

Krytyczność samoorganizująca w układach dynamicznych

Artur Ulikowski

Politechnika Gdańska

7 marca 2009

Motywacje

Koncepcja krytyczności samoorganizującej (SOC)
jest zainspirowana zjawiskami naturalnymi, a mianowicie:

- ▶ fraktalami
- ▶ różowym szumem
- ▶ samoorganizacją

Fraktale

Od dawna wiadomo, że w układach dynamicznych można zaobserwować struktury wykazujące samopodobieństwo przestrzenne - fraktale. Samopodobieństwo przestrzenne występuje zarówno w naturze, jak i w układach dynamicznych wytworzonych przez człowieka. Przez dłuższy czas nie podjęto prób wyjaśnienia wszechobecności fraktali.

Różowy szum (pink noise, $1/f$ noise)

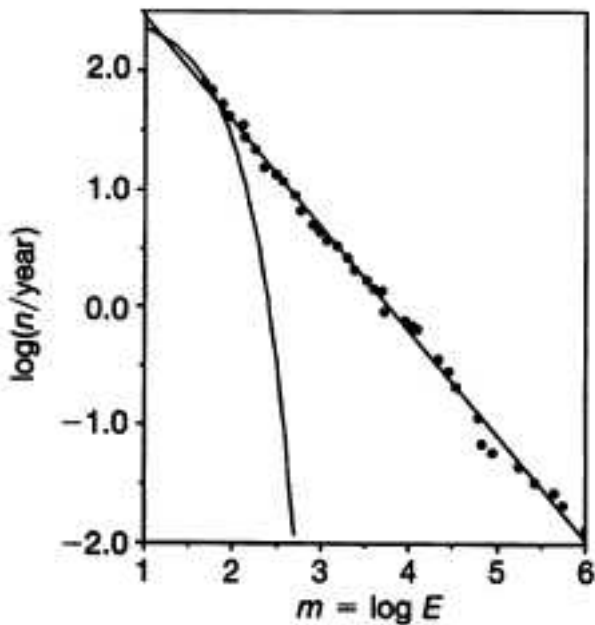
Definicja

Różowym szumem nazywamy sygnał lub proces, którego gęstość widmowa $S(f)$ spełnia zależność $S(f) \sim 1/f^\alpha, \alpha > 0$ (*prawo potęgowe*).

Różowy szum występuje w wielu procesach naturalnych, np.

- ▶ trzęsieniach ziemi
- ▶ lawinach
- ▶ rezystorach
- ▶ klepsydrach
- ▶ przepływie rzek
- ▶ zmianach jasności gwiazd

Prawo Gutenberga - Richtera



Samoorganizacja

W 1987 roku P. Bak zasugerował, że wyżej wymienione zjawiska są związane ze sobą i powodowane przez "wrodzoną" właściwość układów dynamicznych - SOC. Ale co to właściwie znaczy?

Automat komórkowy

Definicja

Na potrzeby niniejszej prezentacji **układem dynamicznym** będziemy nazywać pewien układ (np. zbiór), którego stan zmienia się w czasie w sposób deterministyczny lub stochastyczny (częściej ten drugi). Stan układu w kolejnym momencie tworzy się z poprzedniego stanu zgodnie ze znanymi regułami.

Intuicyjnie można myśleć o układzie dynamicznym jako o rodzinie zbiorów indeksowanej przez (ciągły lub dyskretny) czas.

Definicja

Automatem komórkowym będziemy nazywać układ dynamiczny z dyskretnym czasem i dyskretną przestrzenią stanów.

Stan krytyczny

Definicja

Staniem krytycznym będziemy nazywać taki stan układu, w którym dowolnie mała zmiana jakiegoś parametru powoduje dużą zmianę w układzie, np.

- ▶ woda z lodem w temperaturze topnienia
- ▶ równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $\Delta = 0$
- ▶ próg perkolacji

Definicja

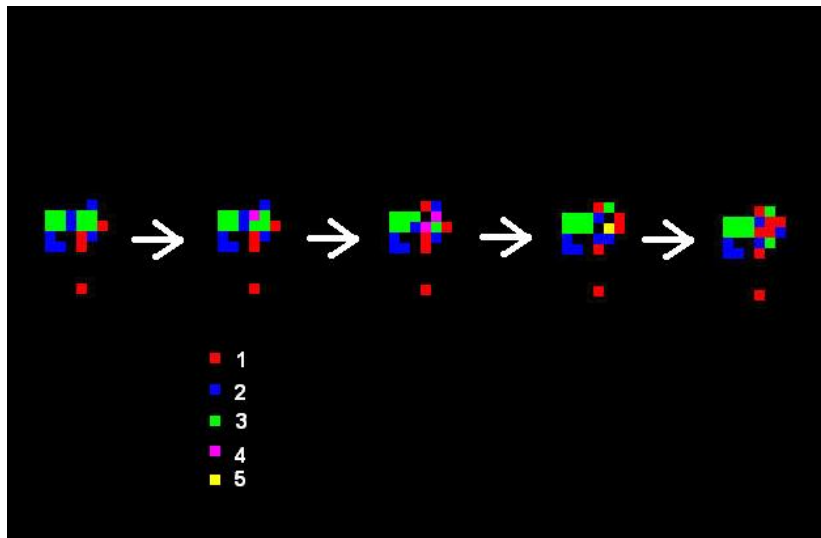
Powiemy, że w układzie występuje samoorganizacja do stanu krytycznego (krytyczność samoorganizująca, SOC), jeśli stan krytyczny jest atraktorem.

Model BTW

Prostym układem dynamicznym, w którym występuje SOC jest model BTW (Bak-Tang-Wiesenfeld sandpile). Definiujemy go następująco:

1. Jest dana prostokątna siatka $m \times n$ liczb naturalnych z_{ij}
2. W każdym kroku losowe $z_{ij} \rightarrow z_{ij} + 1$
3. Jeśli jakieś $z_{ij} > z_c = 4$, występuje lawina:
$$\begin{cases} z_{ij} \rightarrow z_{ij} - 4 \\ z_{i\pm 1j} \rightarrow z_{i\pm 1j} + 1 \\ z_{ij\pm 1} \rightarrow z_{ij\pm 1} + 1 \end{cases}$$
4. Brzegi są otwarte

Propagacja lawin



SOC w BTW

Niech S oznacza wielkość lawiny - liczbę miejsc, które objęła. Z analiz numerycznych wynika, że jeżeli dodajemy piasek losowo, układ wykazuje SOC. Atraktorem jest stan, w którym dodanie jednego ziarenka piasku może spowodować lawinę o wielkości S równej nawet wielkości układu.

Różowy szum

Niech $D(S)$ oznacza liczbę lawin o wielkości S . Z analiz numerycznych wynika

$$D(S) \sim S^{-1.0}$$

czyli występuje różowy szum. Podobnie jest dla czasu życia lawin:

$$D(T) \sim T^{-0.43}$$

Bak pokazał, że to zachowanie jest niezależne od warunków początkowych - czyli stanowi właściwość modelu.

Struktura (quasi-)fraktalna I

Definicja

Zdefiniujemy operator t_i (toppling operator) za pomocą macierzy

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 4 & \text{dla } i = j \\ -1 & \text{dla miejsc } i, j \text{ obok siebie} \\ 0 & \text{w innym przypadku} \end{cases}$$

Definicja

Operator relaksacji R otrzymujemy przez działanie na stan operatorem t_i dla $z_i > z_c$ i powtarzanie tego, aż $\forall_i z_i < z_c$

Definicja

Operator addycji α_i definiujemy jako $\alpha_i z_i = z_i + 1$.

Definicja

Operator lawiny $a_i = R\alpha_i$

Struktura (quasi-)fraktalna II

Definicja

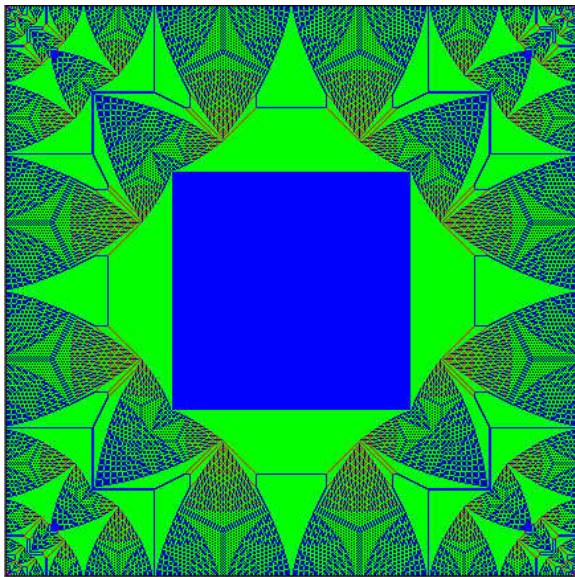
Stan rekursywny to stan C , który można otrzymać z każdego innego stanu rekursywnego przez działanie operatorami a_i . Zbiór stanów rekursywnych oznaczamy przez \mathcal{R} .

Twierdzenie

Operatory a_i komutują i w \mathcal{R} są odwracalne.

Twierdzenie

Jeśli zdefiniujemy operację $S_1 \oplus S_2 = R(z_{1,i} + z_{2,i})$, to (\mathcal{R}, \oplus) jest grupą abelową. W związku z tym musi istnieć stan jednostkowy I taki, że $\forall_S S \oplus I = I \oplus S = S$.



Model BS

Definicja

Model BS konstruujemy następująco:

- 1. Mamy N osobników na siatce 1-wymiarowej*
- 2. Każdemu przyporządkowujemy losową liczbę s_i z przedziału $[0, 1]$ (rozkład równomierny) - wartość przystosowania*
- 3. W każdym kroku wybieramy osobnika o najniższej wartości przystosowania i losujemy nową wartość przystosowania dla niego i jego sąsiadów*

Mimo swojej prostoty, model BS wykazuje samopodobieństwo przestrzenne, różowy szum i SOC.

SOC w modelu BS

Oznaczmy przez m_t najmniejszą wartość przystosowania w t -tym kroku. Niech

$$G(t) = \sup_{t \in \mathbb{N}} m_t.$$

Funkcja G spełnia następujące równanie różniczkowe:

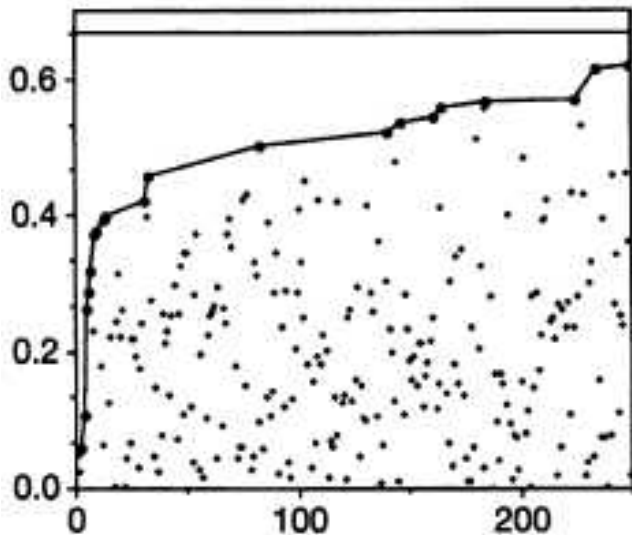
$$\frac{dG}{dt} = \frac{1 - G}{NS_G}$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy:

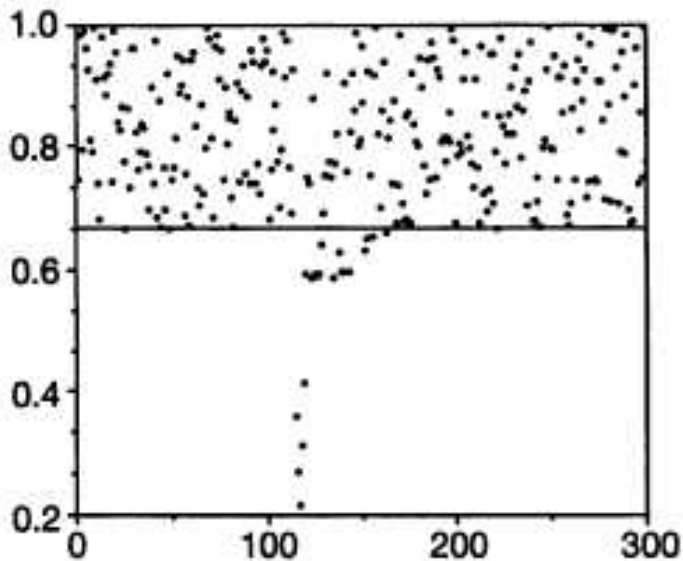
$$s_c - G(t) \sim (t/N)^{-\frac{1}{-\gamma-1}}$$

gdzie s_c jest krytyczną wartością przystosowania. W jednym wymiarze $\gamma \approx 2.7$.

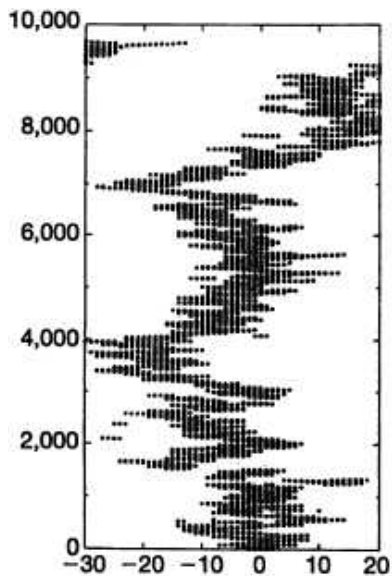
Wykres $G(t)$



Stan krytyczny



Fraktalność



Różowy szum







Dowodzi się, że w stanie krytycznym średnia liczba osobników uczestniczących w lawinie aktywności $n(t)_{av}$ jest stała. Wynika stąd, że przyrost tej liczby musi statystycznie równoważyć jej spadek, a zatem: $n(t) \sim t^{-\tau+1}$. Dla przypadku jednowymiarowego $\tau = 1.1$.

Zastosowania SOC

Ponieważ SOC występuje prawie wszędzie w naturze, można z jej pomocą modelować prawie wszystko, np.

- ▶ rynki finansowe
- ▶ ewolucję
- ▶ pożary lasów
- ▶ trzęsienia ziemi
- ▶ lawiny
- ▶ epidemie
- ▶ sieci neuronowe
- ▶ organizmy żywe
- ▶ itd.

Bibliografia I

-  P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld
Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987)
-  P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld
Phys. Rev. A **38**, 364 (1988)
-  D. Dhar, R. Ramaswamy
Phys. Rev. Lett. **63**, 1659 (1989)
-  D. Dhar
Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990)
-  P. Bak, K. Sneppen
Phys. Rev. Lett. **71**, 4053 (1993)
-  P. Bak, M. Paczuski
Proc. Natl. Acad. Sci. USA **92**, 6689 (1994)

Bibliografia II



M. Creutz

arXiv:hep-lat/9611018v1 (1996)



M. Creutz

arXiv:cond-mat/0401302v1 [cond-mat.stat-mech] (2004)



<http://thy.phy.bul.gov/www/xtoys.html>