Liczba obrotu i twierdzenie Poincare'go o klasyfikacji homeomorfizmów okręgu.

Justyna Signerska

jussig@wp.pl

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej,
Politechnika Gdańska

Liczba obrotu: definicja i własności

Odwzorowanie okręgu

Niech $S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ i $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ będzie *naturalną projekcją*.

Uwaga

Jeżeli odwzorowanie okręgu $\varphi : S^1 \to S^1$ jest ciągłe, to istnieje ciągłe odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że poniższy diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbb{R} \arrow[d, "\pi"] \\ S^1 \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \end{tikzcd}$$

Wówczas f nazywamy **podniesieniem** φ.

Stopień odwzorowania okręgu

Uwaga

Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest podniesieniem φ do $\mathbb{R}$ to spełniony jest warunek:

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} f(x)} \quad \text{dla} \quad z = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x},\ x \in \mathbb{R}.$$

Podniesienie f jest wyznaczone jednoznacznie z dokładnością do przesunięcia o liczbę całkowitą:

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Istnieje stała d taka, że $f(x+1) = f(x) + d$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

d nazywamy **stopniem odwzorowania** φ (stopień odwzorowania nie zależy od wyboru podniesienia f).

Podniesienie homeomorfizmu okręgu

Uwaga

Jeżeli $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ jest homeomorfizmem, to podniesienie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest monotonicznie rosnącą funkcją spełniającą

$$f(x+1) = f(x) + 1, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

lub malejącą o analogicznej własności

$$f(x+1) = f(x) - 1, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

co oznacza, że homeomorfizm okręgu jest zawsze stopnia 1 lub -1.

Definicja

Mówimy, że homeomorfizm okręgu $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ **zachowuje orientację**, jeśli jego podniesienie f spełnia (1). W przeciwnym wypadku (tj. gdy zachodzi (2)) mówimy, że φ **zmienia orientację**.

Liczba obrotu

Twierdzenie

Niech $\varphi : S^1 \to S^1$ będzie homeomorfizmem i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie podniesieniem φ. Dla każdego $x_0 \in \mathbb{R}$ granica

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f^n(x_0) = \varrho \tag{3}$$

istnieje i nie zależy od wyboru x_0. Jest ona liczbą wymierną wtedy i tylko, gdy φ ma orbitę periodyczną.

Definicja

Liczbę ϱ nazywamy liczbą obrotu odwzorowania f.

Liczbą obrotu homeomorfizmu $\varphi : S^1 \to S^1$ nazywamy liczbę $\varrho \in [0, 1)$ określoną jako $\varrho = \varrho_k \mod 1$, gdzie ϱ_k są liczbami obrotu podniesień $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Własności liczby obrotu

Twierdzenie

Jeśli homeomorfizm $\psi : S^1 \to S^1$ zachowuje orientację, to $\varrho(\psi^{-1}\varphi\psi) = \varrho(\varphi)$.

Fakt

Niech $\varphi : S^1 \to S^1$ będzie homeomorfizmem zachowującym orientację takim, że $\varrho \in \mathbb{Q}$. Wówczas wszystkie orbity periodyczne mają ten sam okres.

Twierdzenie

Liczba obrotu $\varrho(\cdot)$ jest ciągła w topologii C^0.

Własności liczby obrotu

Niech $\varphi_0,\ \varphi_1 : S^1 \to S^1$ będą homeomorfizmami zachowującymi orientację. Określmy homotopię pomiędzy φ_1 i φ_2 jako $\varphi_t = \frac{t\varphi_0+(1-t)\varphi_1}{\|t\varphi_0+(1-t)\varphi_1\|}$, $t \in [0,1]$. Niech f_0 i f_1 będą podniesieniami φ_0 i φ_1 odpowiednio, uzyskanymi poprzez podniesienie tej homotopii do $\mathbb{R}$.

Definicja

Powiemy, że $\varphi_0 \prec \varphi_1$, jeśli $f_0(x) < f_1(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie

Liczba obrotu $\varphi(\cdot)$ jest monotoniczna: jeśli $\varphi_1 \prec \varphi_2$, to $\varrho(\varphi_1) \leq \varrho(\varphi_2)$.

Monotoniczność liczby obrotu

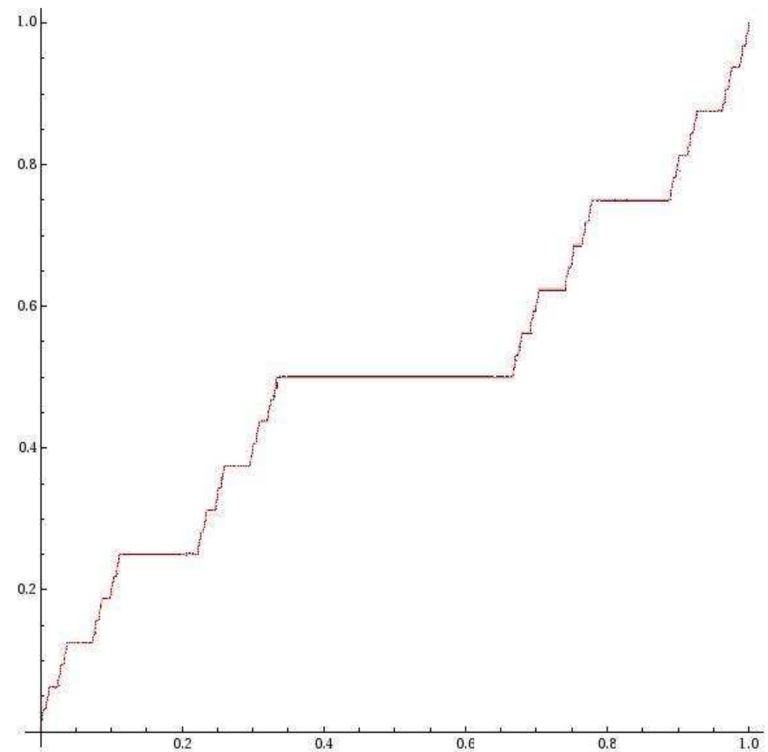
Twierdzenie
Jeśli $\varphi_1 \prec \varphi_2$ oraz $\varrho(\varphi_1) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, to $\varrho(\varphi_1) < \varrho(\varphi_2)$.

Twierdzenie
Niech $\varphi : S^1 \to S^1$ będzie homeomorfizmem zachowującym orientację o wymiernej liczbie obrotu $\varrho(\varphi) = p/q$, lecz posiadającym również punkty nieokresowe. Wtedy wszystkie dostatecznie małe perturbacje $\overline{\varphi}$ spełniające $\overline{\varphi} \prec \varphi$ lub wszystkie dostatecznie małe perturbacje $\overline{\varphi}$ takie, że $\varphi \prec \overline{\varphi}$ mają liczbę obrotu $\varrho(\overline{\varphi}) = p/q$.

Diabelskie schody

Definicja

Monotoniczną funkcję ciągłą $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ nazywamy **diabelskimi schodami**, jeżeli istnieje rodzina $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ rozłącznych otwartych podprzedziałów odcinka $[0,1]$, których suma jest gęsta w $[0,1]$ i na których funkcja F przyjmuje stałe wartości, różne dla $\alpha_1 \neq \alpha_2$.



Monotoniczność liczby obrotu - c.d.

Twierdzenie

Niech $\{\varrho_t\}_{t\in[0,1]}$ będzie monotoniczną ciagłą rodziną homeomorfizmów S^1 zachowujących orientację taką, że przyporządkowanie $\varrho : t \mapsto \varrho(\varphi_t)$ nie jest stałe. Jeśli istnieje zbiór gęsty $A \in \mathbb{Q}$ taki, że żadne z odwzorowań φ_t nie jest topologicznie sprzężone z obrotem $\mathcal{R}_\alpha$ dla $\alpha \in \mathcal{A}$, to **odwzorowanie** $\varrho(\cdot)$ **tworzy diabelskie schody**.

Klasyfikacja Poincare'go

Wymierna liczba obrotu

Twierdzenie

Niech $\varphi : S^1 \to S^1$ będzie homeomorfizmem zachowującym orientację o wymiernej liczbie obrotu $\varrho(\varphi) = p/q$. Wówczas istnieją dwa możliwe rodzaje orbit nieokresowych odwzorowania φ:

- jeśli φ ma dokładnie jedną orbitę okresową, to każdy inny punkt jest heterokliczny względem odwzorowania φ^q do dwóch punktów na orbicie periodycznej, różnych jeśli orbita periodyczna nie jest jednopunktowa,
- jeśli φ ma więcej orbit okresowych, to każdy punkt nieperiodyczny jest heterokliniczny pod działaniem φ^q do dwóch punktów na różnych orbitach okresowych.

Niewymierna liczba obrotu

Twierdzenie [Poincaré]

Niech homeomorfizm $\varphi : S^1 \longrightarrow S^1$ zachowujący orientację ma niewymierną liczbę obrotu. Wówczas:

- jeśli φ jest tranzytywne, to jest sprzężone z obrotem $\mathcal{R}_{\varrho(\varphi)}$,
- jeśli φ nie jest tranzytywne, to jest semisprzężone z obrotem $\mathcal{R}_{\varrho(\varphi)}$ za pomocą monotonicznego ciągłego nieodwracalnego odwzorowania $H : S^1 \longrightarrow S^1$.

Typy orbit a liczba obrotu

wymierna liczba obrotu $\varrho = p/q \in \mathbb{Q}$
I. orbity periodyczne o tym samym okresie równym q i uporządkowane w ten sam sposób jak orbity obrotu $\mathcal{R}_\varrho$
II. orbity homokliniczne do danej orbity okresowej
III. orbity heterokliniczne do dwóch różnych orbit okresowych

Typy orbit a liczba obrotu

niewymierna liczba obrotu $\varrho = \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
I. orbity gęste w S^1 i uporządkowane w ten sam sposób jak orbity obrotu $\mathcal{R}_\varrho$
II. orbity gęste w zbiorze Cantora
III. orbity homokliniczne do zbioru Cantora

Homeomorfizm odwracający orientację

Twierdzenie
Niech $\varphi : S^1 \to S^1$ będzie homeomorfizmem odwracającym orientację. Wówczas φ ma dokładnie dwa punkty stałe i liczbę obrotu równą 0.

Bibliografia

1. Hasselblatt, B., Katok, A., *A First Course in Dynamics*, Cambridge University Press, 2003.
2. Katok, A., Hasselblatt, B., Mendoza, L., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 1993.
3. Misiurewicz, M., *Rotation Theory*.
4. Szlenk, W., *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems*, PWN, Warszawa 1984.