Twierdzenie Łosia o ultraprodukcie

Stanisław Dercz

2010.03.22

Streszczenie

Prezentujemy ciekawe twierdzenie teorii modeli, umożliwiające budowanie modeli teorii pierwszego rzędu. Wprowadzamy jedynie konieczny aparat pojęciowy, prezentujemy krótki dowód, a następnie kilka konsekwencji: twierdzenie o zwartości, istnienie niestandardowych modeli arytmetyki, oraz twierdzenie (metateorii ciał algebraicznych) o charakterystyce.

Wstęp

Teoria modeli bada relacje między wyrażeniami teorii (zdaniami pewnego języka sformalizowanego), a strukturami matematycznymi, do których te wyrażenia się odnoszą. Na przykład możemy rozważać teorię grup: jej język składa się z jednego symbolu działania dwuargumentowego $\times$ i jednego symbolu stałej e, dodatkowo zaś z relacji równości $=$, logicznych symboli negacji $\neg$, alternatywy $\vee$ i kwantyfikatora egzystencjalnego $\exists$, oraz przeliczalnie wielu symboli dla zmiennych x_1,x_2,... (a także nawiasów okrągłych). Na teorię grup składać się wtedy mogą zdania (pierwszego rzędu[1]):

$$\neg((\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)\neg(\times(\times(x_1,x_2),x_3) = \times(x_1,(\times(x_2,x_3)))),$$
$$\neg(\exists x_1)\neg(\times(x_1,e) = \times(e,x_1) = x_1),$$
$$\neg(\exists x_1)\neg((\exists x_2)(\times(x_1,x_2) = e)).^2$$

Modelem tej teorii (strukturą w której spełnione są wszystkie jej zdania) jest dowolna grupa, np. $\mathbb{Z}_2$, w której interpretacją symbolu e jest stała 0, symbolu $\times$ - dodawanie modulo 2, a zmienne przebiegają zbiór $\{0,1\}$.

Materiał przedstawiony w niniejszym referacie omówiony jest m.in. w [1] (rozdziały 8 i 9). Ciekawe wprowadzenie w teorię modeli znajdzie czytelnik w [2], oraz szerzej w [3].

[1] W językach pierwszego rzędu zmienna podkwantyfikatorowa może przebiegać jedynie indywidua, a nie ich podzbiory czy np. formuły.

[2] Ponieważ tak zapisane zdania ciężko się czyta, w dalszej części artykułu przyjmiemy skróty i konwencje, wobec których powyższe zdania przyjmą postać:
$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \times y) \times z = x \times (y \times z))$,
$(\forall x)(x \times e = e \times x = x)$,
$(\forall x)(\exists y)(x \times y = e)$.

Definicje

Językiem $\mathcal{L}$ nazwiemy zbiór symboli, którymi oznaczać będziemy funkcje, stałe i relacje, wraz z tzw. sygnaturą σ, czyli funkcją przyporządkowującą symbolowi jego arność (np. dla symbolu stałej c mamy $\sigma(c) = 0$, a dla symbolu relacji dwuczłonowej r $\sigma(r) = 2$).

$\mathcal{L}$-strukturą nazwiemy układ $\mathcal{M} = (M, \{f^{\mathcal{M}}\}_{f\in\mathcal{L}}, \{c^{\mathcal{M}}\}_{c\in\mathcal{L}}, \{r^{\mathcal{M}}\}_{r\in\mathcal{L}})$, gdzie $M \neq \emptyset$ to tzw.*uniwersum struktury*; każdemu symbolowi funkcyjnemu $f \in \mathcal{L}$ przyporządkowujemy funkcję $f^{\mathcal{M}} : M^{\sigma(f)} \to M$ zwaną *intepretacją symbolu funkcyjnego f w $\mathcal{M}$*. Analogicznie określamy interpretacje symboli relacyjnych $r \in \mathcal{L}$: $r^{\mathcal{M}} \subset M^{\sigma(r)}$ i symboli stałych $c \in \mathcal{L}$: $c^{\mathcal{M}} \in M$.

Mocą struktury $\mathcal{M}$ nazywamy moc jej uniwersum $|M|$, natomiast *mocą języka* $\mathcal{L}$ - większą z liczb $\aleph_0$, $|\mathcal{L}|$ (przyjmujemy tu, że zbiór symboli zmiennych zawsze jest przeliczalny).

Termem nazwiemy symbol dowolnej stałej c, zmiennej x_i ($i \in \mathbb{N}$), bądź dla symbolu f dowolnej funkcji n-arnej wyrażenie $f(t_1, ..., t_n)$, w którym t_1,...,t_n są termami. W określonej strukturze $\mathcal{M}$, przy określonym *wartościowaniu* (czyli ustaleniu „znaczenia" wszystkich użytych zmiennych) elementami $(a_1, ..., a_k) \in M^k$ każdy term t posiada interpretację (ozn. $t^{\mathcal{M}}\langle a_1, ..., a_k\rangle$), będącą również przedmiotem z M: interpretacją symbolu stałej c, jest przedmiot $c^{\mathcal{M}}$, interpretacją symbolu zmiennej x_i jest przedmiot a_i, zaś interpretacją termu $f(t_1, ..., t_n)$ jest wartość funkcji $f^{\mathcal{M}}$ dla argumentów będących interpretacjami termów t_1,...,t_n (przy tym samym wartościowaniu).

Formułą nazywamy wyrażenie postaci $t_1 = t_2$ gdzie t_1, t_2 są termami, bądź też dla dowolnego symbolu relacji n-arnej r wyrażenie $r(t_1, ..., t_n)$, w którym t_1,...,t_n są termami, bądź też dla dowolnych formuł φ i ψ wyrażenia postaci $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$ oraz $(\exists v)(\varphi(v))$. Zbiór formuł języka $\mathcal{L}$ oznaczać będziemy $Form_{\mathcal{L}}$.

Zdaniem nazywamy formułę o wszystkich zmiennych związanych[3]. Zbiór zdań języka $\mathcal{L}$ oznaczać będziemy $Sent_{\mathcal{L}}$.

Powiemy, że formuła φ jest *spełniona* w $\mathcal{L}$-strukturze $\mathcal{M}$ przez układ $(a_1, ..., a_n) \in M^n$ (ozn. $\mathcal{M} \models \varphi\langle a_1, ..., a_n\rangle$) wtedy, gdy:

- φ jest postaci $(t_1 = t_2)$, t_1, t_2 są termami, oraz $t_1^{\mathcal{M}}\langle a_1, ..., a_n\rangle = t_2^{\mathcal{M}}\langle a_1, ..., a_n\rangle$,
- φ jest postaci $r(t_1, ..., t_m)$, $t_1, ..., t_m$ są termami, oraz $(t_1^{\mathcal{M}}\langle a_1, ..., a_n\rangle, ..., t_m^{\mathcal{M}}\langle a_1, ..., a_n\rangle) \in r^{\mathcal{M}}$,
- φ jest postaci $\neg\psi$, oraz nie jest $\mathcal{M} \models \psi\langle a_1, ..., a_n\rangle$,
- φ jest postaci $\psi_1 \vee \psi_2$, oraz $\mathcal{M} \models \psi_1\langle a_1, ..., a_n\rangle$ lub $\mathcal{M} \models \psi_2\langle a_1, ..., a_n\rangle$,
- φ jest postaci $(\exists x_i)(\psi(x_i))$, oraz dla pewnego $x \in M$ jest $\mathcal{M} \models \psi\langle a_1, ..., a_{i-1}, x, a_{i+1}, ..., a_n\rangle$.

[3] Zmienną uważamy za *wolną*, jeśli nie występuje pod żadnym z kwantyfikatorów. W przeciwnym razie nazywamy ją zmienną *związaną*.

Jest jasne, że spełnienie zdania nie zależy od wartościowania. Zdanie φ, które jest spełnione w strukturze $\mathcal{M}$ nazywamy *prawdziwym* w $\mathcal{M}$, ozn. $\mathcal{M} \models \varphi$.

Teorią będziemy nazywać dowolny zbiór zdań $\Sigma \subset Sent_{\mathcal{L}}$.

Modelem $\mathcal{M}$ teorii Σ nazywamy każdą $\mathcal{L}$-strukturę w której dla każdego zdania $\varphi \in \Sigma$ jest $\mathcal{M} \models \varphi$, co zapisujemy $\mathcal{M} \models \Sigma$. Jeśli teoria posiada model, to mówimy, że jest *niesprzeczna*.

Konwenanse

Zdania metajęzyka, czyli *języka w którym mówimy*, będziemy się starali zapisywać w języku polskim, o ile to możliwe unikając symboli używanych w *językach o których mówimy*. Umawiamy się raczej oznaczać zmienne literami alfabetu łacińskiego $x, y, z, ...$ zamiast $x_1, x_2, ...$, pisać funkcje/relacje w postaci infiksowej, oraz stosować następujące skróty:

$(\varphi \wedge \psi)$ zamiast $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,
$(\varphi \to \psi)$ zamiast $(\neg\varphi \vee \psi)$,
$(\forall x)(\varphi(x))$ zamiast $\neg(\exists x)\neg\varphi(x)$, oraz
$(x \neq y)$ zamiast $\neg(x = y)$.

Jak skonstruować duży model?

Załóżmy, że mamy rodzinę modeli pewnej ustalonej teorii Σ. Czy można w jakiś sposób „złożyć" z nich nowy model? Suma prosta grup jest zawsze grupą, zatem nasuwa się pomysł składania uniwersów struktur za pomocą iloczynu kartezjańskiego, a następnie indukowanie w takim produkcie funkcji, stałych i relacji („po współrzędnych"). Metoda ta jednak w ogólności zawodzi (np. suma prosta ciał nie jest już ciałem). Aby faktycznie otrzymać nowy model teorii Σ musimy uciec się do nieco bardziej skomplikowanej konstrukcji, tzw. ultraproduktu.

Filtr

Filtrem na X (gdzie $X \neq \emptyset$) nazywamy rodzinę $\mathcal{F} \subset 2^X$ spełaniającą:

$$\emptyset \notin \mathcal{F} \tag{1}$$
$$A, B \in \mathcal{F} \text{ więc } A \cap B \in \mathcal{F} \tag{2}$$
$$(A \in \mathcal{F} \text{ oraz } A \subset B) \text{ więc } B \in \mathcal{F} \tag{3}$$

Filtr na X nazywamy *ultrafiltrem*, jeśli jest maksymalny (w sensie inkluzji), co jest równoważne warunkom:

$$\text{dla każdego } A \in 2^X \text{ jest } A \in \mathcal{F} \text{ lub } (X - A) \in \mathcal{F} \tag{4}$$
$$\text{dla dowolnych } A, B \in 2^X \text{ jest } A \cup B \in \mathcal{F}, \text{ więc } A \in \mathcal{F}, \text{ lub } B \in \mathcal{F} \tag{5}$$

Produkt zredukowany

Niech $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną indeksowaną modeli teorii Σ, zaś $\mathcal{F}$ filtrem na I. *Produktem zredukowanym* $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i/\mathcal{F}$ nazwiemy strukturę, której uniwersum jest iloraz produktu $\prod\limits_{i\in I} M_i$ przez relację $\sim$, gdzie

$$\{a_i\}_{i\in I}\sim\{b_i\}_{i\in I} \text{ wtw. gdy } \{i\in I : a_i=b_i\}\in\mathcal{F}. \tag{6}$$

Jest to relacja równoważności:

- $\{i\in I : a_i=a_i\}=I\in\mathcal{F}$,
- $\{i\in I : a_i=b_i\}=\{i\in I : b_i=a_i\}$,
- $\{i\in I : a_i=b_i\}=A\in\mathcal{F}$, $\{i\in I : b_i=c_i\}=B\in\mathcal{F}$, zatem $A\cap B\in\mathcal{F}$ (z własności 2), oraz $A\cap B\subset\{i\in I : a_i=c_i\}\in\mathcal{F}$ (z własności 3).

Za interpretacje symboli stałych, relacji i funkcji w $\prod\limits_{i\in I}\mathcal{M}_i/\sim$ przyjmujemy:

- dla symbolu stałej c:
  $c^{\prod\mathcal{M}_i/\mathcal{F}}=[\{c^{\mathcal{M}_i}\}_{i\in I}]_\sim$,
- dla symbolu funkcji f ($\sigma(f)=n$):
  $f^{\prod\mathcal{M}_i/\mathcal{F}}([\{a_i^1\}_{i\in I}]_\sim,...,[\{a_i^n\}_{i\in I}]_\sim)=[\{f^{\mathcal{M}_i}(a_i^1,...,a_i^n)\}_{i\in I}]_\sim$,
- dla symbolu relacji r ($\sigma(r)=n$):
  $([\{a_i^1\}_{i\in I}]_\sim,...,[\{a_i^n\}_{i\in I}]_\sim)\in r^{\prod\mathcal{M}_i/\mathcal{F}}$ wtw. gdy
  $\{i\in I : (a_i^1,...,a_i^n)\in r^{\mathcal{M}_i}\}\in\mathcal{F}$.

Nietrudno zauważyć, że jeśli zastosowany filtr jest filtrem głównym[4] generowanym przez ustalony element $i_0\in I$, to otrzymany w ten sposób produkt zredukowany będzie izomorficzny z modelem $\mathcal{M}_{i_0}$ (co może być niepożądanym efektem).

Jeśli przy konstrukcji użyto ultrafiltru, to otrzymaną strukturę nazywamy *ultraproduktem*, a jeżeli dodatkowo wszystkie użyte modele $\mathcal{M}_i$ są identyczne - *ultrapotęgą*.

Ultraprodukty posiadają szczególnie dla nas interesującą własność, którą wypowiedział i dowiódł Jerzy Łoś ok. 1955 roku.

[4]Filtr nazywamy głównym, jeśli jest generowany przez skończony zbiór elementów; w tym przypadku chodzi o filtr postaci $\{J\subseteq I : i_0\in J\}$.

Twierdzenie Łosia o ultraprodukcie

Twierdzenie. *Niech $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną $\mathcal{L}$-struktur, oraz $\mathcal{U}$ ultrafiltrem na zbiorze indeksów I. Wówczas dla dowolnej formuły $\varphi \in Form_{\mathcal{L}}$ zachodzi:*

$$\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \varphi\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle \textit{ wtw, gdy}$$
$$\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}.$$

W szczególności więc ultraprodukt rodziny modeli pewnej teorii Σ jest również jej modelem.

Dowód. Najpierw pokażemy, że dla dowolnego termu t zachodzi

$$t^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle = [\{t^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\}_{i\in I}] \tag{7}$$

Przez indukcję na złożoność termów mamy:

- jeśli t jest symbolem stałej c, to z definicji interpretacji symbolu stałej w ultraprodukcie jest
  $c^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}} = [\{c^{\mathcal{M}_i}\}_{i\in I}]$,

- jeśli t jest symbolem zmiennej x_k, to z definicji interpretacji symboli zmiennych
  $x_k^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle = [\{a_i^k\}_{i\in I}]$,

- jeśli zaś t jest postaci $f(t_1, ..., t_k)$, gdzie f jest symbolem funkcji, $\sigma(f) = k$, a $t_1, ..., t_k$ są termami, to z def. interpretacji symbolu funkcyjnego
  $f(t_1, ..., t_k)^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle =$
  $= f^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}(t_1^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle, ..., t_k^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{F}}\langle ...\rangle) =$
  (na mocy założenia indukcyjnego)
  $= f^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}([\{t_1^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\}_{i\in I}], ..., [\{t_k^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\}_{i\in I}]) =$
  (z def. interpretacji symbolu funcyjnego w ultraprodukcie)
  $= [\{f^{\mathcal{M}_i}(t_1^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle, ..., t_k^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle)\}_{i\in I}] =$
  $= [\{f(t_1, ..., t_k)^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\}_{i\in I}]$.

Teraz możemy wykazać tezę twierdzenia, przez indukcję na złożonośc formuł:

- jeśli t_1, t_2 są termami, to
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models (t_1 = t_2)\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$
  wtw, gdy (z def.spełnienia)
  $t_1^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle = t_2^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$,
  wtw, gdy (z własnści 7)
  $[\{t_1^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\}_{i\in I}] = [\{t_2^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\}_{i\in I}]$,

wtw, gdy (z def.relacji $\sim$)
$\{i \in I : t_1^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle = t_2^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$,
wtw, gdy (z def.spełnienia)
$\{i \in I : \mathcal{M}_i \models (t1 = t2)\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$;

- jeśli $t_1, ..., t_k$ są termami, r symbolem relacji i $\sigma(r) = k$, to
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models r(t_1, ..., t_k)\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$ wtw, gdy
  $(t_1^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle, ..., t_k^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}\langle...\rangle) \in r^{\prod \mathcal{M}_i/\mathcal{U}}$ wtw, gdy
  $\{i \in I : (t_1^{\mathcal{M}_i}\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle, ..., t_k^{\mathcal{M}_i}\langle...\rangle) \in r^{\mathcal{M}_i}\} \in \mathcal{U}$ wtw, gdy
  $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models r(t_1, ..., t_k)\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$;

- jeśli φ jest formułą, to
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \neg\varphi\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$ wtw, gdy
  $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \notin \mathcal{U}$ wtw, gdy
  $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \neg\varphi\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$ (z własności 4);

- jeśli φ, ψ są fomułami, to
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models (\varphi \vee \psi)\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$ wtw, gdy
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \varphi\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$, lub
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \psi\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$, wtw, gdy
  $A = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$, lub
  $B = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \psi\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$, wtw, gdy
  (ponieważ $A, B \subset A \cup B$, z własności filtrów 3 oraz 5)
  $A \cup B = \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi \vee \psi\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$.

- jeśli $\varphi(x_j)$ jest formułą, to
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models (\exists x_j)\,\varphi(x_j)\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$ wtw, gdy
  dla pewnej klasy ciągów $[\{b_i\}_{i\in I}] \in \prod_{i\in I} M_i/\sim$ jest
  $\prod_{i\in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \varphi\langle[\{a_i^1\}_{i\in I}], ..., [\{b_i\}_{i\in I}], ..., [\{a_i^n\}_{i\in I}]\rangle$,
  co ma miejsce wtw, gdy dla pewnego ciągu $\{b_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ jest
  $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\langle a_i^1, ..., b_i, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$, wtw, gdy
  $\{i \in I : \mathcal{M}_i \models (\exists x_j)\,\varphi(x_j)\langle a_i^1, ..., a_i^n\rangle\} \in \mathcal{U}$.

$\square$

Twierdzenie o zwartości

Jednym z ważniejszych narzędzi teorii modeli jest twierdzenie o zwartości, dowiedzione przez Gödla jako bezpośrednia konsekwencja jego twierdzenia o pełności logiki pierwszego rzędu z 1930 roku, oraz - niezależnie - przez Malcewa w roku 1938. Twierdzenie to posiada zgrabny „semantyczny” dowód, opierający się na twierdzeniu Łosia:

Twierdzenie. *Teoria Σ posiada model wtw, gdy każdy jej skończony podzbiór $\Sigma_0 \subset \Sigma$ ma model.*

Dowód. Wynikanie „w prawo” jest oczywiste - model teorii Σ jest też oczywiście modelem każdego jej podzbioru.
W drugą stronę, niech I będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów teorii Σ, a $\mathcal{M}_i$ dla $i \in I$ modelem teorii $i \subset \Sigma$. Oznaczmy $i^* = \{J \in I : i \subset J\}$. Rodzina $\{i^*\}_{i \in I}$ jest scentrowana[5], bo $i_1^* \cap ... \cap i_n^* = (i_1 \cup ... \cup i_n)^* \neq \emptyset$, zatem można ją rozszerzyć do pewnego ultrafiltru $\mathcal{U}$[6].
Ultraprodukt $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U}$ jest modelem Σ, bowiem dla dowolnego $\varphi \in \Sigma$, jest $\{\varphi\} \in I$, oraz $\mathcal{U} \ni \{\varphi\}^* = \{i \in I : \varphi \in i\} \subset \{i \in I : \mathcal{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$ (z wł.3), zatem z tw.Łosia otrzymujemy $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \varphi$, a więc $\prod\limits_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{U} \models \Sigma$. $\square$

Twierdzenie o zwartości posiada liczne ciekawe konsekwencje; przedstawimy tu jedynie dwie z nich, zainteresowanego czytelnika odsyłając (ponownie) do [1] i [4].

[5] O rodzinie $R \subset 2^X$ powiemy że jest scentrowana, jeśli dla dowolnych $A, B \in R$ jest $A \cap B \neq \emptyset$.

[6] **Każda rodzina scentrowana jest zawarta w pewnym ultrafiltrze.**

Dowód. Rodzina $\mathbf{R}$ wszystkich scentrowanych podzbiorów danego zb.X jest częściowo uporządkowana przez inkluzję; każdy łańcuch w tym porządku posiada ograniczenie górne - swoją sumę mnogościową. Gdyby taka suma nie była rodziną scentrowaną, to istniałyby w niej dwa zbiory $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$ (bez straty ogólności przyjmujemy $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$) takie, że $A \cap B = \emptyset$ - jednak $A, B \in \mathcal{B}$, oraz $\mathcal{B}$ jest rodziną scentrowaną - sprzeczność. Zatem suma ta jest rodziną scentrowaną, czyli należy do $\mathbf{R}$. Na mocy lematu Kuratowskiego-Zorna rodzina $\mathbf{R}$ posiada więc element maksymalny $\mathcal{U}$. Łatwo sprawdzić, że maksymalna (w sensie inkluzji) rodzina scentrowana musi być ultrafiltrem. $\square$

Modele niestandardowe arytmetyki

Zaskakującą konsekwencją twierdzenia o zwartości jest istnienie niestandardowych modeli arytmetki.

Można np. łatwo skonstruować modele arytmetyki posiadające element największy: niech Q oznacza teorię arytmetyki Robinsona, zbudowaną nad językiem $\mathcal{L}_Q = \{0, s, +, \times\}$ (gdzie 0 to stała, s to funkcja jednoargumentowa, a $+, \times$ to f. dwuargumentowe):

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(\forall y)(x \neq y \rightarrow s(x) \neq s(y)),\\
&(\forall x)(0 \neq s(x)),\\
&(\forall x)(x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = s(y))),\\
&(\forall x)(x + 0 = x),\\
&(\forall x)(\forall y)(x + s(y) = s(x + y)),\\
&(\forall x)(x \times 0 = 0),\\
&(\forall x)(\forall y)(x \times s(y) = (x \times y) + x)^7.
\end{aligned}
$$

Do języka $\mathcal{L}_Q$ dołączmy nową stałą c. Rozważmy teraz nową teorię $Q^2 = Q \cup \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$, gdzie φ_n to zdanie postaci $(c \neq 0 \wedge ... \wedge c \neq n)$. Oczywiście każdy skończony podzbiór teorii Q^2 posiada model (standardowy $(\mathbb{N}, 0, s, +, \times)$, gdzie c interpretujemy jako odpowiednio dużą liczbę naturalną). Zatem, na mocy twierdzenia o zwartości, cała teoria Q^2 posiada model, w którym interpretacja stałej c nie może być liczbą naturalną.
(Ściślej rzecz biorąc, skonstruowaliśmy w ten sposób model arytmetyki *wzbogaconej* o nowy symbol stałej, a więc musimy wziąć jeszcze tzw. *redukt* tegoż modelu do języka arytmetyki w którym nie ma symbolu c - co jednak jest czysto technicznym szczegółem - patrz.[1], rozdział 5).

Twierdzenie o chatakterystyce

Ostatnie przedstawione twierdzenie świadczy o pewnej własności języków pierwszego rzędu.

Niech $\mathcal{L}_F = \{+, \times, 0, 1\}$ oraz F będzie teorią ciał zbudowaną nad $\mathcal{L}_F$:

$$
\begin{aligned}
&(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))\\
&(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)\\
&(\forall x)(x + 0 = x)\\
&(\forall x)(\exists y)(x + y = 0)\\
&(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \times y) \times z = x \times (y \times z))\\
&(\forall x)(\forall y)(x \times y = y \times x)\\
&(\forall x)(x \times 1 = x)\\
&(\forall x)((x = 0) \vee (\exists y)(x \times y = 1))\\
&(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \times (y + z) = x \times y + x \times z)\\
&0 \neq 1.
\end{aligned}
$$

[7] W arytmetyce Peano do powyższego zestawu aksjomatów dodalibmyśmy jeszcze nieskończenie wiele aksjomatów postaci: $(\varphi(0) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(s(x)))) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x))$, gdzie φ jest dowolną formułą języka arytmetyki, w której zmienna x jest wolna (niezwiązana).

Twierdzenie. *Dowolne zdanie* $\varphi \in Sent_{\mathcal{L}_F}$ *prawdziwe we wszystkich ciałach charakterystyki zero, jest prawdziwe również we wszystkich ciałach odpowiednio dużej charakterystyki.*

Dowód. Aby wyrazić w języku $\mathcal{L}_F$ własność „ciało posiada charakterystykę 0" trzeba użyć nieskończenie wielu aksjomatów ψ_p ($p = 2, 3, ...$) postaci „$1+...+1 \neq 0$", gdzie po lewej stronie znajduje się p symboli „1". Weźmy więc teorię ciał charakterystyki zero: $\Sigma = F \cup \{\psi_p : p \in \mathbb{P}\}$. Na mocy tw. o zwartości, $\Sigma \models \varphi$ wtw, gdy dla pewnych $p_1, ..., p_k \in \mathbb{P}$ jest $F \cup \{\psi_{p_1}, ..., \psi_{p_k}\} \models \varphi$. Zatem zdanie φ będzie też prawdziwe we wszystkich ciałach charakterystyki nie mniejszej niż $max\{p_1, ..., p_k\}$. $\square$

No i beka z tego.

Literatura

[1] "Teoria modeli" Artur Piękosz, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej 2008

[2] "O teorii modeli" Alfred Tarski (m.in. "Pisma logiczno-filozoficzne t.2: metalogika", PWN 2001)

[3] "Fundamentals of Model Theory" William Weiss, Cherie D'Mello, University of Toronto (`http://at.yorku.ca/i/a/a/i/10.ps`)

[4] "First-order Model Theory", Stanford Encyclopedia of Philosophy (`http://plato.stanford.edu/entries/modeltheory-fo/`)