



Superdyfuzja

Maria Knorps

`maria.knorps@gmail.com`

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki stosowanej, Politechnika Gdańska

Wstęp

W trakcie tego referatu poruszę kilka związanych ze sobą pojęć takich jak:

- spacer losowy i ruchy Browna
- dyfuzja
- superdyfuzja i pochodna ułamkowa

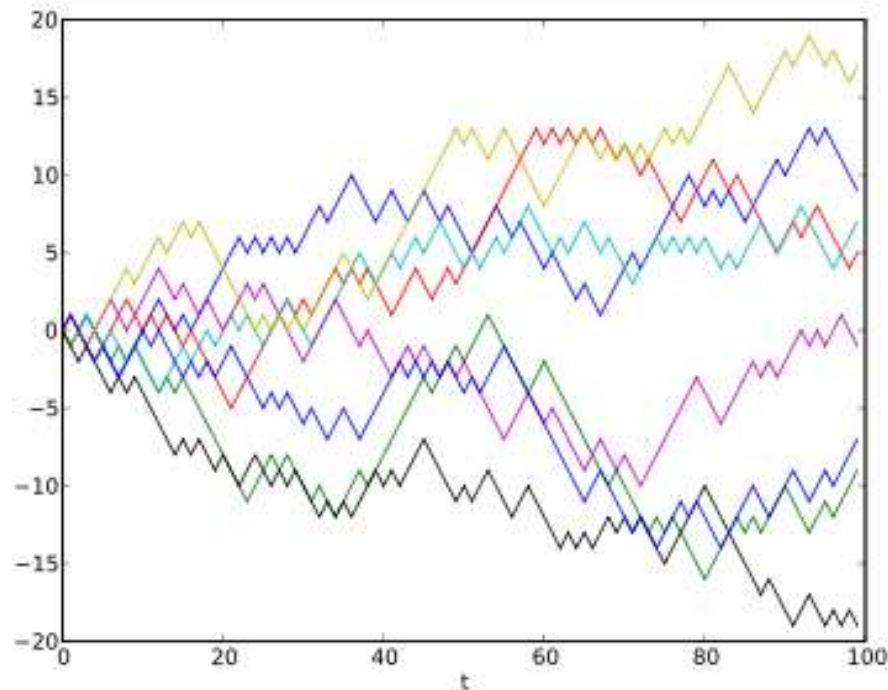
Spacer losowy

Rozważmy zwykły spacer losowy jednowymiarowy. Punkt może się poruszać zgodnie z regułą:

$$P(x = 1) = P(x = -1) = \frac{1}{2}$$

Gdzie x jest zmianą położenia punktu.

Spacer losowy



Rysunek 1: Przykłady trajektorii dla jednowymiarowego spaceru losowego

Dyfuzja

Ten spacer losowy jest związany z klasyczną dyfuzją. Rozważając ruchy Browna można dojść do równania dyfuzji.

$W(x, t)$ - gęstość prawdopodobieństwa znalezienia się cząstki w punkcie x w czasie t ,
 $\Phi(\delta)$ - prawdopodobieństwo przejścia cząstki z $x - \delta$ do x

$$W(x, t + \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x - \delta, t) \Phi(\delta) d\delta$$

Dyfuzja

$$W(x, t + \tau) \cong W(x, t) + \tau \frac{\partial W}{\partial t}$$

$$W(x - \delta, t) \cong W(x, t) + \delta \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\delta^2}{2!} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$

$$W + \tau \frac{\partial W}{\partial t} \cong$$

$$W + \frac{\partial W}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \Phi(\delta) d\delta + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 \Phi(\delta) d\delta$$

Dyfuzja

Jako że $\Phi(-\delta) = \Phi(\delta)$ to

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2},$$

gdzie $D = \frac{1}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 \Phi(\delta) d\delta$.

Rozwiązanie tego równania ma postać:

$$W(x, t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

gdzie $\sigma^2 = 2Dt$, a funkcję W nazywamy propagatorem.

A co by było gdyby

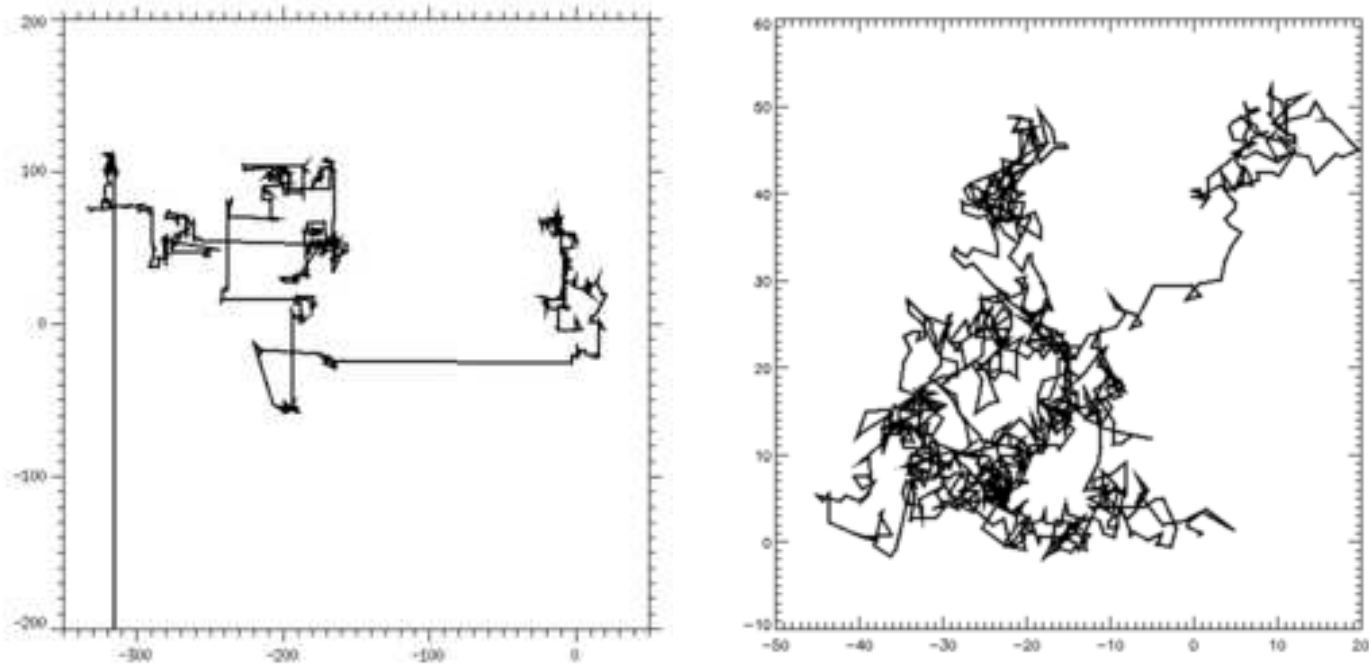
Prędkość rozprzestrzeniania się cząstek w tym procesie jest proporcjonalna do \sqrt{t}
A jakiego równania użyć do opisanie szybszej dyfuzji, rozchodzącej się z większą prędkością ?
Jak w ogólności opisać proces dla którego
 $\sigma^2 \sim t^\alpha, \alpha \in (0, 2)$?

Skoki Levy'ego

W przeciwieństwie do klasycznego ruchu Browna tutaj długość skoków jest losowana z rozkładu Levy'ego.

$$\lambda(k) = \exp(-\sigma^\mu |k|^\mu) \approx 1 - \sigma^\mu |k|^\mu$$

Porównanie



Rysunek 2: Przykłady trajektorii 2-wym. ruchu Levy'ego i ruchu Browna

Przykłady

Gdzie występuje superdyfuzja?

- Model rozprzestrzeniania się gatunków z poszukiwaniem pożywienia może być z powodzeniem opisany przez skoki Levy'ego.
- Dyfuzja w układach z siłą wymuszającą.
- Dyfuzja na obiektach fraktalnych
- Dyfuzja w polimerach

Pochodna ułamkowa

Żeby opisać superdyfuzję potrzebne nam będą inne niż klasyczne równania różniczkowe. Wprowadzimy pochodną ułamkową oraz ułamkowe równania różniczkowe.

Definicja Grünwald'a - Letnikow'a

Definicja 1 *Pochodną ułamkową Grünwald'a - Letnikow'a rzędu $p \geq 0$ będziemy nazywać:*

$${}_a D_t^p f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh=t-a}} \frac{1}{h^p} \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{p}{r} f(t - rh),$$

gdzie $p \leq n$.

Definicja Riemann'a - Liouville'a

Definicja 2 *Pochodną ułamkową Riemann'a - Liouville'a rzędu $p \geq 0$ będziemy nazywać:*

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \left(\frac{d^k}{dt^k} \right) \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau$$

gdzie $0 \leq k-1 \leq p < k$.

Całką ułamkową nazywamy

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

gdzie $p > 0$.

Własności

Kilka podstawowych własności rachunku różniczkowego ułamkowego:

$$\bullet \quad {}_a D_t^p ({}_a D_t^{-p} f(t)) = f(t)$$

$$\bullet \quad {}_a D_t^{-p} ({}_a D_t^p f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{p-j}}{\Gamma(p-j+1)}$$

$$\bullet \quad {}_a D_t^p ({}_a D_t^{-q} f(t)) = {}_a D_t^{p-q} f(t), p \geq q \geq 0$$

$$\bullet \quad \frac{d^n}{dt^n} ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{n+p} f(t)$$

$$\bullet \quad {}_a D_t^q ({}_a D_t^p f(t)) = {}_a D_t^{n+p} f(t) - \sum_{j=1}^k [{}_a D_t^{p-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{-q-j}}{\Gamma(1-q-j)}$$

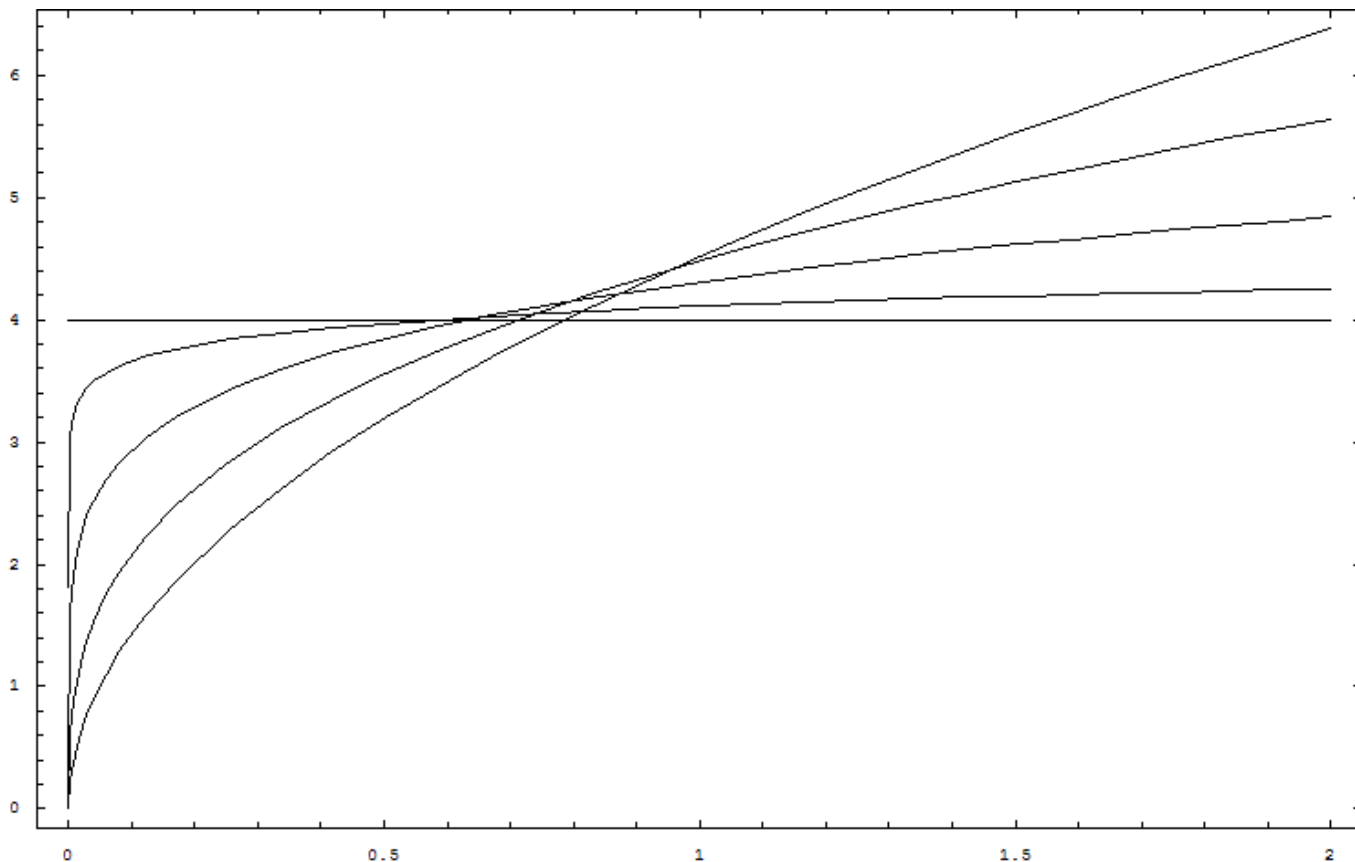
Własności

Należy jednak uważać, ponieważ generalnie

$${}_aD_t^q({}_aD_t^p f(t)) \neq {}_aD_t^p({}_aD_t^q f(t))$$

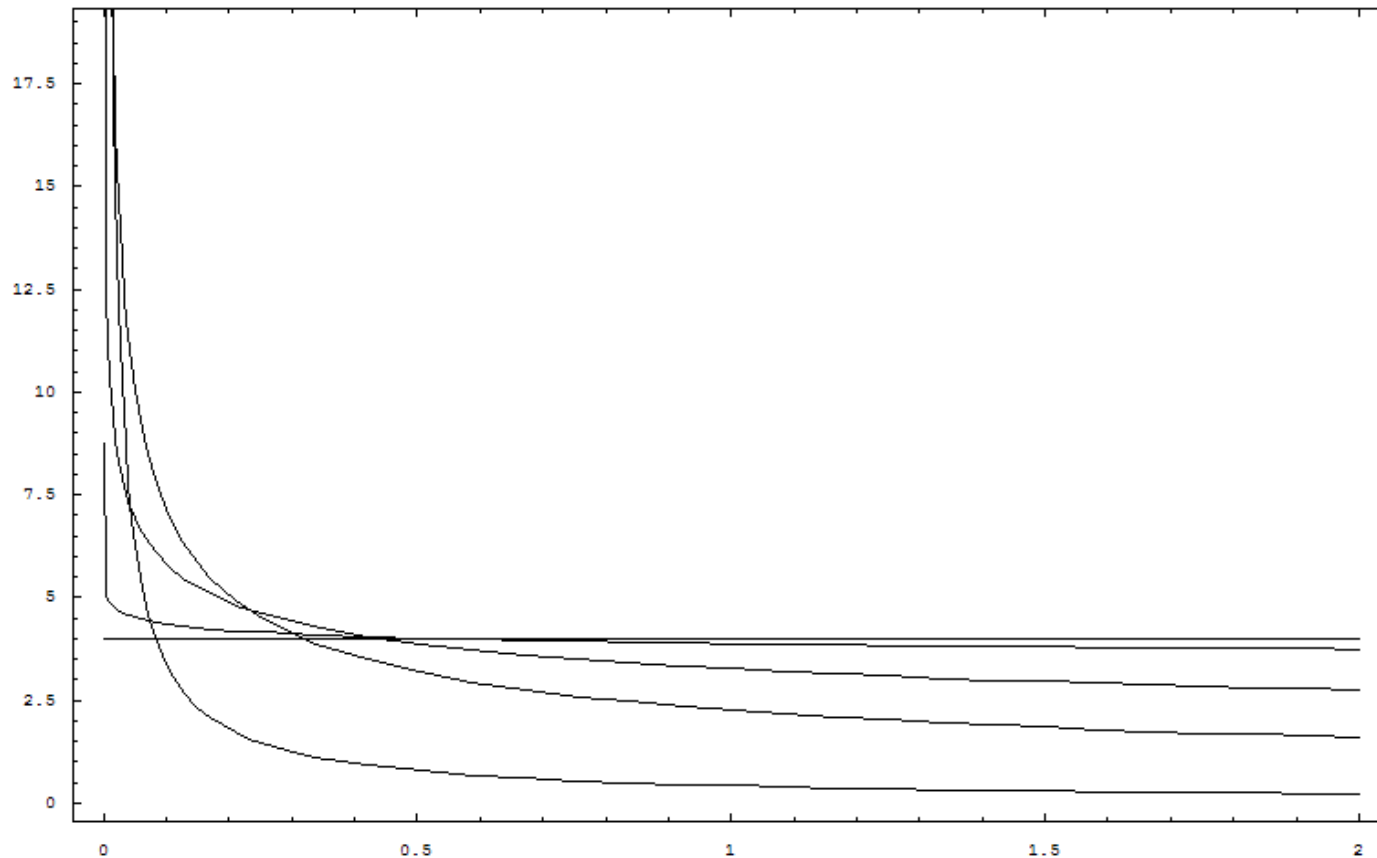
- Operator różniczkowania jest liniowy.

całka



Rysunek 3: całka ułamkowa z funkcji stałej

pochodna



Rysunek 4: pochodna ułamkowa z funkcji stałej

ułamkowa dyfuzja

Równanie ułamkowej dyfuzji ma postać:

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = K_0 D_t^\alpha W(x, t),$$
$$u(x, 0) = \delta(x)$$

gdzie $0 < \alpha \leq 2$ oraz funkcja $W(x, t) \geq 0$ i

$$\forall t \geq 0 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = 1.$$

Wtedy rozwiązanie $W(x, t)$ ma rozkład $\frac{K^\mu t}{|x|^{1+\mu}}$,

$$\mu < 2.$$

dyfuzja na fraktalach

$${}_0D_t^{\frac{1}{d-1}} J(t) = LX(t),$$

gdzie:

$J(t)$ - makroskopowy przepływ przez powierzchnię fraktala

$X(t)$ - lokalna siła unoszenia

L - stała

d - wymiar fraktalny

Prawa Ficka

Prawo Ficka:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -AS \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

Czyli masa cząstek przechodzących przez powierzchnię w danym czasie jest proporcjonalna (współ. D) do iloczynu powierzchni i zmiany stężenia substancji na odcinku Δx

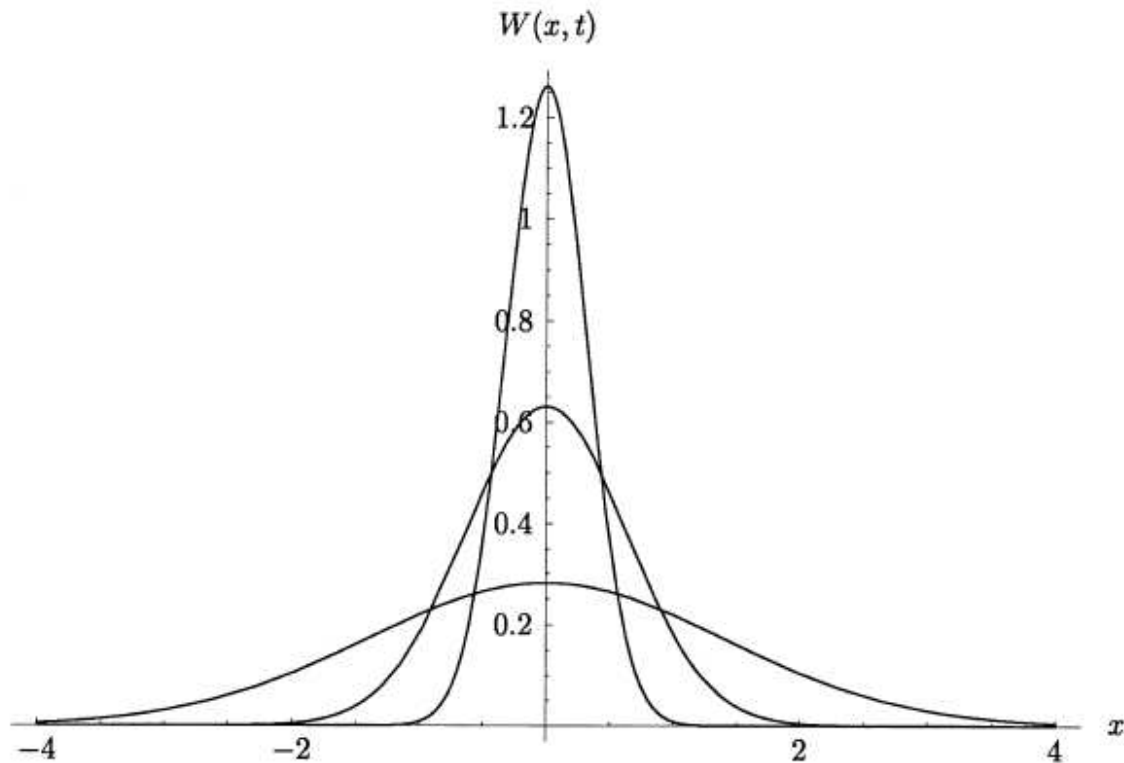
odpowiednik prawa Ficka

$${}_0D_t^{\frac{1}{d}} P(r, t) = A \left(\frac{\partial P(r, t)}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} P(r, t) \right)$$

gdzie: $P(r, t)$ - średnia gęstość
prawdopodobieństwa spaceró losowych na
fraktalach

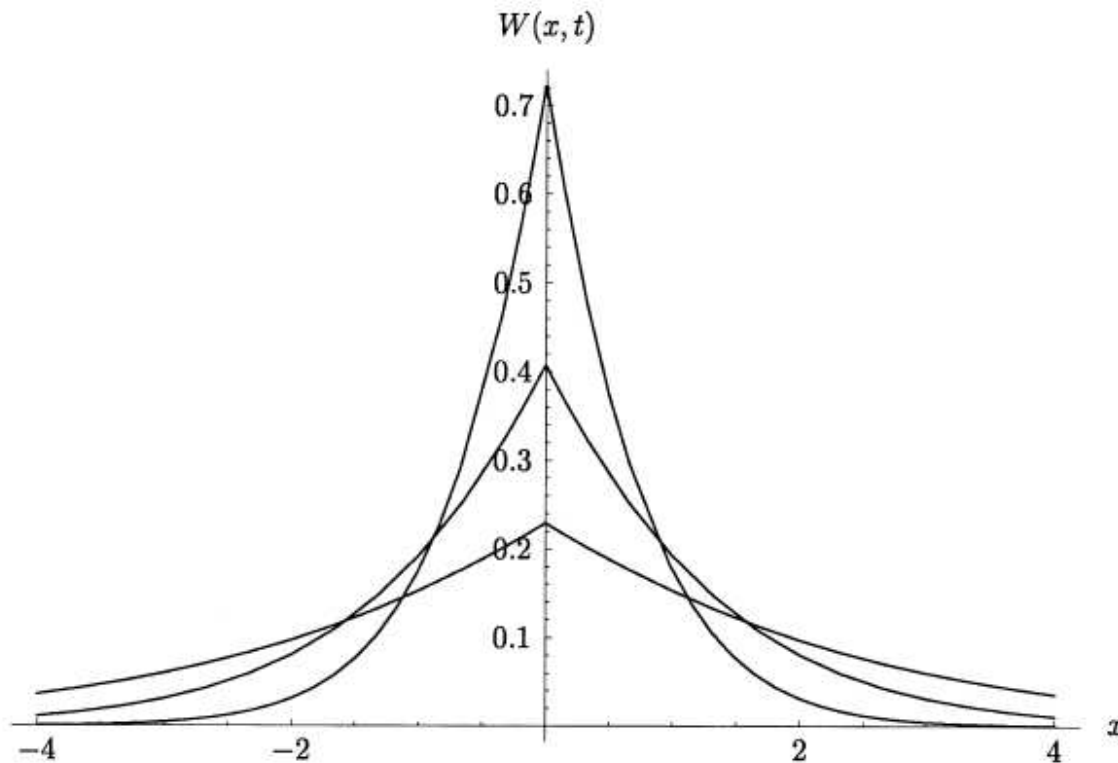
A, κ - stałe d - wymiar fraktalny

dyfuzja



Rysunek 5: Zmiana W w czasie dla klasycznej dyfuzji

subdyfuzja



Rysunek 6: Zmiana W w czasie dla subdyfuzji

Literatura

- [1] Mikołaj Siergiejew, *Od dyfuzji "normalnej" do dyfuzji "anomalnej"*, Zakład Fizyki Ciała Stałego, Instytut Fizyki US.
- [2] Igor Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, 1999.
- [3] Ralf Metzler, Joseph Klafter *The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach*, School of Chemistry, Tel Aviv University,
- [4] Wikipedia