Jan Pyrzowski i Justyna Signerska

Termodynamika multifraktali

Prawdopodobienstwo w teorii układów dynamicznych

Empiryczna definicja prawdopodobieństwa:
R - liczba wszystkich rozłacznych zdarzeń, które mogą być wynikami eksperymentu

$$\frac{n_i}{n} = H_i$$ -relatywna częstość występowania zdarzenia *i* w ciągu n niezależnych eksperymentów

$$\lim_{n\to\infty} H_i = p_i$$ - prawdopodobienstwo obserwacji zdarzenia *i*

W układach chaotycznych:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$\mu_n(A)$-prawdopodobieństwo znalezienia n-tej iteracji x_n odwzorowania f w zbiorze A:

$$\mu_n(A) = \int_A \rho_n(x)dx, \qquad n \geq 0$$

(ρ_n -gęstość prawdopodobieństwa)

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(f^{-1}(A)) \tag{1}$$

$$\mu_{n+1}(A) = \mu_n(A) \tag{2}$$

Miarę probabilistyczną μ_n spełniającą warunki (1) i (2) nazywamy *miarą niezmienniczą*, a odpowiadającą jej gęstość ρ_n *gęstością niezmienniczą*.

$$\forall_A \qquad \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \tag{3}$$

$$\forall_A \qquad \int_A \rho(x)dx = \int_{f^{-1}(A)} \rho(x)dx \tag{4}$$

Wartość oczekiwana obserwabli Q:

$$\langle Q \rangle = \int_X \rho(x)Q(x)dx \iff \langle Q \rangle = \int_X Q(x)d\mu(x)$$

Wartości oczekiwane obserwabli są niezmiennicze względem odwzorowania f:

$$\begin{aligned}\langle Q \rangle \; &= \; \int_X Q(x)d\mu(x) = \int_X Q(x)d\mu(f^{-1}(x)) = \\ &= \int_X Q(f(x))d\mu(x) = \langle Q \circ f \rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Średnia czasowa obserwabli Q względem ustalonej trajektorii:

$$\overline{Q} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Q(x_n)$$

Ergodyczność

Mówimy, że odwzorowanie $f : X \to X$ *zachowujące miarę* na przestrzeni probabilistycznej (X, β, μ) jest **ergodyczne**, jeśli wszystkie zbiory f - niezmiennicze są miary 0 lub 1.

Twierdzenie ergodyczne *(Birkhoff)*:

Jeśli odwzorowanie $f : X \to X$ jest ergodyczne oraz μ jest miarą niezmienniczą, to:

$$\overline{Q} = \langle Q \rangle \qquad \mu\text{-prawie wszędzie.} \tag{6}$$

Fraktale

Iterated function system (IFS)

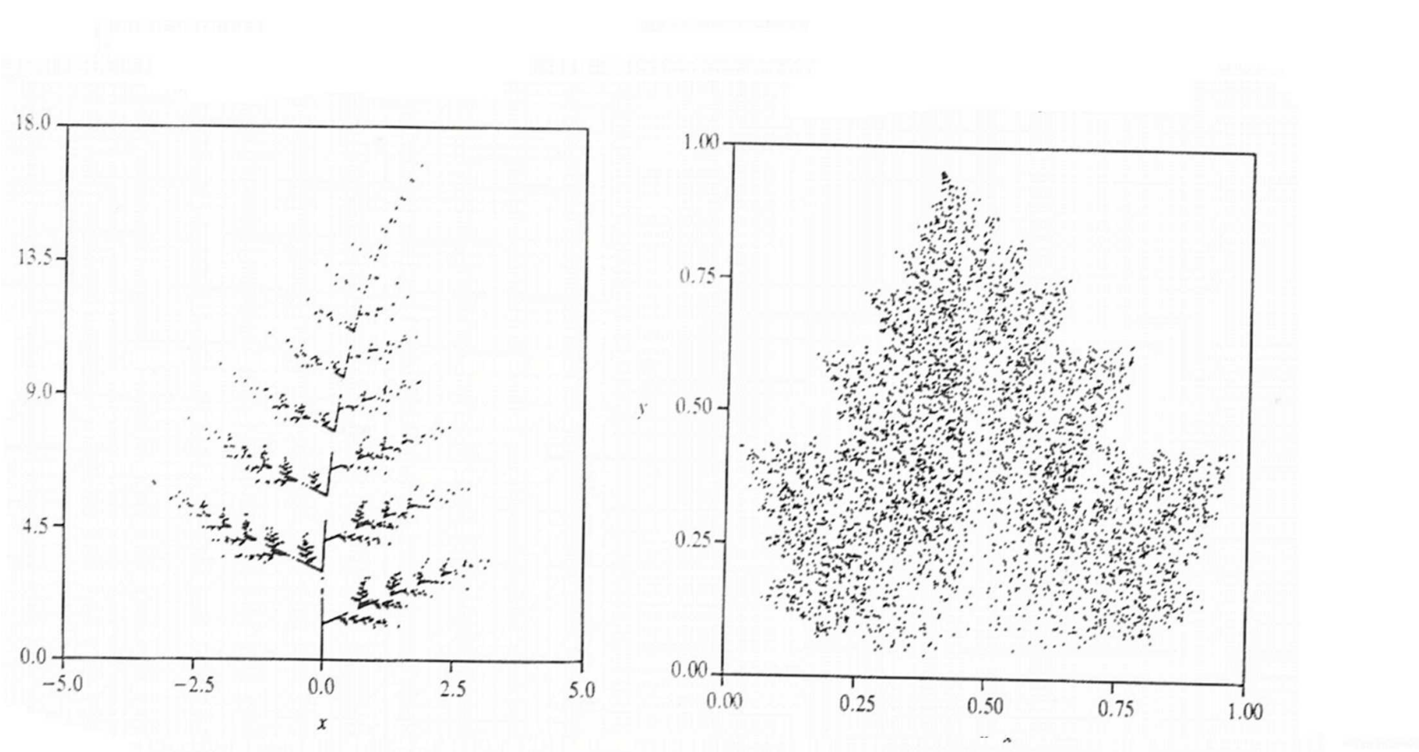
(X, d) - zwarta przestrzeń metryczna

$\{w_i : X \to X| \quad i = 1, 2, ...N\}$ - układ *kontrakcji* takich, że $w_i(X) = X$

Liść Barnsley'a :

$T_i(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y + b_1, a_{21}x + a_{22}y + b_2),$

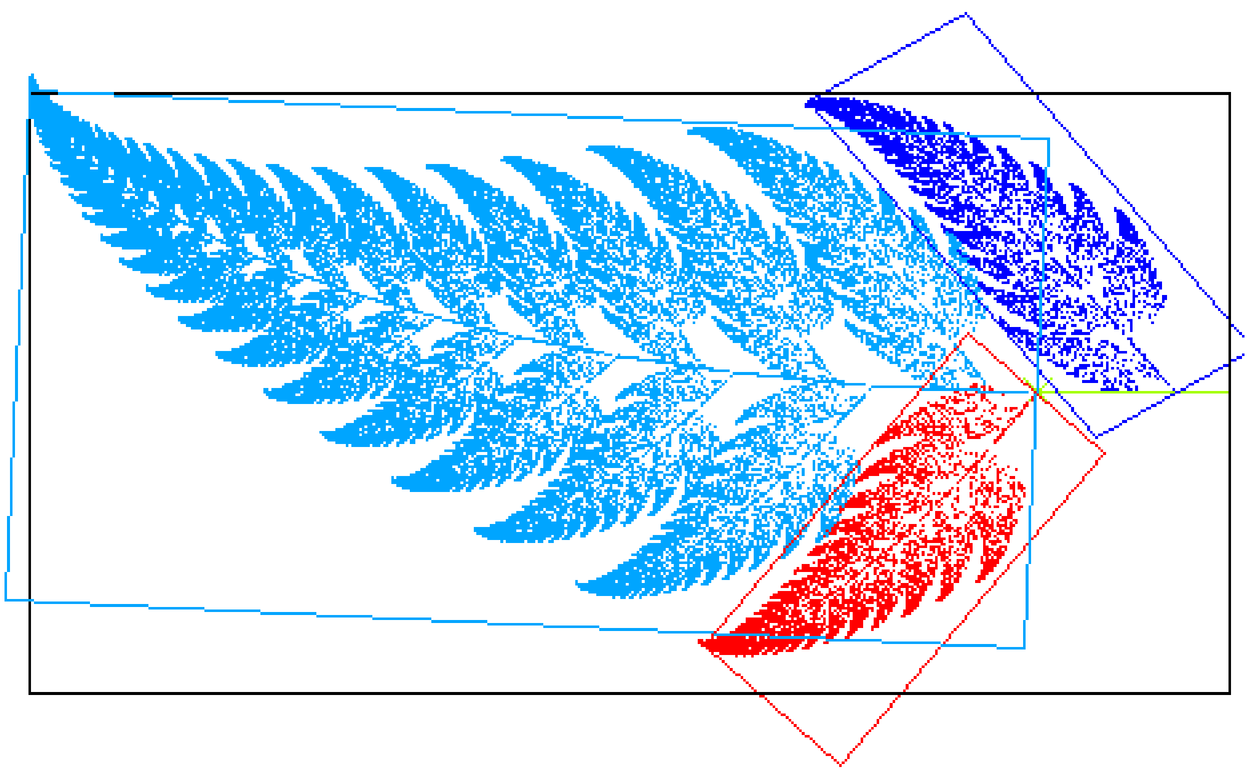
$i \in 1, 2, 3, 4$



Samopodobieństwo (self-similarity):

Zwarta przestrzeń topologiczna X jest samopodobna, jeżeli istnieje skończony zbiór niesurjektywnych homeomorfizmów $\{f_s : X \to X\}_{s \in S}$, takich, że:

$$X = \cup_{s \in S} f_s(X)$$



Wymiar fraktalny (box dimension):

$$D(0) = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln r(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad \text{gdzie:}$$

$r(\varepsilon)$-liczba obiektów (”pudełek”) o liniowym rozmiarze ε, którymi możemy pokryć badany obiekt

Wymiar Hausdorffa:

Zbiór fraktalny A pokrywamy zbiorami σ_k o średnicy ε_k, gdzie $\varepsilon_k < \varepsilon$. Dla $\beta > 0$ definiujemy:

$$m(\beta, \varepsilon) := \inf_{\{\sigma_k\}} \sum_k (\varepsilon_k)^\beta$$

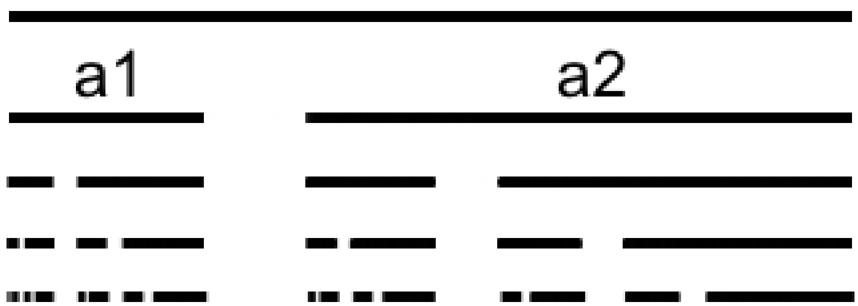
Istnieje β_0 takie, że:

$$\begin{cases} \varepsilon \to 0 \Rightarrow m(\beta, \varepsilon) \to 0, & \text{dla } \beta > \beta_0; \\ \varepsilon \to 0 \Rightarrow m(\beta, \varepsilon) \to \infty, & \text{dla } \beta < \beta_0. \end{cases}$$

β_0 nazywamy wymiarem Hausdorffa D_H zbioru A:

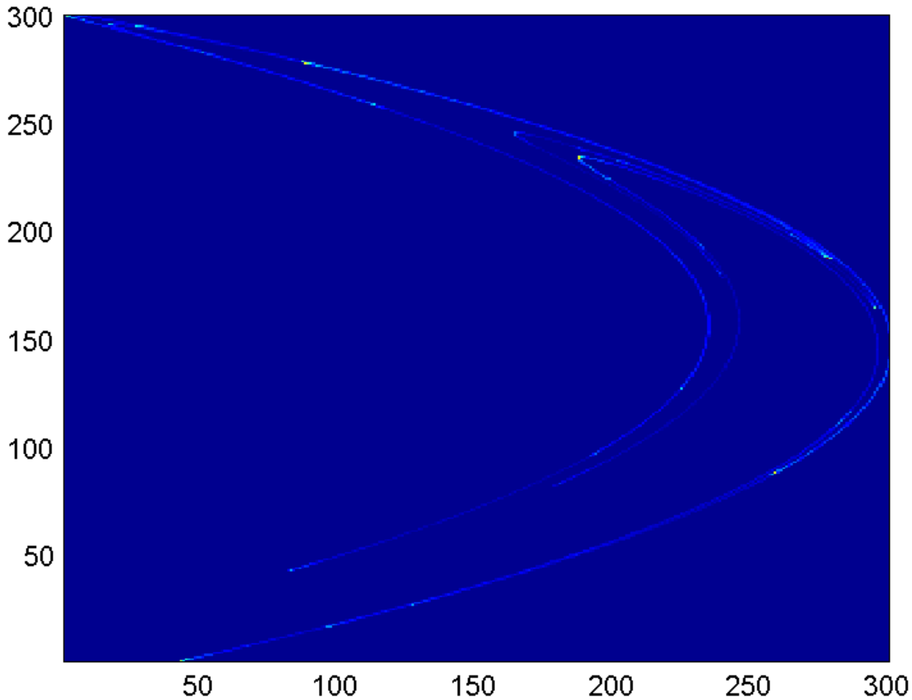
$$D_H = \beta_0$$

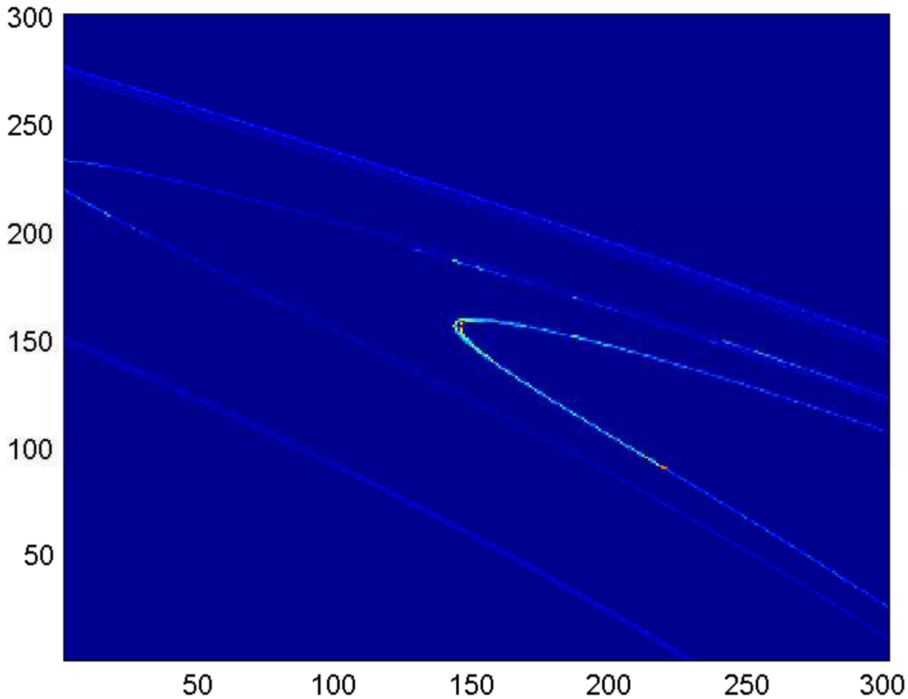
"Dwuskalowy" zbiór Cantora :



$$a_1^{\beta_0} + a_2^{\beta_0} = 1$$

Multifraktale...





300
250
200
150
100
50
50
100
150
200
250
300

Informacja Shannona

Ω-zbiór N zdarzeń elementarnych ω
o równym prawdopodobieństwie
p_i-prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia i
w zbiorze R rozłącznych zdarzeń $i = 1, 2, ..., R$:

$$p_i = \frac{N_i}{N}, \quad \text{gdzie} \quad N = \sum_{i=1}^{R} N_i \tag{7}$$

lnN - *liczba bitowa* potrzebna, aby wybrać ustalone zdarzenie ω ze zbioru Ω
b_i-liczba bitowa potrzebna, aby wybrać podzbiór (zdarzenia) $i \subset \Omega$

$$b_i + \ln N_i = \ln N \tag{8}$$

$$b_i = -\ln p_i \tag{9}$$

$$\langle -b_i \rangle = I(p) = \sum_{i=1}^{R} p_i \ln p_i$$ *-informacja Shannona*

$$S(p) = -I(p)$$ *-entropia Shannona*

(funkcje rozkładu p)

Własności funkcji $I(p)$:

- $I(p)$ przyjmuje maksymalną wartość 0 dla rozkładu $p_i = \delta_{ij}$
- $I(p)$ przyjmuje minimalną wartość $-\ln R$ dla rozkładu jednostajnego $p_i = \frac{1}{R}$
- $I(p)$ jest wypukłą funkcją rozkładu

Aksjomaty Khinchin'a

I. $I(p) = I(p_1, ..., p_R)$

II. $I(\frac{1}{R}, \frac{1}{R}, ..., \frac{1}{R}) \leq I(p)$

III. $I(p_1, ..., p_R) = I(p_1, ..., p_R, 0)$

Jeśli system (Ω, p) ze zdarzeniami postaci (i, j) jest złożeniem systemów (Ω^I, p^I) i (Ω^{II}, p^{II}), w których wyróżniamy odpowiednio zdarzenia i i j, to zachodzi:

IV. $I(p) = I(p^I) + \sum_i p_i^I I(P|i)$,

gdzie:

- $P(j|i)$-prawdopodobieństwo warunkowe, że Ω^{II} jest w stanie j, jeśli Ω^I jest w stanie i
- $p_{i,j} = P(j|i)p_i^I$,
- $I(P|i) = \sum_j P(j|i) \ln P(j|i)$ - *informacja warunkowa* rozkładu $P(j|i)$ prawdopodobieństwa zdarzeń j przy ustalonym zdarzeniu i.

Inne miary informacji

Informacja Rényi'ego

$$I_\beta(p) = \frac{1}{\beta - 1} \ln \sum_{i=1}^{r} (p_i)^\beta, \qquad (10)$$

gdzie:

- parametr $\beta \in \mathbb{R}$

- r - liczba zdarzeń i, dla których $p_i \neq 0$.

Własności funkcji $I_\beta(p)$ w zależności od parametru β :

1. $\beta = 0$

   $I_0(p) = -\ln r$

   $|I_0(p)|$ wzrasta logarytmicznie wraz z liczbą niepustych zdarzeń i

2. $\beta = 1$

   podstawiając $\varepsilon = \beta - 1$ otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{r} p_i^{1+\varepsilon} = \sum_{i=1}^{r} p_i exp(\varepsilon \ln p_i) =$$

$$\approx \sum_{i=1}^{r} p_i(1 + \varepsilon \ln p_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{r} p_i \ln p_i,$$

   a stąd:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_{1+\varepsilon}(p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} ln(1 + \varepsilon \sum_{i=1}^{r} p_i \ln p_i) = \sum_{i=1}^{r} p_i \ln p_i,$$

   czyli:

$$\lim_{\beta \to 1} I_\beta(p) = I(p) \tag{11}$$

Zasada maksymalnej entropii

M_i^σ-wartość σ-obserwabli dla i-tego mikrostanu
Warunki dla wartości oczekiwanych tych obserwabli:

$$M^\sigma = \sum_{i=1}^{R} p_i M_i^\sigma$$

Warunek dla normalizacji rozkładu:

$$\sum_{i=1}^{R} p_i = 1$$

Zasada maksymalnej entropii (minimalnej informacji):

$$\delta I(p) = 0$$

Zatem:

$$\delta I(p) = \sum_{i=1}^{R} (1 + \ln p_i)\delta p_i = 0$$

Dla ”nieskończenie małych wariacji (?)” δp_i zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{R} M_i^{\sigma} \delta p_i = 0 \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{R} \delta p_i = 0 \tag{13}$$

Uwzględniając powyższe warunki otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{R} (\ln p_i - \Psi + \sum_{\sigma} \beta_{\sigma} M_i^{\sigma})\delta p_i = 0,$$

gdzie β_{σ} i Ψ są mnożnikami Lagrange'a odpowiednio dla warunków (12) i (13).
Ponieważ δp_i mogą przyjmować dowolne wartości, zasadę maksimum entropii spełnia rozkład o postaci:

$$P_i = exp(\Psi - \sum_{\sigma} \beta_{\sigma} M_i^{\sigma}) \tag{14}$$

Rozkład taki nazywamy rozkładem kanonicznym (Gibbs'a)

Entropia rozkładu kanonicznego (14):

$$S = -\Psi + \sum_{\sigma} \beta_{\sigma} M^{\sigma} \tag{15}$$

Ψ nie jest niezależnym parametrem. Warunek normalizacji rozkladu:

$$\sum_{i}^{R} P_i = 1,$$

daje

$$\Psi = -\ln Z,$$

gdzie:

$$Z = \sum_{i}^{R} exp(-\sum_{\sigma} \beta_{\sigma} M_i^{\sigma}) \tag{16}$$

to tzw. funkcja podziału.

Transformacja Legendre'a

Mając wypukłą lub wklęsłą funkcję $F(x)$, oznaczamy:

$$\frac{dF(x)}{dx} = y \tag{17}$$

$y(x)$ jest monotoniczna; definiujemy funkcję $L(y)$:

$$L(y) = -F(x) + xy$$

Otrzymujemy:

$$\frac{dL}{dy} = -\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dy} + y\frac{dx}{dy} + x$$

Korzystając z (17) uzyskujemy:

$$\frac{dL(y)}{dy} = x$$

Załóżmy, że mamy tylko jeden warunek typu (12). Różniczkując:

$$S = -\Psi + \beta M$$

po M, otrzymujemy:

$$\frac{dS}{dM} = -\frac{d\Psi}{d\beta}\frac{d\beta}{dM} + M\frac{d\beta}{dM} + \beta. \qquad (18)$$

Z definicji funkcji podziału (16) wynika:

$$\frac{d\Psi}{d\beta} = M,$$

co po podstawieniu do (18) daje:

$$\frac{dS}{dM} = \beta$$

Powyższe roważania łatwo uogólnic dla większej liczby warunków typu (12):

$$\Psi(\beta) + S(M) = \sum_\sigma \beta_\sigma M^\sigma$$

$$M^\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_\sigma} \qquad \beta_\sigma = \frac{\partial S}{\partial M^\sigma}$$

Rozkłady eskortowe

Załóżmy, że mamy dowolny rozkład p.
Zdefiniujmy transformację:

$$p_i \longrightarrow \frac{p_i^\beta}{\sum_i^R p_i^\beta} \qquad \beta \in \mathbb{R} \tag{19}$$

Wykorzystując zależność: $p_i = exp(-b_i)$, możemy zapisać (19) w postaci analogicznej do rozkładu kanonicznego (14):

$$exp(-b_i) \longrightarrow exp(\Psi - \beta b_i),$$

gdzie:

$$\Psi = -\ln Z \qquad Z = \sum_i^R exp(-\beta b_i) = \sum_i^R p_i^\beta. \tag{20}$$

Mamy również:

$$I_\beta(p) = \frac{1}{\beta - 1} \ln \sum_{i=1}^r p_i^\beta = -\frac{1}{\beta - 1} \Psi(\beta). \tag{21}$$

Multifraktale

Załóżmy że mamy miarę probabilistyczną μ na fraktalnym nośniku w d-wymiarowej przestrzeni fazowej Ω.
$R \sim \varepsilon^{-d}$ - liczba d-wymiarowych "sześcianów" o boku $\varepsilon \to 0$ pokrywających Ω.
r-liczba "sześcianów" o niezerowym prawdopodobieństwie.
p_i - miara μ i-tego "sześcianu" o środku w punkcie x, $i = 1, 2, ..., r$
Zdefiniujmy:

$$\alpha_i(\varepsilon) \equiv \alpha(\varepsilon, x) = \frac{\ln p_i}{\ln \varepsilon} \qquad \text{- wskaźnik osobliwości} \tag{22}$$

$$\alpha(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \alpha(\varepsilon, x) \qquad \text{- wymiar punktowy}$$

Fraktal nazywamy **multifraktalem** jeżeli $\alpha(x)$ nie jest stałe.

Korzystając z (22) oraz $p_i = exp(-b_i)$, mamy:

$$b_i = -\alpha_i(\varepsilon) \ln \varepsilon. \qquad (23)$$

Z (21) otrzymujemy, że rozkłady eskortowe (19) mają postać :

$$P_i = exp(\Psi - \beta b_i),$$

gdzie:

$$\Psi(\beta) = -\ln \sum_{i=1}^{r} exp(-\beta b_i) = -(\beta - 1) I_\beta(p).$$

Funkcja podziału dana jest wzorem:

$$Z(\beta) = \sum_{i=1}^{r} p_i^\beta = \sum_{i=1}^{r} exp(-\beta b_i) = exp[-\Psi(\beta)],$$

a informację Rényi'ego można wyrazić jako:

$$I_\beta(p) = \frac{1}{\beta - 1} \ln Z(\beta).$$

Wymiary Rényi'ego

$$D(\beta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{I_\beta(p)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \frac{1}{(\beta - 1)} \ln \sum_{i=1}^{r} p_i^\beta \tag{24}$$

Zatem dla $\varepsilon \to 0$:

$$Z(\beta) \sim \varepsilon^{(\beta-1)D(\beta)},$$

a stąd otrzymujemy:

- dla $\beta = 0$
  $D(0)$- *box dimension*

- dla $\beta \to 1$

$$D(1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} \sum_{i=1}^{r} p_i \ln p_i =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\ln \varepsilon} I(p) = \langle \alpha(x) \rangle$$

  D(1)-*wymiar informacji*

- dla $\beta = 2$

  D(2)-*wymiar korelacji*

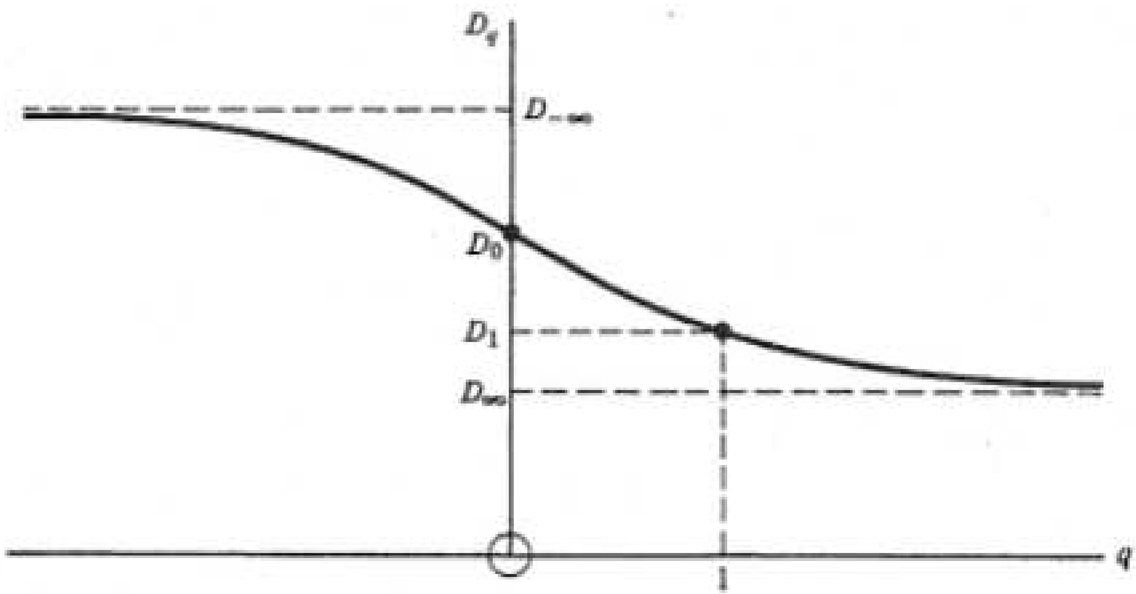
- $D(+\infty)$

- $D(-\infty)$

Właściwości wymiaru Rényi'ego

1. $D(\beta) \geq 0$

2. $D(\beta') \leq D(\beta)$ dla $\beta' > \beta$



D_q
$D_{-\infty}$
D_0
D_1
D_{∞}
q
1

Uogólniony wymiar Renyi'ego

$\{\sigma_1, \sigma_2, ...\sigma_r\}$-pokrycie multifraktala rozłącznymi zbiorami o różnych kształtach i średnicach $l_i < l$, $i - 1, 2, ..., r$

p_i-miara probabilistyczna zbioru σ_i

Uogólnioną funkcję podziału definujemy jako:

$$Z(\beta, \tau) = \begin{cases} \inf_{\{\sigma\}} \sum_{i=1}^{r} (p_i^{\beta} / l_i^{\tau}), & \text{dla } \beta \leq 1,\ \tau \leq 0; \\ \sup_{\{\sigma\}} \sum_{i=1}^{r} (p_i^{\beta} / l_i^{\tau}), & \text{dla } \beta > 1,\ \tau > 0. \end{cases}$$

Istnieje $\tau_0(\beta) = (\beta - 1)D(\beta)$ takie, że:

$$\lim_{l \to 0} Z(\beta, \tau_0) \to O(1)$$

$D(\beta)$ nazywamy **uogólnionym wymiarem Renyi'ego**.

Spektrum osobliwości $f(\alpha)$

Oznaczając $V = -\ln(\varepsilon)$, granicę $V \to \infty$ nazywać będziemy *granicą termodynamiczną*.
W granicy termodynamicznej wyrażenie na energię swobodną Ψ (20) zastępujemy przez:

$$\Psi = \lim_{V\to\infty} - \ln \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} exp(-\beta\alpha V)\gamma(\alpha)d\alpha.$$

Zakładając że $\gamma(\alpha) \sim \varepsilon^{-f(\alpha)}$ otrzymujemy:

$$\Psi = \lim_{V\to\infty} - \ln \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} exp([f(\alpha) - \beta\alpha]V)d\alpha.$$

Niech teraz $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\beta)$ oznacza wartość α, dla której wyrażenie $f(\alpha) - \beta\alpha$ osiąga maksimum.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}|_{\alpha=\tilde{\alpha}} = \beta \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}|_{\alpha=\tilde{\alpha}} < 0;$$

Mamy wtedy:

$$\Psi \sim [\beta\tilde{\alpha} - f(\tilde{\alpha})]V \qquad (25)$$

Korzystając z zależności (15) oraz (23) mamy:

$$\Psi = \beta\tilde{\alpha}V - S \qquad (26)$$

Porównując (25) i (26) otrzymujemy:

$$\lim_{V\to\infty}\frac{S}{V} = f(\tilde{\alpha})$$

Natomiast z (24) i (21) otrzymujemy:

$$\lim_{V\to\infty}\frac{\Psi}{V} = \tau(\beta)$$

$$\tau(\beta) = (\beta - 1)D(\beta)$$

Wielkości $f(\tilde{\alpha})$ i $\tau(\beta)$ powiązane są transformacją Legendre'a w granicy termodynamicznej podobnie jak S i Ψ dla skończonych wartości V.

$$S(b) = \beta b - \Psi(\beta)$$

$$\frac{d\Psi}{d\beta} = b \qquad \frac{dS}{db} = \beta$$

Analogicznie:

$$f(\tilde{\alpha}) = \beta\tilde{\alpha} - \tau(\beta) \tag{27}$$

$$\frac{d\tau}{d\beta} = \tilde{\alpha} \qquad \frac{df}{d\tilde{\alpha}} = \beta \tag{28}$$

Oznaczając $\alpha(\beta) = \tilde{\alpha}$ możemy przedstawic (28) w postaci:

$$\alpha(\beta) = D(\beta) + (\beta - 1)D'(\beta)$$

$$f(\alpha(\beta)) = D(\beta) + \beta(\beta - 1)D'(\beta)$$

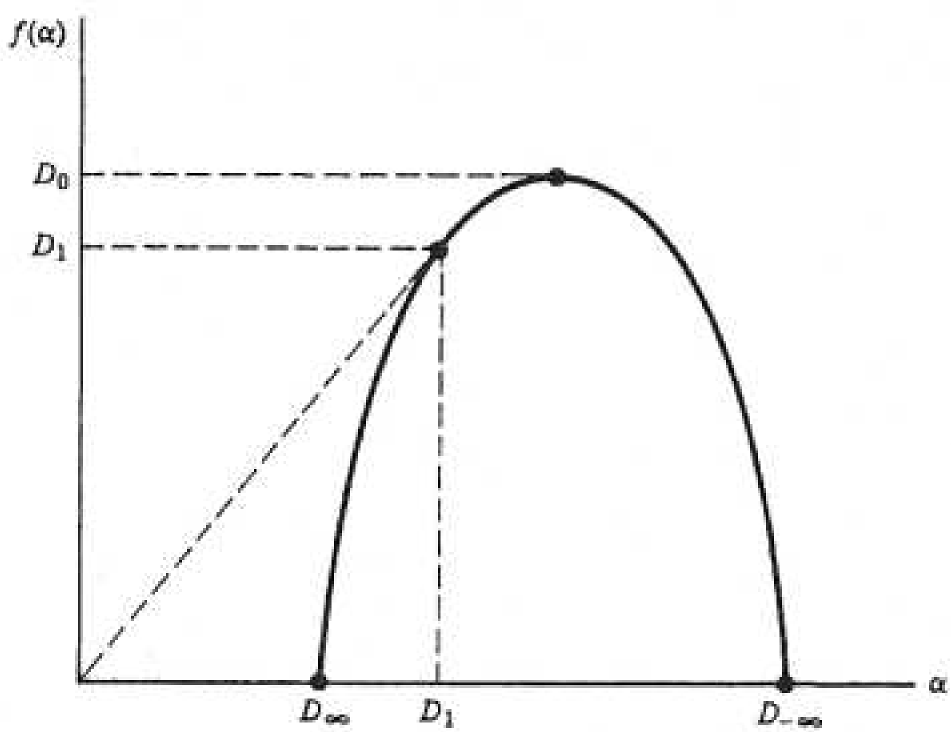
Daje to w szczególności:

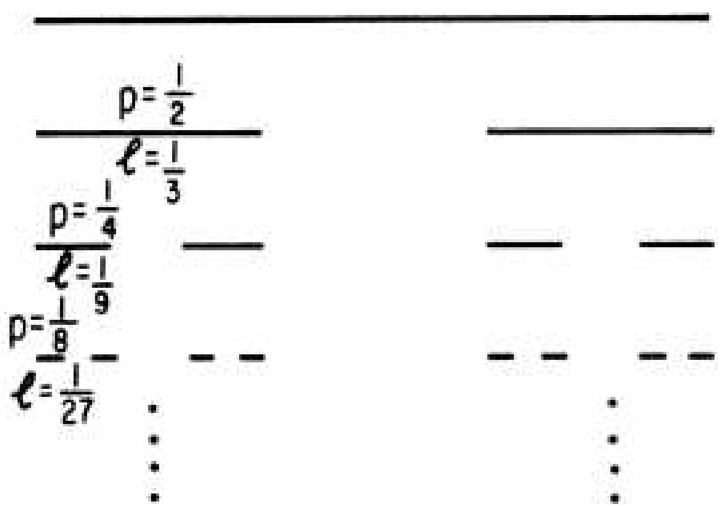
$$f(\alpha(0)) = D(0) = \alpha(0) + D'(0)$$

$$f(\alpha(1)) = D(1) = \alpha(1)$$

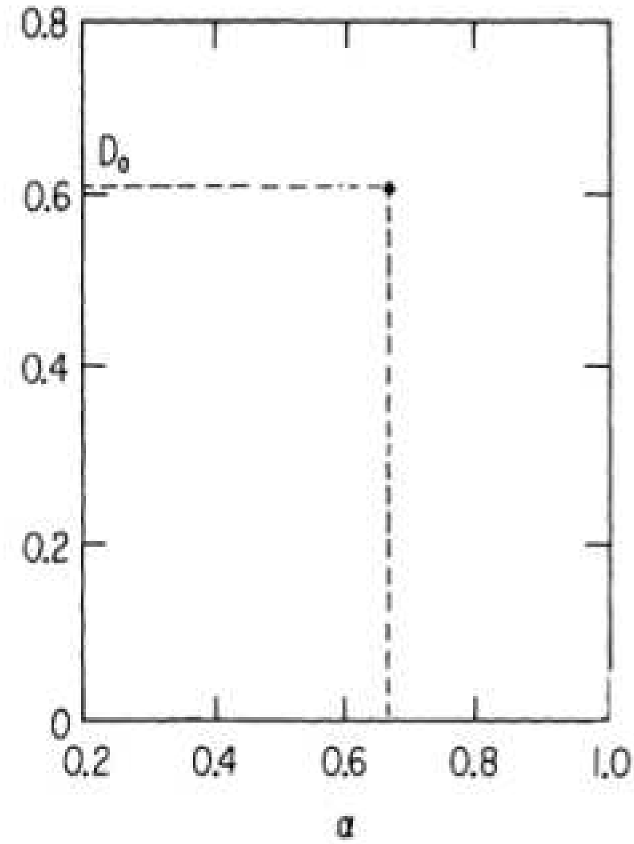
Można również pokazać:

$$\alpha_{min} = D(+\infty) \qquad \alpha_{max} = D(-\infty)$$

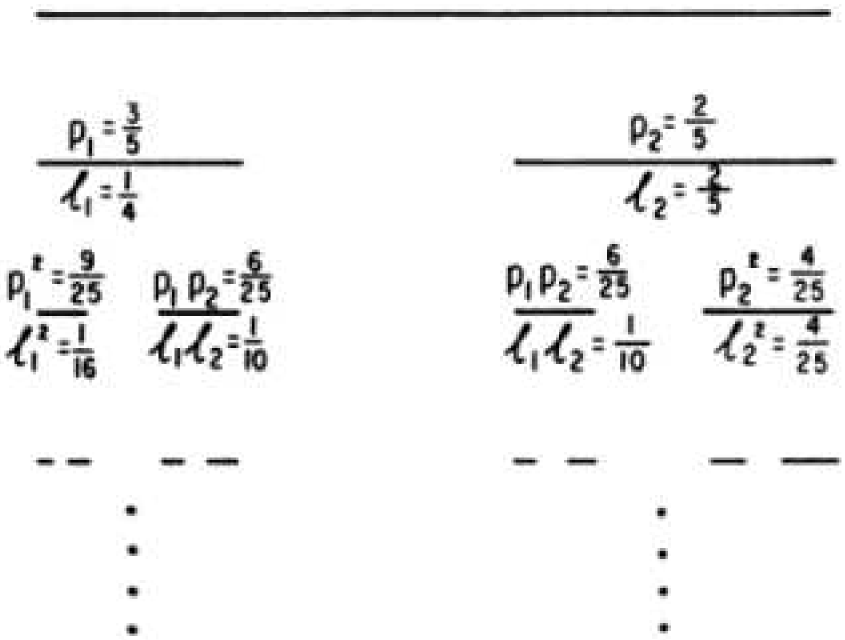




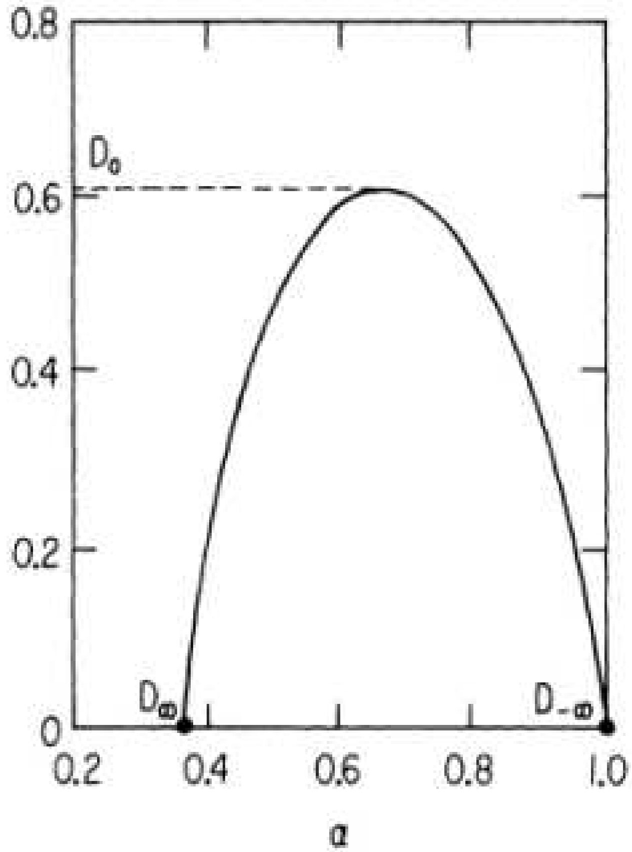
p= 1/2
ℓ= 1/3
p= 1/4
ℓ= 1/9
p= 1/8
ℓ= 1/27



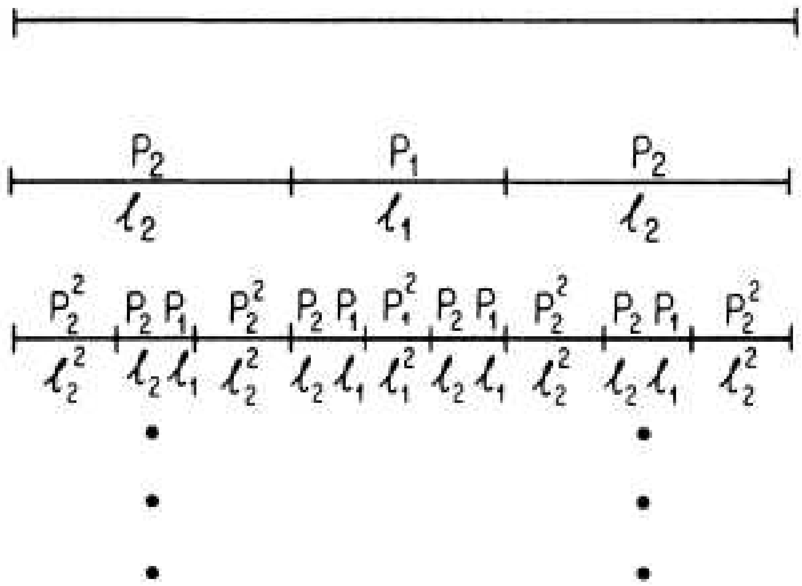
0.8
0.6
0.4
0.2
0
D0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
α

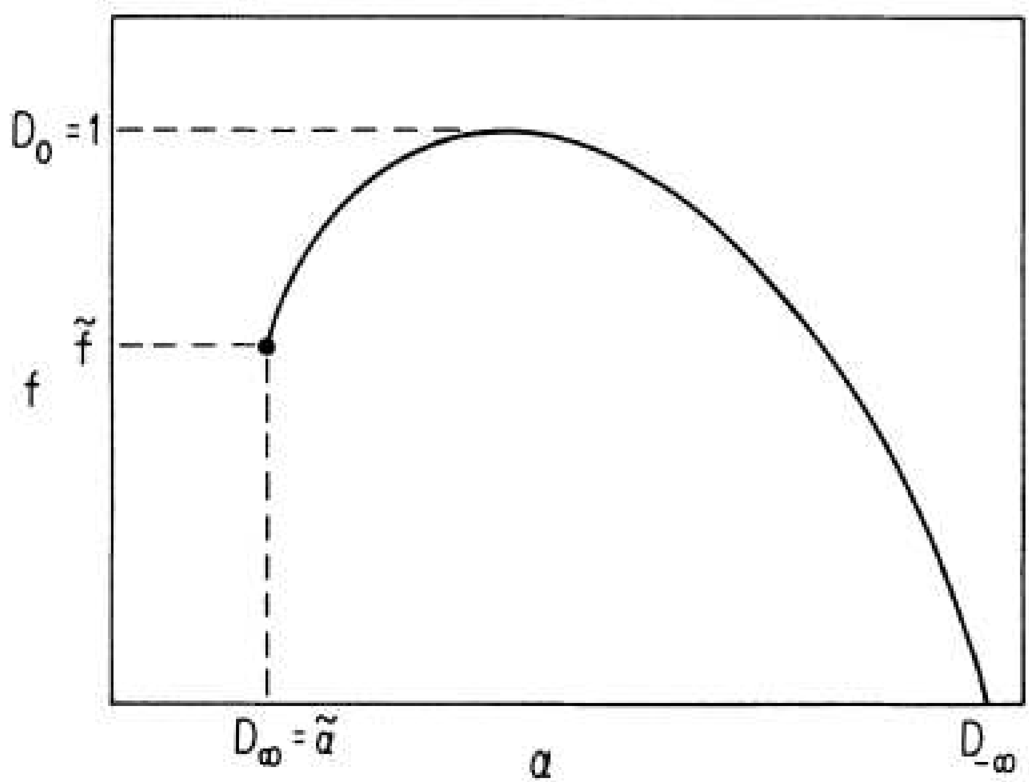


$p_1 = \frac{3}{5}$
$\ell_1 = \frac{1}{4}$
$p_2 = \frac{2}{5}$
$\ell_2 = \frac{2}{5}$
$p_1^2 = \frac{9}{25}$
$\ell_1^2 = \frac{1}{16}$
$p_1 p_2 = \frac{6}{25}$
$\ell_1 \ell_2 = \frac{1}{10}$
$p_1 p_2 = \frac{6}{25}$
$\ell_1 \ell_2 = \frac{1}{10}$
$p_2^2 = \frac{4}{25}$
$\ell_2^2 = \frac{4}{25}$



0.8
0.6
0.4
0.2
0
D_0
D_∞
$D_{-\infty}$
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
α

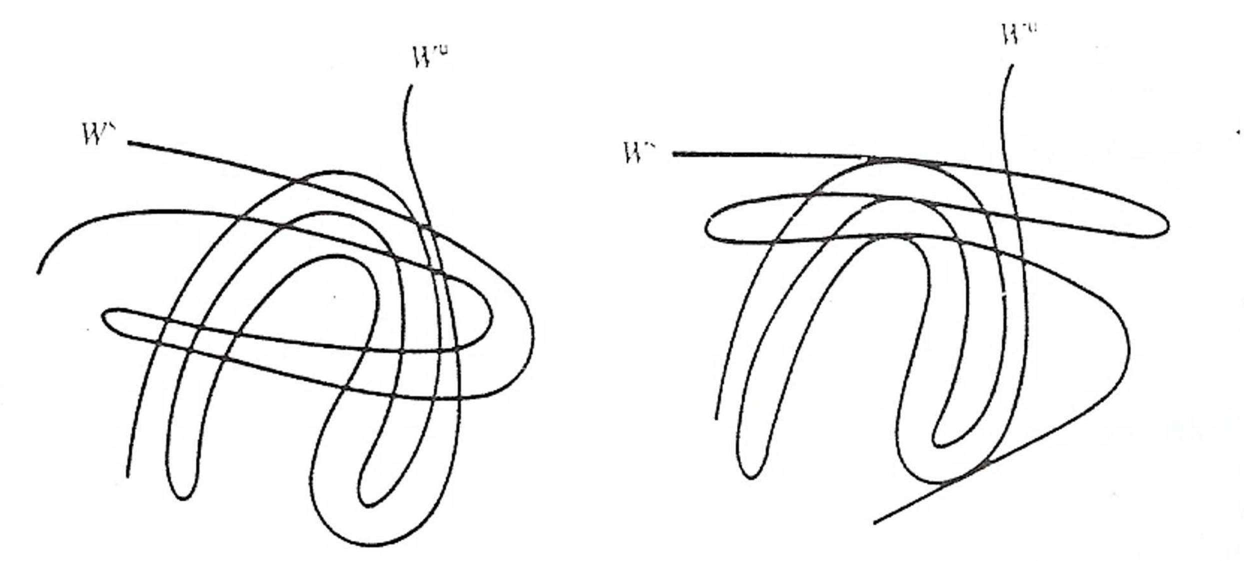

P_2 P_1 P_2
ℓ_2 ℓ_1 ℓ_2
P_2^2 $P_2 P_1$ P_2^2 $P_2 P_1$ P_1^2 $P_2 P_1$ P_2^2 $P_2 P_1$ P_2^2
ℓ_2^2 $\ell_2 \ell_1$ ℓ_2^2 $\ell_2 \ell_1$ ℓ_1^2 $\ell_2 \ell_1$ ℓ_2^2 $\ell_2 \ell_1$ ℓ_2^2


$D_0 = 1$
$\tilde{f}$
f
$D_\infty = \tilde{\alpha}$
α
$D_{-\infty}$

Hiperboliczność

$$W^s(x) = \{y : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |f^n(x) - f^n(y)| < 0\}$$

$$W^u(x) = \{y : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-n} \ln |f^n(x) - f^{-n}(y)| < 0\}$$

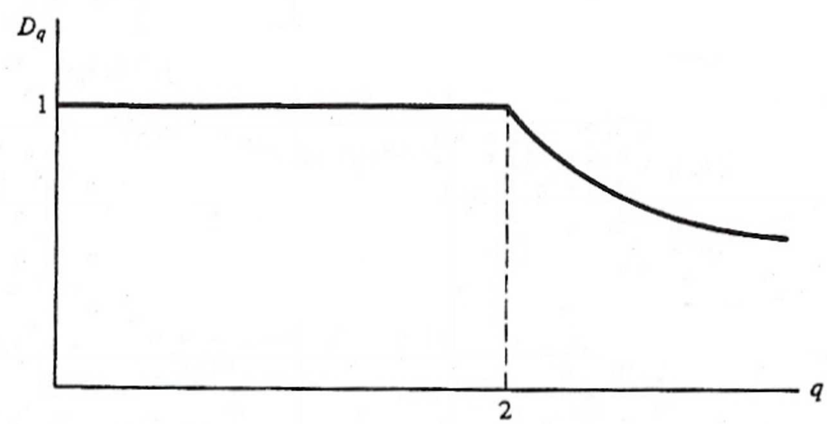


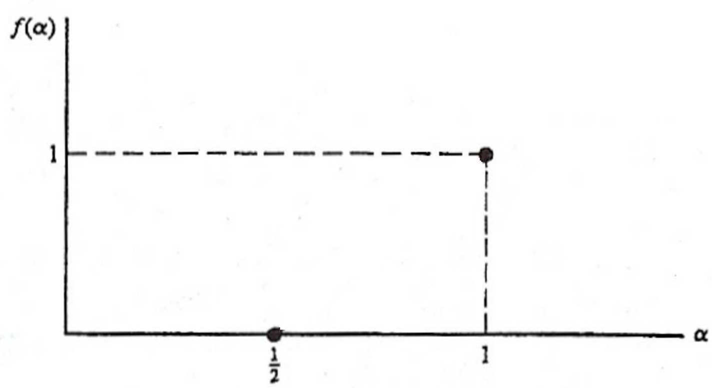
(a) (b)

Odwzorowanie Ulam'a:

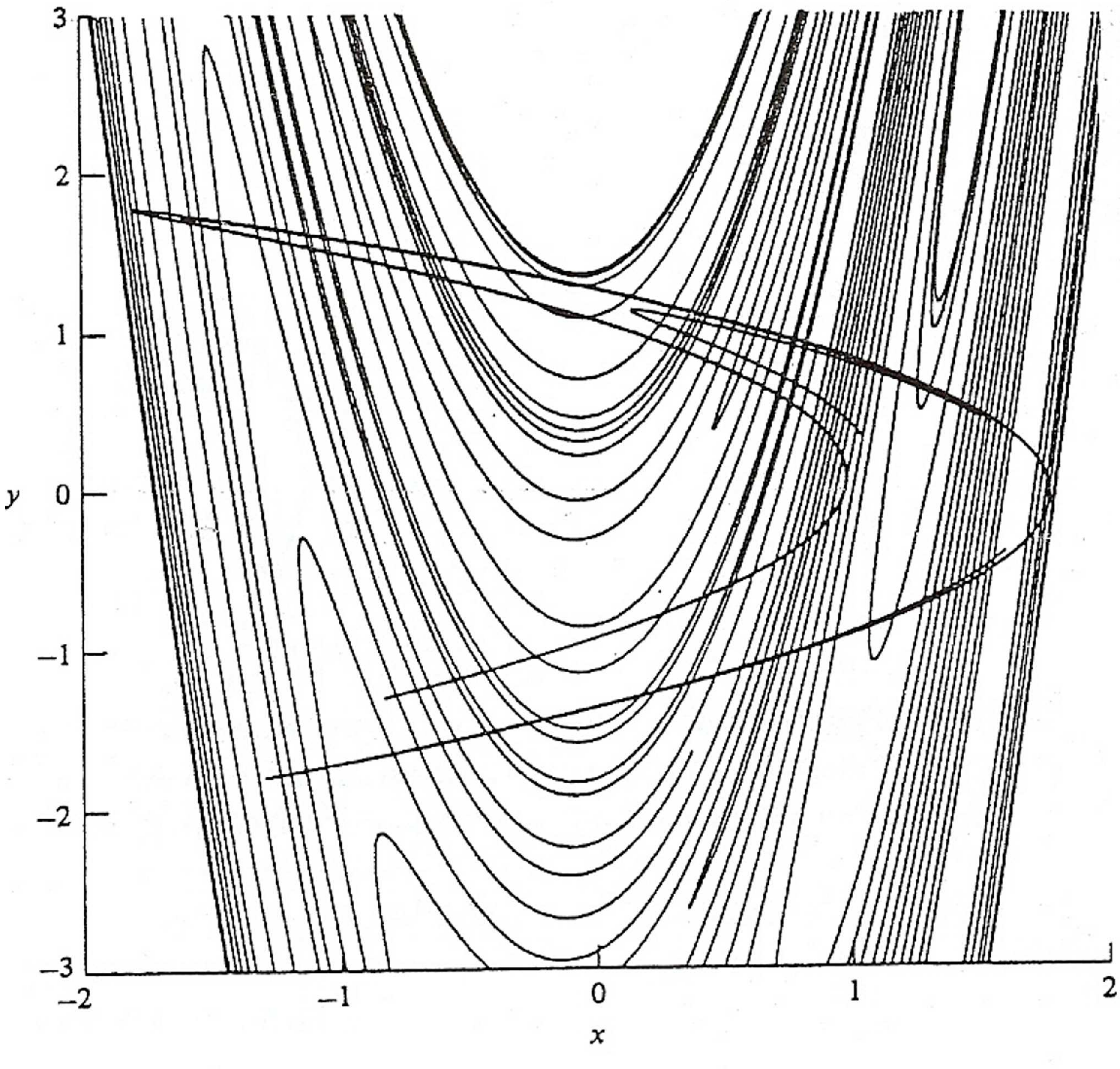
$$x \to 1 - 2x^2 \qquad x \in [-1, 1]$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}$$

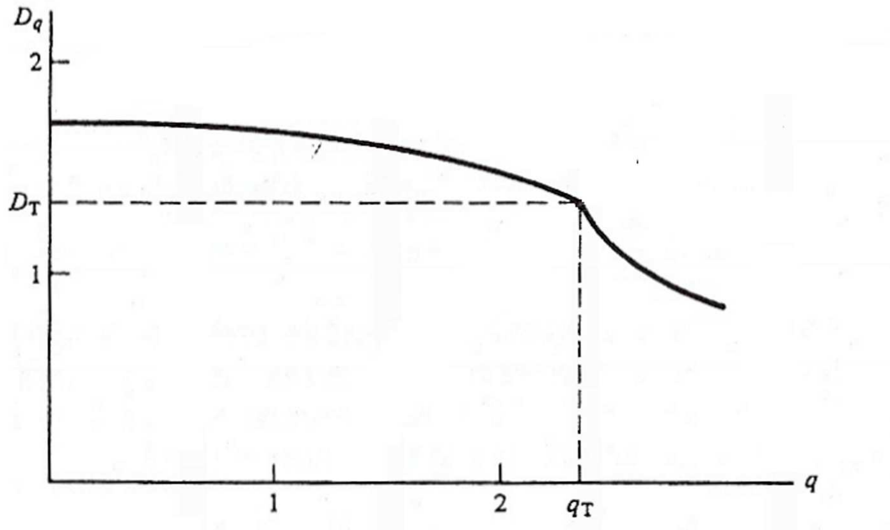


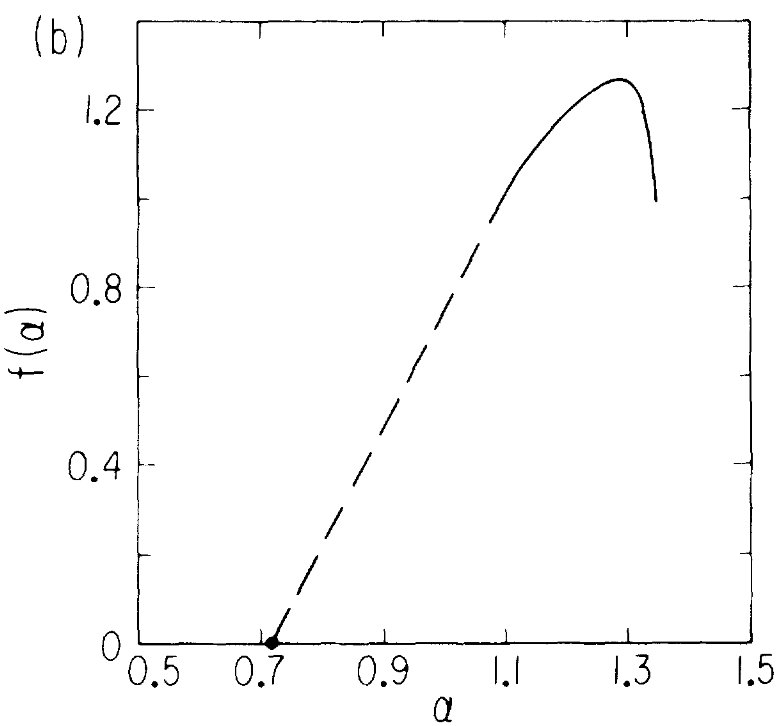


Styczności homokliniczne w odwzorowaniu Henon'a



Odwzorowanie Henon'a:





Bibliografia:

1. Beck S., Schlögl F., *"Thermodynamics of chaotic systems"*,Cambridge University Press (1993)

2. Eckmann JP, Ruelle D., *"Ergodic theory of chaos and strange attractors"*,Rev. Mod. Phys. 57, 617 - 656 (1985)

3. Jensen et al., *"Scaling structure and thermodynamics of strange sets"*,Phys. Rev. A 36, 1409 - 1420 (1987)

4. Halsey et al., *"Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets"*,Phys. Rev. A 33, 1141 - 1151 (1986)

5. Eckmann JP, Procaccia I, *"Fluctuations of dynamical scaling indices in nonlinear systems"* ,Phys. Rev. A 34, 659 - 661 (1986)

6. Gunaratne GH, Procaccia I, *"Organization of chaos"*,Phys. Rev. Lett. 59, 1377 - 1380 (1987)

7. Grebogi C, Ott E, Yorke JA, , *"Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors"* ,Phys. Rev. A 37, 1711 - 1724 (1988)

8. Ott E., *"Chaos w układach dynamicznych"*,WNT (1994)