



# Pomorski Konkurs Matematyczno-Fizyczny "WYGRAJ INDEKS"

## ZESTAW Z MATEMATYKI

Termin nadsyłania prac: **11 lutego 2011 roku.**

Rozwiązania należy nadesłać na adres:

**Centrum Edukacji Nauczycieli**

**ul. Gen. J. Hallera 14**

**80-401 Gdańsk**

**pokój 449**

**z dopiskiem „Wygraj Indeks – Matematyka”**

Rozwiązanie każdego zadania należy zapisać na **oddzielnej kartce**. Każda kartka musi zawierać **komputerowo wydrukowaną** etykietę z imieniem i nazwiskiem ucznia, nazwą i adresem szkoły, e-mailem i telefonem kontaktowym.

### Zadanie 1.

Dla jakiej wartości  $\beta \in (0; \pi)$  równanie  $(4 - \sqrt{15})^x + (4 + \sqrt{15})^x = 2ctg\beta$  ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste?

### Zadanie 2.

Dane są dwa ciągi geometryczne  $(a_n)$  i  $(b_n)$  złożone z jednakowej liczby wyrazów o ilorazach odpowiednio równych  $q_a$  i  $q_b$ . Wiadomo, że  $a_1 = 12$  i  $q_a = \frac{3}{4}$  oraz  $b_1 = 6$  i  $q_b = \frac{2}{3}$ . Gdyby pomnożyć wyrazy ciągów  $(a_n)$  i  $(b_n)$  z jednakowymi numerami, to suma wszystkich takich iloczynów byłaby równa 141,75. Znajdź liczbę wyrazów tych ciągów.

### Zadanie 3.

W trapezie podstawy mają długości  $a$  i  $b$  ( $a > b$ ). Suma miar kątów wewnętrznych przy dłuższej podstawie wynosi  $90^\circ$ . Wykaż, że odcinek łączący środki podstaw trapezu ma długość równą długości odcinka łączącego środki przekątnych.

### Zadanie 4.

Bok trójkąta ma długość 1, a kąty do niego przyległe mają miary  $30^\circ$  i  $120^\circ$ . Trójkąt ten obraca się dookoła prostej prostopadłej do boku o danej długości i przechodzącej przez przeciwległy wierzchołek. Oblicz objętość i pole powierzchni powstałej bryły.

### Zadanie 5.

W pewnym domu studenckim znajdują się trzy wolne pokoje: dwuosobowy, trzyosobowy, czterosobowy. W pokojach tych zakwaterowano w sposób losowy sześciu studentów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jeden pokój zostanie wolny?