

# Twierdzenie o liczbach pierwszych i hipoteza Riemanna

Artur Ulikowski

Politechnika Gdańska

10 marca 2009

# Twierdzenie o liczbach pierwszych

Legendre, badając rozkład liczb pierwszych, postawił następującą hipotezę:

## Twierdzenie

Niech  $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$ . Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln x} = 1$$

Podczas próby udowodnienia go, na podstawie kwantyfikacji sita Eratostenesa, Legendre otrzymał następujący wzór:

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = x \prod_{p \leq \sqrt{x}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(2^{\pi(\sqrt{x})})$$

Ponieważ jednak błąd był wykładniczo większy od wyrazu głównego, było to stwierdzenie praktycznie bezużyteczne.

# Analiza w teorii liczb

Początek wykorzystaniu analizy matematycznej w teorii liczb dał Euler, który podczas próby udowodnienia następującego twierdzenia

## Twierdzenie

*Szereg  $\sum_p \frac{1}{p}$  jest rozbieżny.*

wprowadził funkcję  $\zeta(s) = \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$  i otrzymał wspomniane twierdzenie badając  $\ln \zeta(x)$ .

# Twierdzenie Dirichleta

Idee Eulera zostały rozwinięte przez Dirichleta w dowodzie następującego twierdzenia:

## Twierdzenie (Dirichlet)

*Niech  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $\text{NWD}(a, b) = 1$ . Wtedy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci  $an + b$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .*

Dirichlet wprowadził pojęcie charakteru modulo  $k$  oraz L-szeregu i z rozbieżności pewnych L-szeregów wyprowadził wyżej wymienione twierdzenie.

# Charaktery Dirichleta i L-szeregi

## Definicja

*Charakterem modulo  $k$  nazywamy funkcję  $\chi_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  spełniającą następujące warunki:*

- ▶  $\text{NWD}(a, k) > 1 \Rightarrow \chi_k(a) = 0$
- ▶  $\chi_k(1) \neq 0$
- ▶  $\forall a, b \in \mathbb{Z} \chi_k(ab) = \chi_k(a)\chi_k(b)$
- ▶  $a \equiv b \pmod{k} \Rightarrow \chi_k(a) = \chi_k(b)$

## Definicja

*L-szeregiem Dirichleta nazywamy szereg postaci  $L(s, \chi) = \sum_n \frac{\chi(n)}{n^s}$ , gdzie  $s \in \mathbb{C}$ , a  $\chi$  jest charakterem.*

# Dowód twierdzenia Dirichleta

Dirichlet pokazał, że jeżeli  $NWD(a, b) = 1$  i byłoby tylko skończenie wiele liczb pierwszych postaci  $an + b$ , pewne szeregi pokrewne L-funkcjom byłyby zbieżne. Następnie udowodnił, że szeregi te w rzeczywistości są rozbieżne.

# Funkcja $\zeta$ Riemanna

Wkładem Riemanna do teorii liczb było analityczne przedłużenie funkcji dzeta Eulera na całą płaszczyznę zespoloną i pokazanie, że Twierdzenie o liczbach pierwszych jest równoważne stwierdzeniu, że funkcja dzeta Riemanna nie ma miejsc zerowych na linii  $\Re(s) = 1$ .

# Funkcje Czebyszewa

## Definicja

Funkcje  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p$ ,  $\psi(x) = \sum_{p^k \leq x} \ln p$  nazywamy funkcjami Czebyszewa.

## Twierdzenie

Następujące stwierdzenia są równoważne:

- ▶  $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$
- ▶  $\theta(x) \sim x$
- ▶  $\psi(x) \sim x$

# Lemat o asymptotach

## Twierdzenie

*Niech*

$$\sum_{p \leq x} f(p) \ln p \sim rx.$$

*Wtedy zachodzi*

$$\sum_{p \leq x} f(p) \sim \frac{rx}{\ln x}.$$

Z powyższego lematu wynika pierwsza z wspomnianych równoważności - skorzystamy z tego w dowodzie twierdzenia o liczbach pierwszych.

# Pierwsze dowody twierdzenia o liczbach pierwszych

Dowody Hadamarda i de la Vallee-Poussina opierały się na pokazaniu, że funkcja  $\zeta$  Riemanna nie ma miejsc zerowych takich, że  $\Re(s) = 1$ . Dowody te korzystały z własności funkcji von Mangoldta. Aktualnie dowodzi się tego w prostszy sposób, którego nie będziemy omawiać.

# Twierdzenia o zbieżności

## Twierdzenie

Niech  $c_n$  będzie ograniczonym ciągiem zespolonym. Zdefiniujmy

$$D(s) = \sum_n \frac{c_n}{n^s}.$$

Jeśli  $D(s)$  przedłuża się do funkcji holomorficznej na zbiorze zawierającym zbiór  $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 1\}$ , to suma  $\sum_n c_n/n^s$  jest zbieżna dla  $\Re(s) \geq 1$ .

## Twierdzenie

Niech  $S$  będzie funkcją ograniczoną lokalnie całkowaną. Niech

$$f(s) = \int_0^\infty S(t)e^{-st} dt$$

przedłuża się do funkcji holomorficznej na zbiorze zawierającym zbiór  $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 1\}$ . Wtedy całka  $\int_0^\infty S(t)e^{-st} dt$  jest zbieżna dla  $\Re(s) \geq 0$  i równa  $f(s)$ .

# Wniosek z twierdzenia o zbieżności

## Twierdzenie

Niech  $c_n$  będzie ciągiem nieujemnych liczb zespolonych. Niech

$$D(s) = \sum_n \frac{c_n \ln n}{n^s}.$$

Jeżeli

$$S(x) = \sum_{n \leq x} c_n \ln n$$

jest  $O(x)$  i  $(s - 1)D(s)$  rozszerza się do funkcji holomorficznej na zbiorze zawierającym zbiór  $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) \geq 1\}$ , to

$$S(x) \sim \rho x,$$

gdzie  $\rho$  jest residuum funkcji  $D(s)$  przy  $s = 1$ .

# Zastosowanie do twierdzenia o liczbach pierwszych

Twierdzenie

$$\theta(x) \sim x$$

Dowód.

Mamy:

$$\frac{d}{ds} \ln \zeta(s) = - \sum_p \frac{d}{ds} \ln(1 - p^{-s}) = - \sum_p \frac{\ln p}{p^s} - \sum_p \sum_{m \leq x} \frac{\ln p}{p^{ms}}.$$

Ponieważ funkcja  $\zeta$  nie znika dla  $\Re(s) = 1$ , powyższa funkcja jest holomorficzną dla  $\Re(s) \geq 1$  poza biegunem w  $s = 1$  o residuum 1. Zatem  $f(s) = \sum_p \frac{\ln p}{p^s}$  też jest tam holomorficzną. Wniosek z twierdzenia o zbieżności daje nam

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \sim x$$



# Uogólnienie na L-funkcje

## Twierdzenie

Niech

$$L(s) = \prod_p \frac{1}{\det(1_n - p^{-s}\Phi_p)},$$

gdzie  $\Phi_p$  jest macierzą zespoloną  $n \times n$  o ograniczonych wartościach własnych. Jeżeli  $(s-1)L(s)$  jest holomorficzną i niezerową dla  $\Re(s) \geq 1$ , natomiast  $L(s)$  ma w  $s=1$  biegun o residuum  $\rho$ , to mamy:

$$\sum_{p \leq x} \ln p \cdot \operatorname{tr} \Phi_p \sim \begin{cases} x & \text{dla } \rho \neq 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

# Hipoteza Riemanna i jej znaczenie

Riemann pokazał, że wszystkie nietrywialne zera funkcji  $\zeta$  muszą leżeć w tzw. pasie krytycznym  $0 \leq \Re(s) \leq 1$

Hipoteza Riemanna mówi, że wszystkie nietrywialne zera funkcji  $\zeta$  Riemanna leżą na prostej  $\Re(s) = \frac{1}{2}$

Jedną z konsekwencji prawdziwości hipotezy Riemanna jest stwierdzenie, że

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O(\sqrt{x} \ln x),$$






co wskazuje na bardziej uporządkowane rozmieszczenie liczb pierwszych.

## Inne konsekwencje i próby dowodu

Sama hipoteza Riemanna nie ma tak ważnych konsekwencji, jak sama metoda jej dowiedzenia. Jedną z konsekwencji dowodu hipotezy mogłyby być nowe metody faktoryzacji dużych liczb, co ma znaczenie w kryptografii.

Aktualnie większość prób dowodu opiera się na algebraicznej teorii liczb - okazuje się, że relacje pewnych struktur algebraicznych są związane z miejscami zerowymi funkcji  $\zeta$ .

# Bibliografia

-  [B. Fine, G. Rosenberger](#)  
An Epic Drama: The Development of the Prime Number Theorem
-  [P. Garrett](#)  
A Simple Proof of the Prime Number Theorem
-  [J. E. Littlewood](#)  
The quickest proof of the prime number theorem  
[Acta Arithmetica XVIII \(1971\)](#)
-  [D. Zagier](#)  
Newmann's Short Proof of the Prime Number Theorem
-  [D. J. Newmann](#)  
Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem