15. Energia i praca w polu elektrycznym.

Wybór i opracowanie zadań Andrzej Kuczkowski.

15.1. Jaka praca zostanie wykonana podczas przenoszenia ładunku punktowego $q = 2\cdot10^{-8}$ C z nieskończoności do punktu oddalonego o 1 cm od powierzchni kulki o promieniu $r = 1$ cm i gęstości powierzchniowej ładunku $\sigma = 10^{-5}$ C/m^2?

15.2. Kulka o masie 1 g i ładunku 10^{-8} C przemieszcza się z punktu A o potencjale równym 600 V do punktu B o potencjale równym zeru. Jaką prędkość miała kulka w punkcie A, jeżeli w punkcie B osiągnęła ona prędkość 0,20 m/s?

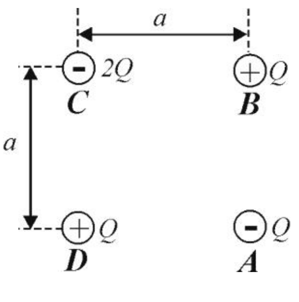
15.3. W procesie rozpadu promieniotwórczego z jądra atomu polonu wylatuje cząstka α z prędkością $1{,}6\cdot10^{7}$ m/s. Znajdź energię kinetyczną tej cząstki α oraz różnicę potencjałów takiego pola, w którym nieruchomą początkowo cząstkę α można rozpędzić do identycznej prędkości. Masa cząstki α wynosi $6{,}69\cdot10^{-27}$ kg. Zagadnienie należy rozpatrywać w sposób nierelatywistyczny, ponieważ $\mathrm{v} \approx 0{,}05\cdot c$.

15.4. Z jaką minimalną prędkością v powinna poruszać się cząstka a, aby osiągnąć powierzchnię kuli o promieniu $r = 1$ mm, naładowanej ładunkiem dodatnim $Q = 1$ nC? Odległość cząstki od kuli $d >> r$.

15.5.* Jaką siłą f (na jednostkę długości) odpychają się dwie jednoimiennie naładowane, nieskończenie długie, równoległe nici o jednakowej liniowej gęstości ładunku $\lambda = 3\cdot10^{-6}$ C/m, znajdujące się w próżni w odległości $b = 20$ mm? Jaką pracę A na jednostkę długości należy wykonać, aby zbliżyć te nici na odległość $a = 10$ mm?

15.6. Oblicz energię potencjalną układu utworzonego z cienkiego pierścienia o promieniu R, naładowanego równomiernie ładunkiem dodatnim z gęstością liniową λ, oraz ujemnego ładunku punktowego q, umieszczonego na osi pierścienia w odległości x od niego.

15.7. W narożach kwadratu o boku a umieszczono ładunki jak na rysunku. (a) Oblicz energię potencjalną ładunku Q, znajdującego się w narożu A. (b) Jaką energię potencjalną ma cały układ ładunków?



15.8. Dwa ładunki: dodatni Q i ujemny $-Q$ znajdują się w odległości $2a$ od siebie. Oblicz: (a) Gęstość energii w punkcie A leżącym w środku odcinka łączącego ładunki. (b) Energię elektronu umieszczonego w punkcie A.

15.9. Oblicz gęstość energii w przy powierzchni protonu zakładając, że ładunek protonu jest rozmieszczony jednorodnie, a promień protonu wynosi $R = 1{,}5$ fm.

15.10. Oblicz energię pola elektrycznego zawartą w warstwie parafiny o grubości d, otaczającej naładowaną ładunkiem Q metalową kulę o promieniu R.

15.11. Oblicz energię oddziaływania dwóch cząstek wody znajdujących się w odległości 10^{-8} m w przypadku, gdy momenty dipolowe molekuł są do siebie równoległe. Trwały moment dipolowy cząsteczki wody przyjmij $p_0 = 6{,}2\cdot10^{-30}$ C·m.

15.12. Jaką pracę należy wykonać, aby trwały moment dipolowy $p_0 = 6{,}2\cdot10^{-30}$ C·m (cząsteczka wody), ustawiony równolegle do linii pola elektrycznego o natężeniu 10^6 V/m, obrócić do położenia antyrównoległego względem linii pola?

15.13. Wykaż, że praca wykonana przez pole elektryczne w czasie polaryzacji cząstki niepolarnej umieszczonej w jednorodnym polu elektrycznym polu elektrycznym o natężeniu E wynosi: $W = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon_0 E^2$, gdzie α jest polaryzowalnością elektronową cząsteczki. Przyjąć, że indukowany moment dipolowy cząsteczki p proporcjonalny jest do pola elektrycznego. $p = \alpha E$

15.14. Jakiej energii nabywa jednostka objętości niepolarnego dielektryka o względnej stałej dielektrycznej $\varepsilon_r = 4.5$, jeżeli umieścić go w polu elektrycznym o natężeniu 10^4 V/cm?

15.15. Okładki kondensatora płaskiego o powierzchni elektrod $S = 0{,}0098$ cm przyciągają się z siłą $3\cdot10^{-2}$ N. Przestrzeń między okładkami jest wypełniona miką ($\varepsilon_r = 6$). Oblicz: (a) ładunki na okładkach, (b) natężenie pola elektrycznego, (c) energię zawartą w jednostce objętości pola.

15.16. Jaką pracę należy wykonać, aby rozsunąć okładki kondensatora płaskiego ($S = 200$ cm^2) z odległości $l_1 = 0{,}3$ cm do $l_2 = 0{,}5$ cm? Rozpatrzyć dwa przypadki: (a) Kondensator ładujemy do napięcia 600 V i odłączamy od źródła. (b) Kondensator jest cały czas połączony ze źródłem o stałym napięciu 600 V.

15.17. Płaski kondensator o pojemności C naładowano do napięcia U i odłączono od źródła. Między okładkami kondensatora znajduje się dielektryk. Jaką pracę W należy wykonać, aby usunąć dielektryk z kondensatora, jeżeli jego względna przenikalność wynosi ε_r?

15.18. Akumulator o sile elektromotorycznej E połączono z płaskim kondensatorem o pojemności C. Jaką pracę należy wykonać, aby z kondensatora usunąć dielektryk, jeżeli jego względna przenikalność wynosi ε_r?

15.19. Okładki kondensatora o pojemności C, naładowanego do napięcia U, połączono równolegle z okładkami identycznego kondensatora, lecz nie naładowanego. Oblicz zmianę energii ΔE układu kondensatorów wywołaną połączeniem. Czy zmiana energii byłaby mniejsza, gdybyśmy okładki kondensatorów połączyli przy pomocy drutu z nadprzewodnika?

15.20. Dwa kondensatory o pojemności $C_1 = 1$ μF i $C_2 = 10$ μF są połączone szeregowo. Do zacisków baterii kondensatorów przyłożono napięcie $U_0 = 200$ V. Jaka jest energia każdego z kondensatorów?

15.21. Elektron przelatuje od jednej płytki kondensatora płaskiego do drugiej. Różnica potencjałów między płytkami wynosi 3 kV, odległość między płytkami 5 mm. Znaleźć: (a) Siłę działającą na elektron. (b) Przyspieszenie elektronu. (c) Prędkość, z jaką elektron dociera do drugiej płytki. (d) Gęstość powierzchniową ładunku na płytkach kondensatora. Prędkość początkową elektronu przyjąć równą zeru.

15.22. Pole elektryczne jest wytworzone przez dwie równoległe płytki oddalone od siebie o 2 cm. Różnica potencjałów między płytkami wynosi 120 V. Jaką prędkość uzyska elektron wskutek działania pola, przebywając wzdłuż linii sił odległość x = 3 mm. Prędkość początkową elektronu przyjąć równą zeru.

15.23. Proton i cząstka α, poruszające się z jednakową prędkością, wlatują do kondensatora płaskiego, równolegle do płytek. Ile razy odchylenie protonu w polu kondensatora będzie większe od odchylenia cząstki α?

15.24. Proton i cząstka α, przyspieszone jednakową różnicą potencjałów, wlatują do kondensatora płaskiego, równolegle do płytek. Ile razy odchylenie protonu w polu kondensatora będzie większe od odchylenia cząstki α?

15.25. Oblicz czas przelotu elektronu między okładkami płaskiego kondensatora próżniowego, jeśli odległość między okładkami wynosi d = 5 mm, a różnica potencjałów między okładkami U = 200 V. Pomiń początkową prędkość elektronu.

15.26.* Pomijając wpływ ładunku przestrzennego i prędkość początkową, oblicz czas przelotu elektronu od anody do katody w lampie dwuelektrodowej o elektrodach cylindrycznych. Napięcie między elektrodami U = 100 V, promień katody R_1 = 2 mm, promień anody R_2 = 10 mm.

15.27. W pobliżu typowej żarówki natężenie światła żółtego wynosi $I \approx 0{,}01\, W/m^2$. Oblicz natężenie pola elektrycznego tej fali.

15.28. Laser dużej mocy wytwarza impuls światła o energii E_m = 1000 J i czasie trwania t = 0,5 ms. Oblicz średnią wartość natężenia pola elektrycznego fali świetlnej, jeżeli przekrój wiązki wynosi S = 1 cm^2.

Rozwiązania.

15.1.R.

$$L = q[V(2r) - V(\infty)] = \frac{qr\sigma}{2\varepsilon_0} = 1{,}13 \cdot 10^{-4}\ J$$

15.2.R.

$$\mathrm{v}_A = \sqrt{\mathrm{v}_B^{\ 2} - \frac{2q}{m}\mathrm{v}_A} = 16{,}7 \cdot 10^{-2}\ \frac{m}{s}$$

15.3.R.

$$E_k = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = 8{,}57 \cdot 10^{-13}\ J\ ,$$

$$U = \frac{m\mathrm{v}^2}{2q} = 2{,}66 \cdot 10^{6}\,V\,.$$

15.4.R.

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{Q \cdot q_\alpha}{2\pi\varepsilon_0 mr}} = 9{,}27 \cdot 10^{5}\ \frac{m}{s}$$, gdzie $q_\alpha = |2e|$

15.5.R.

$$f = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 b} = 8{,}1\frac{N}{m},$$

$$A = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0} ln\frac{b}{a} = 0{,}112\frac{J}{m}\,.$$

Wskazówka: należy najpierw obliczyć natężenie pola elektrycznego od jednej nici w odległości b od niej, korzystając z prawa Gaussa lub zasady superpozycji, a następnie siłę F: $F = E\lambda$.

15.6.R.

$$E_p = -\frac{r\lambda q}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

15.7.R.

(a)

$$E_{pA} = -QV_A\,,$$

gdzie V_A – potencjał w punkcie A.

$$V_A = k\frac{Q}{a} + k\frac{Q}{a} - k\frac{2Q}{a\sqrt{2}} = k\frac{Q}{a}(2-\sqrt{2}),$$

stąd:

$$E_{pA} = -k\frac{Q^2}{a}(2-\sqrt{2}).$$

Energia potencjalna całego układu ładunków jest równa sumie prac potrzebnych na przeniesienie poszczególnych ładunków z ich początkowych położeń do nieskończoności. Dlatego trzeba rozpatrywać pracę usunięcia kolejnych ładunków w polu ładunków pozostałych. Tak więc praca usunięcia ładunku *Q* z naroża *D*, gdy wcześniej usunięty został ładunek *Q* z naroża *A*, będzie równa:

$$E_{pD} = Q\left(-k\frac{2Q}{a} + k\frac{q}{a\sqrt{2}}\right) = k\frac{Q^2}{a}\left(-2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

a praca usunięcia ładunku *Q* z naroża *B*:

$$E_{pB} = Q\left(-k\frac{2Q}{a}\right) = -k\frac{2Q^2}{a},$$

stąd energia potencjalna całego układu ładunków:

$$E_p = E_{pA} + E_{pB} + E_{pD},$$

ostatecznie:

$$E_p = k\frac{Q^2}{a}\left(\frac{\sqrt{2}(2+1)}{2} - 6\right)$$

15.8.R.

(a) Gęstość energii pola elektrycznego równa się:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q^2}{a^4}$$

(b) $E_p = -eV = 0$, gdyż w środku odcinka pomiędzy $+Q$ i $-Q$, $V = 0$.

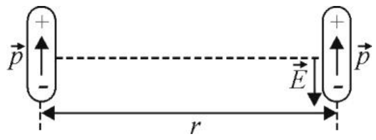
15.9.R.

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{e^2}{R^4} = 1{,}81\cdot 10^{30}\,\frac{J}{m^3}$$

15.10.R. Ponieważ gęstość energii pola elektrycznego $w = \frac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_0 E^2$, a natężenie pola elektrycznego w odległości *r* od środka kuli w warstwie dielektryka: $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2}$, dlatego też energia zawarta w warstwie kulistej o grubości dr i objętości $dV = 4\pi r^2 dr$ wynosi $dW = WdV$, stąd całkowita wartość energii zawarta w warstwie parafiny:

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_R^{R+d} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+d}\right).$$

15.11.R.



Energia dipola w polu elektrycznym:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -pE\cos\alpha .$$

W naszym przypadku dipol drugi znajduje się w polu elektrycznym dipola pierwszego o natężeniu równym:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3},$$

a kąt $\alpha = 180^0$, dlatego też:

$$W = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = 3{,}46 \cdot 10^{-25}\ J$$

15.12.R.

$$W = 2pE = 12{,}4 \cdot 10^{-24}\ J$$

15.13.R.

$$W = \int_0^{E_0} pdE = \int_0^{E_0} \alpha EdE = \frac{1}{2}\alpha E_0^{\ 2}$$

15.14.R.

$$W = \tfrac{1}{2} n_0 \alpha E^2 = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2 = 15{,}5\frac{J}{m^3}$$

Wskazówka: patrz rozwiązanie zadań 15.13. oraz 14.47.

15.15.R.

$$Q = \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon_r FS} = 1{,}77 \cdot 10^{-7}\ C$$

$$E = \frac{Q}{S\varepsilon_0\varepsilon_r} = 3{,}4 \cdot 10^5\ \frac{V}{m}$$

$$w_e = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = 3{,}07 \frac{J}{m^3}.$$

15.16.R.

(a)

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2l_1^2}(l_2 - l_1) = 71{,}2 \cdot 10^{-7}\ J$$

(b)

$$W_1 = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2}\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}\right) = 42{,}7 \cdot 10^{-7}\ J$$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia o pracy i energii. W przypadku (a) stały jest ładunek na okładkach. Dlatego praca siły zewnętrznej równa jest przyrostowi energii ładunku. W przypadku (b) natomiast, napięcie jest stałe, a ładunek z okładek kondensatora częściowo odpłynie do źródła. Dlatego praca rozsuwania okładek będzie równa przyrostowi energii kondensatora oraz pracy doładowania źródła napięcia równej $\Delta U \cdot Q$.

15.17.R.

$$W = \frac{CU^2}{2}(\varepsilon_r - 1) > 0$$

Spolaryzowany dielektryk jest przyciągany przez różnoimiennie naładowane okładki. Dlatego $W > 0$.

15.18.R.

$$W = \frac{CE^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)$$

Wskazówka: Zobacz rozwiązanie zadania 15.16.

15.19.R.

$$\Delta E = -\frac{CU^2}{4}$$

Przy połączeniu kondensatora naładowanego z nienaładowanym o równej pojemności, połowa energii ulegnie rozproszeniu. Część zamieni się na ciepło, a część zostanie wypromieniowana w postaci fal elektromagnetycznych. Gdybyśmy zastosowali połączenia z nadprzewodnika, to strata energii układu obu kondensatorów byłaby taka sama, tylko prawie w całości rozproszona energia zostałaby wypromieniowana.

15.20.R.

$$W_1 = \frac{C_1 C_2{}^2 U^2}{2(C_1 + C_2)^2} = 8{,}26 \cdot 10^{-3}\ J$$

$$W_2 = \frac{C_1{}^2 C_2 U^2}{2(C_1 + C_2)^2} = 8{,}26 \cdot 10^{-4}\ J$$

15.21.R.

(a)

$$F = eE = e\frac{U}{d} = 9{,}6 \cdot 10^{-14}\ N$$

(b)

$$a = \frac{F}{m} = 1{,}05 \cdot 10^{17}\ \frac{m}{s^2}$$

(c)

$$eU = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} \Rightarrow \mathrm{v} = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 3{,}24 \cdot 10^{7}\ \frac{m}{s}$$

(d)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma = \varepsilon_0 E = 4{,}7 \cdot 10^{-9}\ \frac{C}{m^2}$$

15.22.R.

$$v = \sqrt{\frac{2eU\ \frac{x}{d}}{m}} = 2{,}53 \cdot 10^{6}\ \frac{m}{s}\ .$$

15.23.R. Odchylenie protonu będzie dwukrotnie większe od odchylenia cząstki α.

15.24.R. W tym przypadku odchylenie protonu i cząstki α będzie równe.

15.25.R.

$$t = \sqrt{\frac{2md^2}{eU}} = 5{,}33 \cdot 10^{-6}\, s$$

15.26.R. Ponieważ pole elektryczne jest niejednorodne, dlatego też przyspieszenie elektronu nie będzie stałe. Po przebyciu różnicy potencjałów U_r, elektron uzyskuje prędkość:

$$\mathrm{v} = \sqrt{\frac{2eU_r}{m}}\,.$$

Różnica potencjałów U_r od katody o promieniu R_1 do punktu o promieniu r wynosi (zad. 14.35.c):

$$U_r = \frac{U}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \ln\frac{r}{R_1}\,.$$

Ponieważ $dr = \mathrm{v}\cdot dt$, stąd $dt = \frac{dr}{\mathrm{v}}$, a całkowity czas przelotu:

$$t = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{m\,ln\frac{R_2}{R_1}}{2eU}} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{\sqrt{ln\frac{r}{R_1}}} = 1{,}7\cdot 10^{-9}\ s$$

15.27.R. Światło jest falą elektromagnetyczną. Natężenie światła I można wyrazić przez gęstość energii pola elektrycznego: $I = \varepsilon_0\varepsilon_r E^2 c$, gdzie c – prędkość światła, a E – natężenie pola elektrycznego fali, stąd:

$$E = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon_0\varepsilon_r c}} = 1{,}9\frac{V}{m}\,.$$

15.28.R. Moc lasera:

$$(1) \qquad P = \frac{E_m}{t}\,.$$

Moc promieniowaną można wyrazić również przez gęstość energii pola elektrycznego $P = w\cdot c\cdot S$, gdzie c – prędkość światła, a S – pole przekroju wiązki, skąd:

$$(2) \qquad P = \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 c\cdot S\,.$$

Z (1) i (2) otrzymamy:

$$E = \sqrt{\frac{2E_n}{\varepsilon_0\varepsilon_r c\cdot t\cdot S}} = 3{,}8\cdot 10^6\,\frac{V}{m}\,.$$

Po zogniskowaniu wiązki laserowej pole elektryczne może wzrosnąć o kilka rzędów. Dzięki temu wiązkę laserową można stosować do obróbki materiałów.