overline{y} = \frac{\int_Y y\mu_{B'}(y)dy}{\int_Y \mu_{B'}(y)dy}$$

   Wartość $\overline{y}$ jest taka, że punkt $(\overline{y}, x)$ jest środkiem ciężkości figury pod wykresem funkcji $\mu_{B'}(y)$.

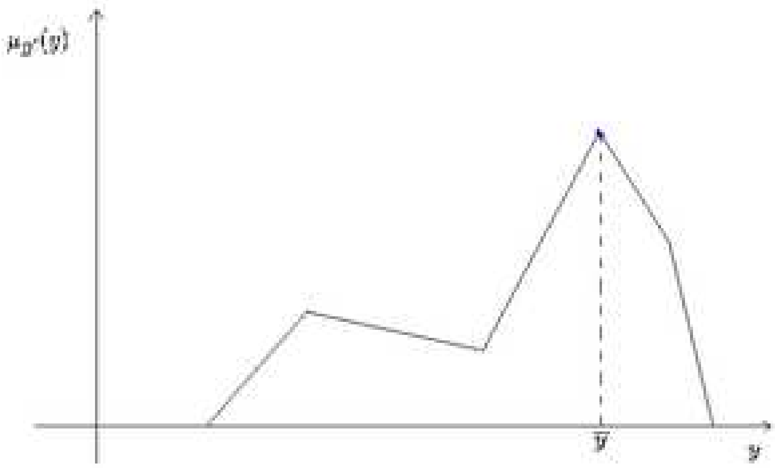


Wykres 14. Center of gravity

4. *Metoda maximum*

$$\overline{y} = \sup_{y \in Y} \mu_{B'}(y)$$

   Metoda ta nie bierze pod uwagę w ogóle kształtu funkcji przynależności wniosku.



Wykres 15. Metoda maximum

4.2 Sterownik Takagi-Sugeno

Sterownik tego typu posiada bazę reguł, jednakże różni się ona od tej w sterowniki Mamdani. Rozmyta jest tylko część IF reguły, część THEN jest pewną funkcją. Postać reguły jest następująca,
$R^{(k)}$: IF (x_1 jest A_1^k AND ... AND x_n jest A_n^k) THEN $y_k = f^{(k)}(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie $f^{(k)}$ jest jakąś funkcją zmiennych $x_1 \ldots x_n$.
Dla danego wektora wejściowego $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ wyjście k–tej reguły jest $\overline{y}_k = f^{(k)}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$.
Wyjście systemu $\overline{y}$ wynosi,

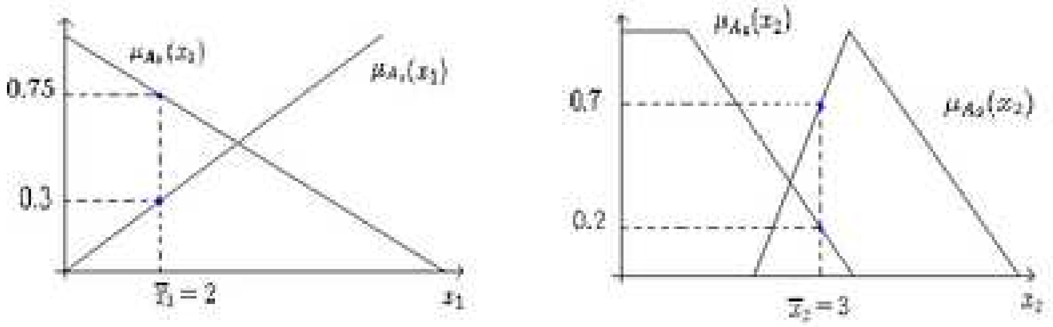
$$\overline{y} = \frac{\sum_{k=1}^{N} w^k \overline{y}_k}{\sum_{k=1}^{N} w^k},$$

gdzie

$$w_k = \begin{cases} \min\left(\mu_{A_1^k}(\overline{x}_1), \ldots, \mu_{A_n^k}(\overline{x}_n)\right) \\ \text{lub} \\ \mu_{A_1^k}(\overline{x}_1) \cdot \ldots \cdot \mu_{A_n^k}(\overline{x}_n) \end{cases}$$

Przykład 11 ([5])

Baza reguł :
$R^{(1)}$ IF (x_1 IS A_1 AND x_2 IS A_2) THEN $y_1 = 2 + 7x_1 - 3x_2$
$R^{(2)}$ IF (x_1 IS A_3 AND x_2 IS A_4) THEN $y_2 = -2x_1 + 5x_2$



Wykres 16. Funkcje przynależności.

Wejście $\overline{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2) = (2, 3)$.
$\mu_{A_1}(2) = 0.3$ $\mu_{A_3}(2) = 0.75$ $\mu_{A_2}(3) = 0.7$ $\mu_{A_4}(3) = 0.2$

$$w^1 = \min\left(\mu_{A_1}(\overline{x}_1), \mu_{A_2}(\overline{x}_2)\right) = \min(0.3, 0.75) = 0.3$$

$$w^2 = \min\left(\mu_{A_3}(\overline{x}_1), \mu_{A_4}(\overline{x}_2)\right) = \min(0.75, 0.2) = 0.2$$

$$\overline{y}_1 = 2 + 7\overline{x}_1 - 3\overline{x}_2 = 7$$

$$\overline{y}_2 = -2\overline{x}_1 + 5\overline{x}_2 = 11$$

Wyjście systemu będzie,

$$\overline{y} = \frac{w^1\overline{y}_1 + w^2\overline{y}_2}{w^1 + w^2} = 8.6$$

5 Tworzenie bazy reguł [5]

Najczęściej twórca systemu rozmytego posiada pewną wiedzę ekspercką i na jej podstawie powstają reguły. Jednakże może się zdażyć sytuacja, w której posiadamy tylko dane numeryczne, tzn. zbiór parametrów i odpowiedź, jaką system powinien na nie udzielić. Najczęściej stosuje się w takich sytuacjach systemy neuronowo-rozmyte np. ANFIS (*Artificial Network Fuzzy Interferace System*), które posiadają wiele zalet, jednakże ich mankamentem jest długotrwały proces iteracyjnego uczenia. Istnieje prostsza metoda, często okazująca się efektywna, która zostanie omówiona poniżej.
Niech wejściem systemu będzie wektor $[x_1, \ldots, x_n]$. Każda składowa wektora będzie zmienną lingwistyczną systemu. Niech danymi numerycznymi będzie zbiór $[x_1(i), \ldots, x_n(i), d(i)]$ $i = 1, 2, \ldots$, gdzie $d(i)$ jest odpowiedzią systemu na i–te wejście. Załóżmy, że znamy dolne i górne ograniczenie każdej składowej,

$$x_j^- = \min(x_j) \quad x_j^+ = \min(x_j),$$

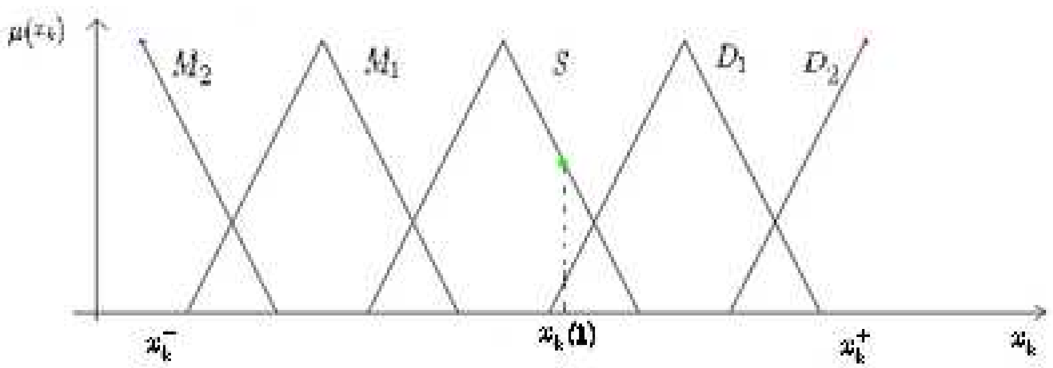
czyli

$$\forall_{1 \le j \le n} x_j \in [x_j^-, x_j^+].$$

Każdy przedział $[x_j^-, x_j^+]$ dzielimy na $2N_j + 1$ części i powstaje dla każdej zmiennej $2N_j + 1$ wartości lingwistycznych, $M_{N_j}, \ldots, M_1, S, D_1, \ldots, D_{N_j}$. Dla każdego zbioru rozmytego definiujemy funkcję przynależności. Może być np. trójkątna.

Przykład 12

$N_j = 3$



Wykres 17. Przykładowe funkcje przynależności.

Następnie dla każdego wektora danych wejściowych tworzymy regułę. Rozpatrzmy i–ty wektor $[x_1(i), \ldots, x_n(i), d(i)]$. Dla danej składowej $x_k(i)$ przyjmuje się, że jest on w tym zbiorze, w którym jest max po wszystkich funkcjach przynależności. Na powyższym wykresie będzie $x_k(1)$ IS S. W efekcie powstaje reguła,
IF (x_1 IS A_i^1 AND ... AND x_n IS A_i^n) THEN y IS B_i.
Każdej regule przypisuje się stopień prawdziwości,

$$SP(R_i) = \mu_{A_i^1}(x_1(i)) \cdot \ldots \cdot \mu_{A_i^n}(x_n(i))\mu_{B_i}(d(i))$$

Baza reguł będzie składać się z reguł wygenerowanych przez każdy wektor danych. Jeżeli się okaże, że dwie reguły są sprzecze z sobą, tzn. mają te same poprzedniki implikacji ale różne następniki to wybierana jest ta reguła, która ma wyższy stopień prawdziwości.

5.1 Wyostrzanie

Niech na wejściu systemu pojawi się $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Dla każdej reguły określamy jej stopień aktywności,

$$\tau^{(i)} = \mu_{A_i^1}(\overline{x}_1) \cdot \ldots \cdot \mu_{A_i^n}(\overline{x}_n).$$

Wyjście sytemu będzie,

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{M} \tau^{(i)}\overline{y^{(i)}}}{\sum_{i=1}^{M} \tau^{(i)}},$$

gdzie $\overline{y^{(i)}}$ takie, że

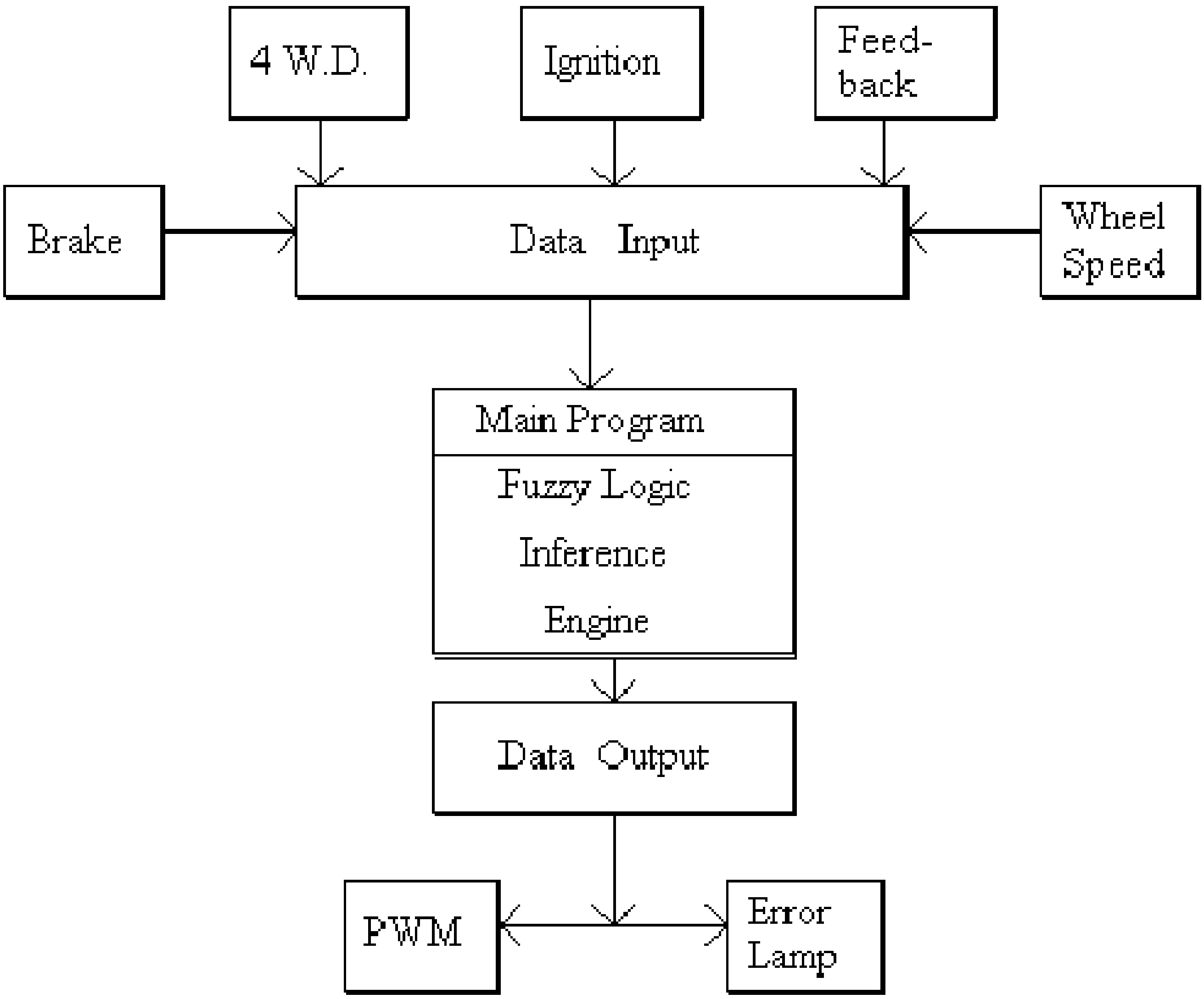
$$\mu_{\overline{B^i}}(\overline{y^{(i)}}) = \max_y \mu_{\overline{B^i}}(y).$$

6 Zastosowania

6.1 Samochodowy system ABS [3]

System ABS (ang. *Anti-lock Brake System*) instaluje się w samochodach, aby zapewnić maksymalną kontrolę nad pojazdem. W sytuacji niebezbiecznej ważnym czynnikiem jest czas - chodzi o to, aby umożliwić jak najszybsze wyhamowanie pojazdu w razie potrzeby. Jednak problem ten okazuje się być złożony. Ma na to wpływ wiele czynników, np. prędkość samochodu, siła nacisku na pedał gazu/hamulec, rodzaj nawierzchni, warunki atmosferyczne. Wszystkie te elementy nieustannie się zmieniają podczas jazdy i dlatego baza reguł potrzebnych do sterowania takim system musiałaby być bardzo duża, gdybyśmy chcieli uwzględnić wszystkie możliwe ,,kombinacje". W konsekwencji również ewaluacja tych reguł zajęłaby zbyt wiele czasu, co mogloby mieć nawet tragiczne konsekwencje. Stąd pomysł, aby system ABS oparty był na wnioskowaniu rozmytym, gdzie wszystkie zmienne i przyjmowane przez nie wartości opisane byłyby za pomocą odpowiednich funkcji przynależności. Jako pierwsze systemy kontrolowania rozmytego wprowadziły w swoich pojazdach koncerny Mitsubishi (*1993*

Mitsubishi Gallant) i General Motors (*Saturn*). Moduł „rozmytego" ABS sklada się m. in. z czujników prędkości zainstalowanych na każdym kole, tzw. jednostek kontrolujących (*electronic control units-ECUs*) oraz modulatorów hamowania. A oto przykład reguły użytej w implementacji systemu:
"If the rear wheels are turning slowly and a short time ago the vehicle speed was high, then reduce rear brake pressure".
Schemat takiego systemu przedstawiono poniżej:



Rysunek 2. Schemat systemu ABS opartego na wnioskowaniu rozmytym. [3]

6.2 Wpływ czynników geomorfologicznych na plon żyta [4]

Na podstawie plonu zimowego z 1997 roku z farmy w wschodnim Kolorado bada się za pomocą sytemu rozmytego zależność plonu od różnych czynników. Zmiennymi lingwistycznymi systemu były:

1. nachylenie stoku
2. aspekt odchylenia w stopniach od północy
3. krzywizna, druga pochodna kątu odchylenia
4. różne parametry dostępności gleby.

Zbiór wartości lingwistycznych każdej zmiennej był mocy 5. Na podstawie danych numerycznych zebranych z terenu skonstruowano system rozmyty za pomocą ANFIS. Cel pracy to porównanie, jak poszczególne czynniki oraz pary czynników wpływają na plon. Główny wynik to wskazanie, że pary czynników mają wpływ, kóry jest niezauważalny, gdy bierze się pod uwagę tylko poszczególne czynniki.

7 Implementacje

Istnieje bardzo rozbudowane środowisko do tworzenia systemów rozmytych w MATLABie. Edward Sazanov, z wydziału Electrical and Computer Engineering z Clarkson Univeristy na swojej stronie `http://people.clarkson.edu/~esazanov/neural_fuzzy` oferuje klasę JAVA do tworzenia prostych systemów rozmytych.

References

[1] M. Brown. An introduction to fuzzy and neurofuzzy systems, grudzień 1996.

[2] Wojciech Jędruch. Sztuczna inteligencja. Gdańsk, listopad 2004. Materiały do wykładu.

[3] David Elting, Mohammed Fennich, Robert Kowalczyk, Bert Hellenthal. Fuzzy anti-lock brake solution. `http://www.intel.com/design/mcs96/designex/2351.html`, INTEL.

[4] Dmitry Kurtener, Timothy Green, Elena Krueger-Shvetsova, Robert Erskine. Exploring relationships between geomorphic factos and wheat yield using fuzzy infernce systems. Colorado State University, marzec 2005. Hydrology Days.

[5] Danuta Rutkowska, Maciej Piliński, Leszek Rutkowski. *Sieci neuronowe, algorytmy genetyczne i systemy rozmyte.* PWN, W-wa, 1999.